Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Конев, В. В. Рыжиков, О наборе спектральных кратностей $\{2, 4, \dots, 2^n\}$ для вполне эргодических $\mathbb{Z}^2$ -действий, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 383–392

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10191>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:37:11

О наборе спектральных кратностей $\{2, 4, \dots, 2^n\}$ для вполне эргодических $\mathbb{Z}^2$ -действий

Р. А. Конев, В. В. Рыжиков

Работа посвящена реализации наборов спектральных кратностей для эргодических $\mathbb{Z}^2$ -действий. Даны достаточные условия, обеспечивающие набор кратностей вида $\{2, 4, \dots, 2^n\}$.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10191

1. Введение. Задача о реализации заданного подмножества натурального ряда как множества кратностей спектра эргодического действия хорошо известна в спектральной теории динамических систем с инвариантной мерой (см. [1], [2]). Современное состояние этой тематики и методология полно отражены в недавнем обзоре [3]. Для $\mathbb{Z}$ -действий в [4], [5] независимо был получен простейший набор $\{2\}$, что было ответом на вопрос Рохлина о существовании эргодического автоморфизма с однородным спектром кратности два. Авторы настоящей статьи позднее нашли реализацию наборов кратностей $\{2, 4, \dots, 2^n\}$ для $\mathbb{Z}$ -действий (см. [6]). Другие реализации наборов кратностей, содержащих 2, были предложены в [7]–[9].

Реализация спектральных наборов кратности $\{2, 4, \dots, 2^n\}$ для эргодических $\mathbb{Z}^2$ -действий вытекает также из более общих фактов, полученных в [8], [9]. Результат этой заметки анонсирован в 2009 г. в [6]. Предложенный нами подход в сочетании с методами [10] можно использовать для построения перемешивающего $\mathbb{Z}^2$ -действия с наборами спектральных кратностей $\{2, 4, \dots, 2^n\}$ (также можно воспользоваться методами [11]).

В статье использованы следующие обозначения:

- $\mathbb{T}$ – единичная окружность;
- I – тождественный оператор;
- Θ – оператор ортопроекции на подпространство констант;
- $\{\text{const}\}$ – подпространство констант в $L_2(Y, \nu)$;
- $L_2^0(Y, \nu)$ – подпространство функций $L_2(Y, \nu) \ominus \{\text{const}\}$.

Множество автоморфизмов $\{S^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ пространства Лебега $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mu(X) = 1$, называется $\mathbb{Z}^2$ -действием, если эти автоморфизмы удовлетворяют свойству

$$S^{z_1} \circ S^{z_2} = S^{z_1+z_2} \quad \text{для любых } z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^2.$$

Каждому автоморфизму S отвечает оператор $\hat{S}: L_2(X, \mu) \rightarrow L_2(X, \mu)$, заданный формулой

$$(\hat{S}f)(x) = f(Sx).$$

Подпространство $C \subseteq L_2(X, \nu)$ для действия $\{S^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ является *циклическим подпространством*, если найдется вектор $h \in L_2(Y, \nu)$ такой, что $\overline{\langle \hat{S}^z h \rangle}_{z \in \mathbb{Z}^2} = C$. Вектор h называют *циклическим вектором*.

Эргодическое действие $\{S^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ имеет *простой спектр*, если $L_2^0(Y, \nu)$ является циклическим подпространством для этого действия.

Действие $\{S^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ имеет *однородный спектр кратности n* , если пространство $L_2^0(Y, \nu)$ можно представить в виде ортогональной суммы $\bigoplus_{i=1}^n C_i$ циклических подпространств C_i , причем ограничения нашего действия на C_i изоморфны между собой. Число n принимает значения $1, 2, \dots$ и ∞ .

