Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Бияров, О спектре корректных сужений и расширений для оператора Лапласа, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 4, 507–516

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 18:14:26

О спектре корректных сужений и расширений для оператора Лапласа

Б. Н. Бияров

При изучении спектральных свойств операторов, порожденных дифференциальными уравнениями гиперболического типа или параболического типа с начальными данными Коши, как правило, получаются вольтерровы граничные задачи, которые являются корректными. Но пример Адамара доказывает, что задача Коши для уравнения Лапласа не корректна. До сих пор неизвестно ни одного вольтеррового корректного сужения или расширения для уравнений эллиптического типа. Тем самым, возникает вопрос: существует ли вольтерровое корректное сужение максимального оператора $\hat{L}$ или вольтерровое корректное расширение минимального оператора L_0 , порожденного оператором Лапласа? В данной работе доказана теорема для широкого класса корректных сужений максимального оператора $\hat{L}$ и корректных расширений минимального оператора L_0 , порожденных оператором Лапласа, о том, что они не могут быть вольтерровыми.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10192

1. Введение. Приведем ряд определений и условимся относительно некоторых обозначений и терминологии.

Пусть в гильбертовом пространстве H определен линейный оператор L с областью определения $D(L)$ и с областью значения $R(L)$. Ядром оператора L назовем множество

$$\text{Ker } L = \{f \in D(L) : Lf = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор L называется *сужением* оператора L_1 , а L_1 называется *расширением* оператора L , если

- 1) $D(L) \subset D(L_1)$,
- 2) $Lf = L_1f$ для всех f из $D(L)$.

При этом пишут $L \subset L_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Линейный замкнутый оператор L_0 в гильбертовом пространстве H называется *минимальным*, если $\overline{R(L_0)} \neq H$ и существует ограниченный обратный оператор L_0^{-1} на $R(L_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Линейный замкнутый оператор $\hat{L}$ в гильбертовом пространстве H называется *максимальным*, если $R(\hat{L}) = H$ и $\text{Ker } \hat{L} \neq \{0\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Линейный замкнутый оператор L в гильбертовом пространстве H называется *корректным*, если существует ограниченный обратный оператор L^{-1} , определенный на всем H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовем *корректным расширением* минимального оператора L_0 (*корректным сужением* максимального оператора $\hat{L}$), если $L_0 \subset L$ ($L \subset \hat{L}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Корректный оператор L в гильбертовом пространстве H назовем *граничным корректным* расширением минимального оператора L_0 относительно максимального оператора $\hat{L}$, если L является одновременно корректным сужением максимального оператора $\hat{L}$ и корректным расширением минимального оператора L_0 , т.е. $L_0 \subset L \subset \hat{L}$.

В начале 1950-х годов Вишик [1] распространил теорию самосопряженных расширений симметрического оператора фон Неймана–Крейна на несимметрические операторы в гильбертовом пространстве.

Затем Бицадзе и Самарский [2] обнаружили корректную задачу, которая не содержится среди задач, описанных Вишиком. Для обыкновенных дифференциальных уравнений такого типа задачи изучались Дезиным [3].

В начале 1980-х годов М. Отелбаевым и его учениками были доказаны абстрактные теоремы, которые позволяют описать все корректные расширения некоторого минимального оператора с помощью какого-либо одного известного корректного расширения в терминах обратного оператора. При этом такие расширения не обязаны быть сужениями максимального оператора. Аналогично описывались всевозможные корректные сужения некоторого максимального оператора, которые не обязаны быть расширениями минимального оператора (см. [4]). Задачи типа Бицадзе и Самарского охвачены этими описаниями.

Пусть $\hat{L}$ – максимальный линейный оператор в гильбертовом пространстве H , L – какое-либо известное корректное сужение оператора $\hat{L}$ и K – произвольный линейный ограниченный в H оператор, удовлетворяющий следующему условию:

$$R(K) \subset \text{Ker } \hat{L}. \quad (1.1)$$

Тогда оператор L_K^{-1} , определяемый формулой

$$L_K^{-1} f = L^{-1} f + K f, \quad (1.2)$$

описывает обратные к всевозможным корректным сужениям L_K максимального оператора $\hat{L}$, т.е. $L_K \subset \hat{L}$.

Пусть L_0 – минимальный оператор в гильбертовом пространстве H , L – какое-либо известное корректное расширение минимального оператора L_0 , K – линейный ограниченный в H оператор, удовлетворяющий условиям

- a) $R(L_0) \subset \text{Ker } K$,
- b) $\text{Ker}(L^{-1} + K) = \{0\}$,

тогда оператор L_K^{-1} , определенный формулой (1.2) описывает обратные к всевозможным корректным расширениям L_K минимального оператора L_0 .

