Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Новое представление оператора Гамильтона для бозонов и фермионов. Квантование свободной энергии и зависимость критерия Ландау от температуры, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 945–947

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1019>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 18:00:56

НОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ БОЗОНОВ И ФЕРМИОНОВ. КВАНТОВАНИЕ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ И ЗАВИСИМОСТЬ КРИТЕРИЯ ЛАНДАУ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В. П. Маслов

Рассмотрим систему N тождественных частиц на трехмерном торе $\mathbb{T}^3$, длина сторон которого L . Пусть гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H}_N = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=1}^N \Delta_j + U_0 \sum_{1 \leq j < k \leq N} v\left(\frac{x_j - x_k}{a}\right), \quad (1)$$

где $x_j \in \mathbb{T}^3$, Δ – оператор Лапласа, m – масса частиц, $\hbar$ – постоянная Планка, U_0, a – заданные постоянные, $v(x)$ – непрерывная четная функция на торе. Если частицы являются бозонами или фермионами, гамильтониану (1) отвечает вторично квантованный [1] оператор

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int dx \hat{\psi}^+(x) \Delta \hat{\psi}^-(x) + U_0 \iint dx dy v\left(\frac{x_j - x_k}{a}\right) \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^+(y) \hat{\psi}^-(y) \hat{\psi}^-(x),$$

где операторы $\hat{\psi}^\pm(x)$ являются операторами рождения и уничтожения частиц соответственно в бозонном $\mathcal{H}_B$ или в фермионном $\mathcal{H}_F$ пространствах Фока [1]. Пусть $k > 0$ – целое число. Введем операторнозначный функционал

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = & \sum_{N_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_k=0}^{\infty} \frac{1}{N_1! \cdots N_k!} \prod_{l=1}^k \left(\sum_{j^l=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1^l dy_1^l \cdots dx_l^l dy_l^l b_l(x_1^l, \dots, x_l^l, j^l) \hat{\psi}^+(x_1^l) \cdots \right. \\ & \times \hat{\psi}^+(x_l^l) b_l^*(y_1^l, \dots, y_l^l, j^l) \hat{\psi}^-(y_1^l) \cdots \hat{\psi}^-(y_l^l) \Big)^{N_l} \exp\left(-\int dz \hat{\psi}^+(z) \hat{\psi}^-(z)\right), \end{aligned} \quad (2)$$

который определен на наборах из k функций $b_l(x_1^l, \dots, x_l^l, j)$, $l = 1, \dots, k$, таких, что

$$\sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \cdots dx_l |b_l(x_1^l, \dots, x_l^l, j)|^2 < \infty,$$

и значения которого есть операторы в пространстве $\mathcal{H}_B$. Числа над операторами в (2) обозначают порядок их действия [2]. Введем также аналогичный функционал, принимающий значения в пространстве $\mathcal{H}_F$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = & \sum_{N_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{N_k=0}^{\infty} \frac{1}{N_1! \cdots N_k!} \sum_{j_1^1=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_1^{N_1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_1^k=0}^{\infty} \cdots \sum_{j_k^{N_k}=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1^1 dy_1^1 \cdots dx_{N_1}^1 \\ & \times dy_{N_1}^1 \cdots dx_1^k dy_1^k \cdots dx_{N_k}^k dy_{N_k}^k \hat{\psi}^+(x_1^1) \cdots \hat{\psi}^+(x_{N_1}^1) \cdots \hat{\psi}^+(x_1^k) \cdots \hat{\psi}^+(x_{N_k}^k) \hat{P}_0 \\ & \times b_1(x_1^1, j_1^1) \cdots b_1(x_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \cdots b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j_1^k) \cdots b_k(x_{N_k}^k - k + 1, \dots, x_{N_k}^k, j_{N_k}^k) \\ & \times b_1^*(y_1^1, j_1^1) \cdots b_1^*(y_{N_1}^1, j_{N_1}^1) \cdots b_k^*(y_1^k, \dots, y_k^k, j_1^k) \cdots b_k^*(y_{N_k}^k - k + 1, \dots, y_{N_k}^k, j_{N_k}^k) \\ & \times \hat{\psi}^-(y_{N_k}^k) \cdots \hat{\psi}^-(y_1^k) \cdots \hat{\psi}^-(y_{N_1}^1) \cdots \hat{\psi}^-(x_1^1), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\hat{P}_0$ – оператор проектирования на вакуумный вектор [1] пространства $\mathcal{H}_F$. Функциональные аргументы у функционалов $\hat{\rho}$, определенных формулами (2) и (3), будем опускать. Введем далее для бозонов и фермионов функционал