В статье даны достаточные условия для $\mathbb{Z}^2$ -действий, обеспечивающие набор кратностей $\{2, 4, \dots, 2^n\}$. В первой части статьи мы изучаем $\mathbb{Z}^2$ -действия, имеющие однородный спектр кратности два. Во второй части статьи приведены достаточные условия для $\mathbb{Z}^2$ -действий, обеспечивающие набор кратностей $\{2, 4\}$. В третьей части статьи доказан основной результат о наборе кратностей $\{2, 4, \dots, 2^n\}$. Свойства, которые накладываются на каждый сомножитель в произведении $\{\hat{T}_1^z \otimes \dots \otimes \hat{T}_k^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$, аналогично свойствам, рассмотренным в работе [12], являются типичными. Отсюда следует существование нужного набора.

2. Однородный спектр кратности два для эргодического $\mathbb{Z}^2$ -действия.

Эргодические $\mathbb{Z}$ -действие с однородным спектром кратности два были получены в [5], [4]. В дальнейшем мы сосредоточим наш интерес на вполне эргодических $\mathbb{Z}^2$ -действиях: каждый элемент, кроме тождественного, является эргодическим. Отметим, что в нашей ситуации каждый такой элемент будет обладать свойством слабого перемешивания (обладать непрерывным спектром).

ТЕОРЕМА 1. *Для того, чтобы вполне эргодическое действие $\{T^z \times T^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ имело однородный спектр кратности два, достаточно выполнение следующих условий:*

- 1) действие $\{T^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ имеет простой спектр;
- 2) действие $\{T^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ имеет слабые пределы

$$a_1 I + b_1 \hat{T}^{(1,0)} + c_1 \Theta, \quad a_2 I + b_2 \hat{T}^{(0,1)} + c_2 \Theta, \quad a_3 I + b_3 \hat{T}^{(1,1)} + c_3 \Theta$$

для некоторых наборов положительных чисел a_j, b_j, c_j , $a_j + b_j + c_j = 1$, $j = \{1, 2, 3\}$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Пусть f – циклический вектор для действия $\{S^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$. *Спектральная теорема для $\mathbb{Z}^2$ -действий* утверждает существование изометрии $\Phi: L_2^0(Y, \nu) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^2, \sigma)$ такой, что

$$\Phi(\hat{S}^z) \Phi^{-1} g(u) = u^z g(u) = u_1^{z_1} u_2^{z_2} g(u)$$

для любых $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$ и $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{T}^2$. Поэтому для действия $\{S^z \otimes S^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ найдется изометрия $\Psi: L_2^0(Y \times Y, \nu \times \nu) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2, \sigma \times \sigma)$ такая, что

$$\Psi(\hat{S}^z \otimes \hat{S}^z) \Psi^{-1} g(u, w) = u^z w^z g(u, w) = u_1^{z_1} u_2^{z_2} w_1^{z_1} w_2^{z_2} g(u, w)$$

для любых $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{T}^2$ и $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$.

Далее наше действие будет рассмотрено в спектральном представлении.

Пространство $L_2(\mathbb{T}^2 \otimes \mathbb{T}^2, \sigma \otimes \sigma)$ представим в виде прямой суммы двух подпространств $H_s \oplus H_a$, где

$$H_s = \{g(u, w): g(u, w) = g(w, u)\},$$

$$H_a = \{g(u, w): g(u, w) = -g(w, u)\}.$$

ЛЕММА 1. Действие $\{\hat{S}^z \otimes \hat{S}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ в пространстве $L_2(\mathbb{T}^2 \otimes \mathbb{T}^2, \sigma \otimes \sigma)$ имеет спектр кратности два, если выполнены следующие условия:

- 1) действие $\{S^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ не имеет в спектре дискретной компоненты (спектр непрерывен);
- 2) ограничение действия $\{\hat{S}^z \otimes \hat{S}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ на подпространство H_s имеет простой спектр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим ограничение действия $\{\hat{S}^z \otimes \hat{S}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ на подпространство H_s через $\{\hat{S}_s^z \otimes \hat{S}_s^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$, а на подпространство H_a через $\{\hat{S}_a^z \otimes \hat{S}_a^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$.

Сначала покажем, что подпространства H_s , H_a инвариантны относительно действия $\{\hat{S}^z \otimes \hat{S}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$, причем существует обратимый оператор $F: H_s \rightarrow H_a$ такой, что

$$F(\hat{S}_s^z \otimes \hat{S}_s^z) = (\hat{S}_a^z \otimes \hat{S}_a^z)F.$$

Инвариантность подпространств H_s и H_a вытекает из их определения. Также отметим, что H_s и H_a ортогональны.

Для построения оператора F нам понадобится следующее разбиение множества $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$.

Обозначим диагональ $\{(u, u): u \in \mathbb{T}^2\}$ через Δ . Множество $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \setminus \Delta$ представим в виде $Q \sqcup RQ$, где R – преобразование симметрии относительно диагонали Δ , а Q – некоторое борелевское множество.

Замечая, что $\sigma \otimes \sigma(\Delta) = 0$ в силу непрерывности меры σ (отсутствует дискретная компонента), определим оператор $F: H_s \rightarrow H_a$:

$$Fg = (\chi_\Delta + \chi_Q - \chi_{RQ})g = (\chi_Q - \chi_{RQ})g,$$

где функции χ_Δ , χ_Q и χ_{SQ} являются индикаторами соответствующих множеств Δ , Q и RQ . Оператор F является обратимым, так как $F^2g = (\chi_Q - \chi_{SQ})^2g = g$, т.е. $F^{-1} = F$.

Покажем теперь, что $F(\hat{S}_s^z \otimes \hat{S}_s^z) = (\hat{S}_a^z \otimes \hat{S}_a^z)F$. Действительно, пусть для любой функции $g_s \in H_s$ имеем

$$F(\hat{S}_s^z \otimes \hat{S}_s^z)g_s(u, w) = Fu^zw^zg_s(u, w) = (\chi_Q - \chi_{RQ})u^zw^zg_s(u, w)$$

$$= u^zw^z(\chi_Q - \chi_{RQ})g_s(u, w) = u^zw^zFg_s(u, w) = (\hat{S}_a^z \otimes \hat{S}_a^z)Fg_s(u, w).$$

Таким образом, действие $\{\hat{S}^z \otimes \hat{S}^z\}$ является прямой суммой двух унитарно изоморфных действий с простым спектром. Это означает, что оно имеет однородный спектр кратности 2.

Пусть $f \odot g$ обозначает функцию

$$\frac{1}{2}[f(u)g(w) + f(w)g(u)].$$

ЛЕММА 2. Линейная оболочка $\langle f \odot g : f, g \in L_2(\mathbb{T}^2, \sigma) \rangle$ всюду плотна в пространстве H_s .

Лемма вытекает из того, что произвольную функцию $g(u, w) \in H_s$ можно приблизить конечными линейными комбинациями произведений вида $f(u)h(w)$, где $f, h \in L_2(\mathbb{T}^2, \sigma)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть действие $\{S^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ обладает слабым пределом $aI + b\widehat{S}^m$ для некоторых $a, b > 0$. Тогда замыканию линейной оболочки $\langle \widehat{S}^z f \otimes \widehat{S}^z f \mid z \in \mathbb{Z}^2 \rangle$ принадлежат все векторы вида $\widehat{S}^{z+tm} f \odot \widehat{S}^z f$ для всех $z \in \mathbb{Z}^2, t \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замыкание линейной оболочки $\langle \widehat{S}^z f \otimes \widehat{S}^z f \mid z \in \mathbb{Z}^2 \rangle$ обозначим через C . Пусть $\{m_i\} : \widehat{S}^{m_i} \rightarrow aI + b\widehat{S}^m$. Тогда из определения пространства C следует, что векторы вида $\widehat{S}^{z \pm m_i} f \odot \widehat{S}^{z \pm m_i} f$ принадлежат C для всех $z \in \mathbb{Z}^2$. Устремив i к бесконечности, получим, что

$$\begin{aligned} \widehat{S}^{m_i} f \otimes \widehat{S}^{m_i} f &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} (af + b\widehat{S}^m f) \otimes (af + b\widehat{S}^m f) \\ &= a^2 f \otimes f + 2ab\widehat{S}^m f \odot f + b^2 \widehat{S}^m f \otimes \widehat{S}^m f. \end{aligned}$$

Отсюда $\widehat{S}^m f \odot f \in C$.