$$\begin{aligned} & \mathcal{H} [b_1^*(x_1^1, j^1), b_1(x_1^1, j^1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k)] \\ &= \text{Sp}(\hat{\rho}\hat{H}) \exp\left(-\sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} \int \dots \int dy_1 \dots dy_k b_l^*(y_1, \dots, y_l, j) b_l(y_1, \dots, y_k, j)\right), \end{aligned} \quad (4)$$

где в бозонном случае $\hat{\rho}$ имеет вид (2), а в фермионном – (3).

В работах [3]–[5] были введены пространства $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$ и их бозонные и фермионные подпространства $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^B$ и $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^F$, а также пространства $\mathcal{F} = \bigoplus_{N_1, \dots, N_k=0}^{\infty} \mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}$ для k типов кластеров. Пространства $\mathcal{F}$ являются пространствами Фока, и в них определены операторы рождения и уничтожения $\hat{b}_l^{\pm}(x_1, \dots, x_l, j)$, $l = 1, \dots, k$. Кроме того, в $\mathcal{F}$ вводятся [3]–[5] осредненные гамильтонианы следующим образом:

$$\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} [\hat{b}_1^+(x_1^1, j^1), \hat{b}_1^-(x_1^1, j^1), \dots, \hat{b}_k^+(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), \hat{b}_k^-(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k)].$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Проекция осредненного гамильтониана (4) на подпространство $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^B$ в случае, когда $\hat{\rho}$ имеет вид (2), и его проекция на $\mathcal{F}_{N_1, \dots, N_k}^F$ в случае, когда $\hat{\rho}$ имеет вид (3), совпадает с гамильтонианом (1).*

Рассмотрим теперь функционал

$$\begin{aligned} & S[b_1^*(x_1^1, j^1), b_1(x_1^1, j^1), \dots, b_k^*(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), b_k(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k)] \\ &= \text{Reg Sp}\left(\hat{\rho} \ln\left(\frac{\hat{\rho}}{\text{Sp} \hat{\rho}}\right)\right) \exp\left(-\sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{\infty} \int \dots \int dy_1 \dots dy_k b_l^*(y_1, \dots, y_l, j) b_l(y_1, \dots, y_k, j)\right), \end{aligned} \quad (5)$$

Оператор

$$\overline{S} = S[\hat{b}_1^+(x_1^1, j^1), \hat{b}_1^-(x_1^1, j^1), \dots, \hat{b}_k^+(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k), \hat{b}_k^-(x_1^k, \dots, x_k^k, j^k)]$$

был введен в [3]–[5] и называется *оператором энтропии* системы бозонов или фермионов при соответствующем выборе $\hat{\rho}$ в виде (2) или (3). Числа λ , для которых

$$(\overline{\mathcal{H}} + \theta \overline{S})\Phi = \lambda\Phi, \quad \Phi \in \mathcal{F}, \quad \Phi \neq 0$$

называются [3]–[5] в соответствующем случае *квантовыми значениями свободной энергии* системы бозонов или фермионов при температуре θ .

В случае, когда взаимодействие между частицами мало, некоторые из квантовых значений свободной энергии определяются точками экстремума функционала $F = (\mathcal{H} + \theta S)/\text{Sp} \hat{\rho}$, где $\mathcal{H}$ и S имеют вид (4) и (5), и системой уравнений в вариациях [6] около этих точек экстремума. В частности, для системы бозонов при $k = 1$ в термодинамическом пределе при $L \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$, $N/L^3 \rightarrow \text{const}$ существуют точки экстремума функционала F следующего вида:

$$b_1^{p0}(x, j) = \frac{\sqrt{n_{qj} - p_0}}{L^{3/2}} \exp\left(\frac{iqjx}{a}\right), \quad (6)$$