Рассмотрим векторы вида $\widehat{S}^{m_i+m} f \odot \widehat{S}^{m_i} f \in C$ и перейдем к пределу. Получим, что вектор

$$\begin{aligned} (a\widehat{S}^m f + b\widehat{S}^{2m} f) \odot (af + b\widehat{S}^m f) \\ = ab\widehat{S}^{2m} f \otimes f + a^2 \widehat{S}^m f \otimes f + ab\widehat{S}^m f \odot \widehat{S}^m f + b^2 \widehat{S}^{2m} f \otimes \widehat{S}^m f \end{aligned}$$

лежит в C . Так как три последних слагаемых лежат в C , это верно и для $\widehat{S}^{2m} f \otimes f$.

Аналогично, шаг за шагом, получим

$$\widehat{S}^{tm} f \odot f \in C \quad \text{для всех } t \in \mathbb{Z}_+.$$

Заметим, что из $\widehat{S}^{m_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} aI + b\widehat{S}^m$ вытекает

$$\widehat{S}^{-m_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} (aI + b\widehat{S}^m)^* = aI + b\widehat{S}^{-m}.$$

Применяя аналогичным образом последовательность $\{-m_i\}$, окончательно получим

$$\widehat{S}^{z+tm} f \odot \widehat{S}^z f \in C \quad \text{для всех } t \in \mathbb{Z}.$$

ЛЕММА 3. Действие $\{S^z \times S^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ в пространстве H_s имеет простой спектр, если выполнены условия

- 1) действие $\{S^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ имеет простой спектр;
- 2) для некоторых $a_j, b_j > 0, j \in \{1, 2, 3\}$, действие $\{S^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ имеет слабые пределы вида

$$a_1 I + b_1 \widehat{S}^{(1,0)}, \quad a_2 I + b_2 \widehat{S}^{(0,1)}, \quad a_3 I + b_3 \widehat{S}^{(1,1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для последовательностей $\{w_i\}, \{u_i\}, \{v_i\}$ выполнено

$$\widehat{S}^{w_i} \rightarrow a_1 I + b_1 \widehat{S}^{(1,0)}, \quad \widehat{S}^{u_i} \rightarrow a_2 I + b_2 \widehat{S}^{(0,1)} \quad \widehat{S}^{v_i} \rightarrow a_3 I + b_3 \widehat{S}^{(1,1)}.$$

Замыкание линейной оболочки $C = \overline{\langle \hat{S}^z f \otimes \hat{S}^z f : z \in \mathbb{Z}^2 \rangle}$ содержится в пространстве H_s , где f – циклический вектор для действия $\{\hat{S}\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$. Если мы покажем, что пространство C содержит векторы вида $\hat{S}^{z+(s,t)} f \odot \hat{S}^z f$ для всех $z \in \mathbb{Z}^2$ и $s, t \in \mathbb{Z}$, то с учетом леммы 2 получим, что $C = H_s$.

Применяя утверждение 1 для последовательностей w_i , u_i и v_i , получим, что векторы

$$\hat{S}^{z+(t,0)} f \odot \hat{S}^z f, \quad \hat{S}^{z+(0,t)} f \odot \hat{S}^z f, \quad \hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^z f$$

принадлежат пространству C для любого $z \in \mathbb{Z}^2$ и $t \in \mathbb{Z}$.

Так как векторы $\hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^z f$ для любого $z \in \mathbb{Z}^2$ и $t \in \mathbb{Z}$ принадлежат замыканию линейной оболочки C , то

$$\begin{aligned} \hat{S}^{w_i+z+(t,t)} f \odot \hat{S}^{w_i+z} f &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} \hat{S}^{z+(t,t)} (a_1 f + b_1 \hat{S}^{(1,0)} f) \odot \hat{S}^z (a_1 f + b_1 \hat{S}^{(1,0)} f) \\ &= a_1^2 \hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^z f + a_1 b_1 \hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^{z+(1,0)} f \\ &\quad + a_1 b_1 \hat{S}^{z+(t+1,t)} f \odot \hat{S}^z f + b_1^2 \hat{S}^{z+(t+1,t)} f \odot \hat{S}^{z+(1,0)} f, \\ \hat{S}^{u_i+z+(t,t)} f \odot \hat{S}^{u_i+z} f &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} \hat{S}^{z+(t,t)} (a_2 f + b_2 \hat{S}^{(0,1)} f) \odot \hat{S}^z (a_2 f + b_2 \hat{S}^{(0,1)} f) \\ &= a_2^2 \hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^z f + a_2 b_2 \hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^{z+(0,1)} f \\ &\quad + a_2 b_2 \hat{S}^{z+(t,t+1)} f \odot \hat{S}^z f + b_2^2 \hat{S}^{z+(t,t+1)} f \odot \hat{S}^{z+(0,1)} f. \end{aligned}$$

Получим для любых $z \in \mathbb{Z}^2$ и $t \in \mathbb{Z}$, что

$$\hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^{z+(1,0)} f + \hat{S}^{z+(t+1,t)} f \odot \hat{S}^z f \in C, \quad (2.1)$$

$$\hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^{z+(0,1)} f + \hat{S}^{z+(t,t+1)} f \odot \hat{S}^z f \in C. \quad (2.2)$$

Подставляя $z := z + (0, 1)$ и $t := t - 1$ в выражение (2.1), получим

$$\hat{S}^{z+(t-1,t)} f \odot \hat{S}^{z+(1,1)} f + \hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^{z+(0,1)} f \in C. \quad (2.3)$$

В силу (2.2), (2.3) имеем

$$\hat{S}^{z+(t-1,t)} f \odot \hat{S}^{z+(1,1)} f - \hat{S}^{z+(t,t+1)} f \odot \hat{S}^z f \in C.$$

Подставляя $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, получим $\hat{S}^{z+(t-1,t)} f \odot \hat{S}^z f \in C$.

Итак, мы показали, что для любого $z \in \mathbb{Z}^2$ и $t \in \mathbb{Z}$

$$\hat{S}^{z+(t-1,t)} f \odot \hat{S}^z f \in C, \quad \hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^z f \in C.$$

Докажем, что векторы вида $\hat{S}^{z+(t \pm i, t)} f \odot \hat{S}^z f$ для любого $i \in \mathbb{N}$ принадлежат C . Так как $\hat{S}^{z+(t-1,t)} f \odot \hat{S}^z f \in C$ и $\hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^z f \in C$, то

$$\begin{aligned} \hat{S}^{w_i+z+(t,t)} f \odot \hat{S}^{w_i+z} f &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} a_1^2 \hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^z f + a_1 b_1 \hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^{z+(1,0)} f \\ &\quad + a_1 b_1 \hat{S}^{z+(t+1,t)} f \odot \hat{S}^z f + b_1^2 \hat{S}^{z+(t+1,t)} f \odot \hat{S}^{z+(1,0)} f, \\ \hat{S}^{w_i+z+(t-1,t)} f \odot \hat{S}^{w_i+z} f &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} a_1^2 \hat{S}^{z+(t-1,t)} f \odot \hat{S}^z f + a_1 b_1 \hat{S}^{z+(t-1,t)} f \odot \hat{S}^{z+(1,0)} f \\ &\quad + a_1 b_1 \hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^z f + b_1^2 \hat{S}^{z+(t,t)} f \odot \hat{S}^{z+(1,0)} f. \end{aligned}$$

Отсюда $\widehat{S}^{z+(t+1,t)} f \odot \widehat{S}^z f \in C$ и $\widehat{S}^{z+(t-2,t)} f \odot \widehat{S}^z f \in C$. Применяя эти рассуждения к полученным векторам, получим, что $\widehat{S}^{z+(t \pm i, t)} f \odot \widehat{S}^z f \in C$ для любого $z \in \mathbb{Z}^2$, $t \in \mathbb{Z}$ и $i \in \mathbb{N}$, что равносильно

$$\widehat{S}^{z+(s,t)} f \odot \widehat{S}^z f \in C \quad \text{для любого } z \in \mathbb{Z}^2 \text{ и } s, t \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть для последовательностей $\{p_i\}$, $\{q_i\}$, $\{r_i\}$ при $i \rightarrow \infty$ выполнено

$$\begin{aligned} \widehat{T}^{p_i} &\rightarrow a_1 I + b_1 \widehat{T}^{(1,0)} + c_1 \Theta, & \widehat{T}^{q_i} &\rightarrow a_2 I + b_2 \widehat{T}^{(0,1)} + c_2 \Theta, \\ \widehat{T}^{r_i} &\rightarrow a_3 I + b_3 \widehat{T}^{(1,1)} + c_3 \Theta. \end{aligned}$$