где $q_j = (l_j^1, l_j^2, l_j^3)2\pi a/L$, (l_j^1, l_j^2, l_j^3) – взаимнооднозначное отображение множества $j = 0, 1, \dots$ на $\mathbb{Z}^3$, $p_0 = (m^1, m^2, m^3)2\pi a/L$, $m^1, m^2, m^3 \in \mathbb{Z}$ – параметр, нумерующий разные точки экстремума, n_p являются решением системы уравнений

$$\varepsilon_p + \frac{U_0 a^3 n_0}{L^3} \sum_{p'} (\tilde{v}(0) + \tilde{v}(p - p')) n_{p'} + \theta \ln \left(\frac{n_p}{1 + n_p} \right) - \mu - \delta_{p0} \left(\frac{U_0 a^3 n_0}{L^3} \tilde{v}(0) + \theta \ln \left(\frac{n_0}{1 + n_0} \right) \right) = 0, \quad N = \sum_p n_p,$$

где $\tilde{v}(p) = \int dx v(x) \exp(ipx)$, $\varepsilon_p = \hbar^2 p^2 / 2ma^2$, δ_{pq} – символ Кронекера. При этом система уравнений в вариациях, которая отвечает экстремуму (6) и определяет его устойчивость, имеет вид

$$\begin{aligned} \omega F_{pq} = & \frac{1}{N(a_p - a_q)} \left\{ \delta_{pp_0} \left[n_0 \frac{\hbar^2}{2ma^2} (q^2 - p_0^2) F_{p_0 q} + n_0^2 \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(q - p_0) F_{p_0 q} \right. \right. \\ & - n_0^2 \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(q - p_0) F_{2p_0 - q p_0} + n_0 \sum_{p'} n_{p'} \frac{U_0 a^3}{L^3} (\tilde{v}(p' - q) - \tilde{v}(p' - p_0)) F_{p_0 q} \\ & + n_0 \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_{p' q'} (\tilde{v}(p' - q') - \tilde{v}(p' - p_0)) (n_{p'} - n_{q'}) F_{p' q'} \delta_{q+p', q'} \Big] \\ & + \delta_{qp_0} \left[n_0 \frac{\hbar^2}{2ma^2} (p^2 - p_0^2) F_{pp_0} + n_0^2 \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(p - p_0) F_{pp_0} \right. \\ & - n_0^2 \frac{U_0 a^3}{L^3} \tilde{v}(p - p_0) F_{p_0 2p_0 - p} + n_0 \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_{p'} n_{p'} (\tilde{v}(p' - p) - \tilde{v}(p' - p_0)) F_{pp_0} \\ & + n_0 \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_{p' q'} (\tilde{v}(p' - q') - \tilde{v}(q' - p_0)) (n_{p'} - n_{q'}) F_{p' q'} \delta_{p'+q', p'} \Big] \\ & + \left(\frac{\hbar^2}{2ma^2} (n_p - n_q) (q^2 - p^2) + n_0 \frac{U_0 a^3}{L^3} (\tilde{v}(q - p_0) - \tilde{v}(p - p_0)) (n_p - n_q) \right. \\ & + \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_{p'} (\tilde{v}(q - p') - \tilde{v}(p - p')) (n_p - n_q) n_{p'} \Big) F_{pq} \\ & \left. + \frac{U_0 a^3}{L^3} \sum_{p' q'} (\tilde{v}(q - p) + \tilde{v}(q - q')) \delta_{q+p', q'+p} (n_{p'} - n_{q'}) (n_p - n_q) F_{p' q'} \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

где $a_p = n_p / (1 + n_p)$. При температуре θ и скорости p_0 , для которых $n_0 \sim N$ и все собственные значения ω системы (7) действительны, в бозонной системе существует конденсат и сверхтекучесть. При этом действительность ω является аналогом критерия Ландау исчезновения сверхтекучести. Исходя из этого, можно при фиксированной температуре θ определить критическую скорость, при которой нарушается действительность ω и исчезает сверхтекучесть.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
2. Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
3. Маслов В. П. // ТМФ. 2000. Т. 125. № 3.
4. Маслов В. П. // Функцион. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. № 4. С. 50–64.
5. Маслов В. П. // Функцион. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. № 4. С. 35–48.
6. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.