Обозначим через $L_2^{x0}(X \otimes X)$ подпространство функций $g(x, y) \in L_2(X \otimes X, \mu \otimes \mu)$, зависящих только от одной переменной x , т.е.

$$g(x, y) = \phi(x) \in L_2^0(X, \mu).$$

Аналогичным образом определяется подпространство $L_2^{0y}(X \otimes X)$. Подпространство $L_2^{00}(X \otimes X)$ определяется как пространство функций $g(x, y) \in L_2(X \otimes X, \mu \otimes \mu)$, имеющих нулевое среднее по переменным x, y , т.е.

$$\int_X g_{x_0}(y) d\mu = 0, \quad \int_X g_{y_0}(x) d\mu = 0,$$

где $g_{x_0}(y): y \rightarrow g(x_0, y)$, и $g_{y_0}(x): x \rightarrow g(x, y_0)$.

Заметим, что имеет место ортогональное разложение

$$L_2^0(X \otimes X, \mu \otimes \mu) = L_2^{x0}(X \otimes X) \oplus L_2^{0y}(X \otimes X) \oplus L_2^{00}(X \otimes X).$$

Каждое из этих подпространств инвариантно относительно действия $\{\widehat{T}^z \otimes \widehat{T}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$.

Ограничение действия $\{\widehat{T}^z \otimes \widehat{T}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ на сумму $L_2^{x0}(X \otimes X)$ и $L_2^{0y}(X \otimes X)$ изоморфно сумме двух действий $\{\widehat{T}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ в пространстве $L_2^0(X, \mu)$. Это ограничение имеет однородный спектр кратности 2. Непрерывность спектра очевидным образом вытекает из наличия слабого предела вида

$$\widehat{T}^{p_i} \rightarrow aI + b\widehat{T}^z + c\Theta$$

при $c > 0$.

Ограничение действия $\{\widehat{T}^z \otimes \widehat{T}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ на $L_2^{00}(X \otimes X)$ изоморфно прямой сумме двух копий действия $\{\widehat{T}^z \odot \widehat{T}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$. Поэтому тут мы тоже получаем однородную кратность 2.

Осталось показать, что действия $\{\widehat{T}^z\}$ и $\{\widehat{T}^z \odot \widehat{T}^z\}$ как унитарные представления группы $\mathbb{Z}^2$ дизъюнкты, что равносильно отсутствию ненулевого оператора, сплетающего эти действия. Пусть для всех $z \in \mathbb{Z}^2$

$$J\widehat{T}^z = (\widehat{T}^z \otimes \widehat{T}^z)J.$$

Тогда при $m = (1, 0)$ (аналогично при $m = (0, 1)$) имеем

$$J(aI + b\widehat{T}^m) = [(aI + b\widehat{T}^m) \otimes (aI + b\widehat{T}^m)]J$$

и

$$[aI \otimes I + b\hat{T}^m \otimes \hat{T}^m - (aI + b\hat{T}^m) \otimes (aI + b\hat{T}^m)]J = 0$$

В спектральном представлении действие $T^{(1,0)}$ заменяется на умножение на переменную u (а $T^{(0,1)}$ – на w). Получим

$$[(a - a^2) + (b - b^2)u_1u_2 - ab(u_1 + u_2)]Jf = 0.$$

Отсюда находим однозначное решение $u_1 = \phi(u_2)$ уравнения

$$[(a - a^2) + (b - b^2)u_1u_2 - ab(u_1 + u_2)] = 0$$

(предположим, что оно существует). Аналогично $w_1 = \phi(w_2)$. Следовательно,

$$\|Jf\| = \|\chi_\Gamma Jf\|,$$

где Γ – график аналитического отображения $\phi \otimes \phi$. Так как $\sigma \times \sigma(\Gamma) = 0$ (спектральная мера действия непрерывна), получаем $Jf = 0$, $J = 0$.

Таким образом, наше исходное действие обладает однородным спектром кратности 2. Теорема 1 доказана.

3. Набор кратностей $\{2, 4\}$. Рассмотрим случай, когда $\mathbb{Z}^2$ -действие имеет набор кратностей $\{2, 4\}$.

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы вполне эргодическое $\mathbb{Z}^2$ -действие $\{R^z \otimes R^z \otimes T^z \otimes T^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ обладало набором спектральных кратностей $\{2, 4\}$, достаточно выполнение следующих условий:

- 1) действия $\{\hat{R}^z \odot \hat{R}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ и $\{\hat{T}^z \odot \hat{T}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ имеют простой спектр;
- 2) для некоторых последовательностей $\{w_i\}$, $\{u_i\}$ ($i \rightarrow \infty$) и некоторых чисел $a_j, b_j > 0$ и $j \in \{1, 2\}$ выполняется

$$\begin{cases} \hat{R}^{w_i} \rightarrow a_1 I + (1 - a_1)\Theta, \\ \hat{T}^{w_i} \rightarrow b_1 \hat{T}^{(1,0)} + (1 - b_1)\Theta, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \hat{R}^{u_i} \rightarrow a_2 I + (1 - a_2)\Theta, \\ \hat{T}^{u_i} \rightarrow b_2 \hat{T}^{(0,1)} + (1 - b_2)\Theta. \end{cases} \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U^z обозначает ограничение действия $\hat{R}^z \odot \hat{R}^z$ на пространство, ортогональное константам, а V_z обозначает $\hat{T}^z \otimes \hat{T}^z$. Действие $\{\hat{R}^z \otimes \hat{R}^z \otimes \hat{T}^z \otimes \hat{T}^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$ изоморфно

$$(\mathbf{1} + 2U^z) \otimes (\mathbf{1} + 2V^z) = \mathbf{1} + 2U^z + 2V^z + 4U^z \otimes V^z,$$

где $+$ обозначает прямую сумму операторов, $\mathbf{1}$ – тождественный оператор на одномерном пространстве (констант), $2U^z := U^z \oplus U^z$ и т.д. (подобные обозначения использовались в [6]).

Нам надо доказать, что действия U^z , V^z , $U^z \otimes V^z$ попарно спектрально дизъюнкты (унитарные представления дизъюнкты: нет ненулевого сплетения) и имеют простой спектр. Это автоматически приводит к очевидному набору кратностей $\{2, 4\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие

$$\{\widehat{T}_1^z \otimes \widehat{T}_1^z \otimes \widehat{T}_2^z \otimes \widehat{T}_2^z \otimes \dots \otimes \widehat{T}_k^z \otimes \widehat{T}_k^z\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$$

имеет набор кратностей $\{2, 4, 8, \dots, 2^k\}$, если действие

$$\{(\widehat{T}_1^z \odot \widehat{T}_1^z) \otimes (\widehat{T}_2^z \odot \widehat{T}_2^z) \otimes \dots \otimes (\widehat{T}_k^z \odot \widehat{T}_k^z)\}_{z \in \mathbb{Z}^2}$$

имеет простой спектр. Действительно, действие $\widehat{T}_i \otimes \widehat{T}_i$ в пространстве, ортогональном константам, изоморфно прямой сумме двух копий $V_i := \widehat{T}_i \odot \widehat{T}_i$ (что мы показали в п. 2); следовательно, мы можем применить лемму 4.

Слабые пределы обеспечивают и простоту спектра тензорного произведения

$$(\widehat{T}_1^z \odot \widehat{T}_1^z) \otimes \dots \otimes (\widehat{T}_k^z \odot \widehat{T}_k^z)$$

на пространстве $(L_2^0(\mu) \odot L_2^0(\mu))^{\otimes k}$ и дизъюнктность различных тензорных произведений, входящих в него сомножителей. Простота спектра доказывается по индукции методом предыдущего раздела. Для этого в качестве U рассматривается

$$(\widehat{T}_1^z \odot \widehat{T}_1^z) \otimes \dots \otimes (\widehat{T}_{k-1}^z \odot \widehat{T}_{k-1}^z),$$

а в качестве V – произведение $\widehat{T}_1^z \odot \widehat{T}_1^z$.

Слабые пределы подобраны так, чтобы было легко показать дизъюнктность произведений различных наборов тензорных квадратов. Докажем, например, дизъюнктность произведений $(\widehat{T}_1^z \otimes \widehat{T}_1^z) \otimes (\widehat{T}_2^z \otimes \widehat{T}_2^z)$ и $(\widehat{T}_2^z \otimes \widehat{T}_2^z) \otimes (\widehat{T}_3^z \otimes \widehat{T}_3^z)$. Если J сплетает произведения, т.е.

$$[(\widehat{T}_2^z \otimes \widehat{T}_2^z) \otimes (\widehat{T}_3^z \otimes \widehat{T}_3^z)]J = J[(\widehat{T}_1^z \otimes \widehat{T}_1^z) \otimes (\widehat{T}_2^z \otimes \widehat{T}_2^z)],$$

то, учитывая слабые сходимости $T_1^{w_n^3} \rightarrow a_1^3 I$, $T_2^{w_n^3} \rightarrow a_2^3 I$, $T_3^{w_n^3} \rightarrow a_3^3 T_3^{(1,0)}$, переходя к пределам, получим

$$(a_2^3)^2 (a_3^3)^2 [(I \otimes I) \otimes (T_3^{(1,0)} \otimes T_3^{(1,0)})]J = (a_1^3)^2 (a_2^3)^2 J.$$

Мы оказались в ситуации, когда $(I \otimes V)J = aJ$, где оператор V имеет непрерывный спектр; следовательно, оператор $(I \otimes V)$ также не имеет собственных векторов, тем самым, $J = 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. В. Аносов, “О спектральных кратностях в эргодической теории”, Совр. пробл. матем., **3**, МИАН, М., 2003, 3–85.
- [2] G. R. Goodson, “A survey of recent results in the spectral theory of ergodic dynamical systems”, *J. Dynam. Control Systems*, **5:2** (1999), 173–226.
- [3] A. I. Danilenko, “A survey on spectral multiplicities of ergodic actions”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **33:1** (2013), 81–117.
- [4] V. V. Ryzhikov, “Transformations having homogeneous spectra”, *J. Dynam. Control Systems*, **5:1** (1999), 145–148.
- [5] O. N. Ageev, “On ergodic transformations with homogeneous spectrum”, *J. Dynam. Control Systems*, **5:1** (1999), 149–152.

- [6] В. В. Рыжиков, “Спектральные кратности и асимптотические операторные свойства действий с инвариантной мерой”, *Матем. сб.*, **200**:12 (2009), 107–120.
- [7] A. Katok, M. Lemańczyk, “Some new cases of realization of spectral multiplicity function for ergodic transformations”, *Fund. Math.*, **206** (2009), 185–215.
- [8] A. I. Danilenko, M. Lemańczyk, “Spectral multiplicities for ergodic flows”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **33**:9 (2013), 4271–4289.
- [9] A. V. Solomko, “New spectral multiplicities for ergodic actions”, *Studia Math.*, **208**:3 (2012), 229–247.
- [10] В. В. Рыжиков, “Слабые пределы степеней, простой спектр симметрических произведений и перемешивающие конструкции ранга 1”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 137–159.
- [11] С. В. Тихонов, “Перемешивающие преобразования с однородным спектром”, *Матем. сб.*, **202**:8 (2011), 139–160.
- [12] А. М. Степин, “Спектральные свойства типичных динамических систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:4 (1986), 801–834.

Р. А. Конев

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: rodionk@inbox.ru

Поступило

24.12.2012

Исправленный вариант

09.04.2014

В. В. Рыжиков

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vryzh@mail.ru