Пусть L – какое-либо известное граничное корректное расширение минимального оператора L_0 , т.е. $L_0 \subset L \subset \hat{L}$. Существование хотя бы одного граничного корректного оператора L было доказано Вишиком [1]. Пусть K – линейный ограниченный в H оператор, удовлетворяющий условиям

- а) $R(L_0) \subset \text{Ker } K$,
 б) $R(K) \subset \text{Ker } \widehat{L}$,

тогда оператор L_K^{-1} , определяемый формулой (1.2), описывает обратные к всевозможным граничным корректным расширениям L_K минимального оператора L_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Ограниченный оператор A в гильбертовом пространстве H называется *квазинильпотентным*, если его спектральный радиус равен нулю, т.е. спектр состоит из единственной точки нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Оператор A в гильбертовом пространстве H называется *вольтерровым оператором*, если A компактен и квазинильпотентен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Корректное сужение L максимального оператора $\widehat{L}$, $L \subset \widehat{L}$, корректное расширение L минимального оператора L_0 , $L_0 \subset L$, или граничное корректное расширение L минимального оператора L_0 относительно максимального оператора $\widehat{L}$, $L_0 \subset L \subset \widehat{L}$, будем называть *вольтерровым*, если обратный оператор L^{-1} является вольтерровым оператором.

Обозначим через $\mathfrak{S}_\infty(H, H_1)$ множество всех линейных компактных операторов, действующих из гильбертова пространства H в гильбертово пространство H_1 . Если $T \in \mathfrak{S}_\infty(H, H_1)$, то T^*T является неотрицательным самосопряженным оператором из $\mathfrak{S}_\infty(H) \equiv \mathfrak{S}_\infty(H, H)$ и, более того, существует неотрицательный единственный самосопряженный корень $|T| = (T^*T)^{1/2}$ из $\mathfrak{S}_\infty(H)$. Собственные числа $\lambda_n(|T|)$ образуют монотонно сходящийся к нулю последовательность неотрицательных чисел. Их принято называть *s-числами* оператора T и обозначать через $s_n(T)$, $n \in \mathbb{N}$. Через $\mathfrak{S}_p(H, H_1)$ обозначается множество всех компактных операторов $T \in \mathfrak{S}_\infty(H, H_1)$, которые удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(T) < \infty, \quad 0 < p < \infty.$$

Понятно, что если $\text{rank } |T| = r < \infty$, то $s_n(T) = 0$, при $n = r + 1, r + 2, \dots$. Операторы конечного ранга, конечно, принадлежат классам $\mathfrak{S}_p(H, H_1)$ при всех $p > 0$.

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, рассмотрим минимальный L_0 и максимальный $\widehat{L}$ операторы, порожденные оператором Лапласа

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right). \quad (1.3)$$

Замыкание L_0 в пространстве $L_2(\Omega)$ оператора Лапласа (1.3) с областью определения $C_0^\infty(\Omega)$ называется *минимальным оператором, отвечающим оператору Лапласа*.

Оператор $\widehat{L}$, сопряженный к минимальному оператору L_0 , отвечающему оператору Лапласа, называется *максимальным оператором, отвечающим оператору Лапласа* (см. [5]). Заметим, что

$$D(\widehat{L}) = \{u \in L_2(\Omega) : \widehat{L}u = -\Delta u \in L_2(\Omega)\}.$$

Обозначим через L_D оператор, соответствующий задаче Дирихле, с областью определения

$$D(L_D) = \{u \in W_2^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Тогда в силу (1.2) обратные операторы L^{-1} к всевозможным корректным сужениям максимального оператора $\hat{L}$, соответствующего оператору Лапласа (1.3), имеют следующий вид:

$$u \equiv L^{-1}f = L_D^{-1}f + Kf, \quad (1.4)$$

где K – в силу (1.1) произвольный ограниченный в $L_2(\Omega)$ оператор с

$$R(K) \subset \text{Ker } \hat{L} = \{u \in L_2(\Omega) : -\Delta u = 0\}.$$

Тогда прямой оператор L определяется из следующей задачи:

$$\hat{L}u = f, \quad f \in L_2(\Omega), \quad (1.5)$$

$$D(L) = \{u \in D(\hat{L}) : (I - K\hat{L})u|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad (1.6)$$

где I – единичный оператор в $L_2(\Omega)$. Других линейных корректных сужений у оператора $\hat{L}$ не существуют (см. [6]).

Операторы $(L^*)^{-1}$, соответствующие операторам L^* ,

$$v \equiv (L^*)^{-1}g = L_D^{-1}g + K^*g, \quad (1.7)$$

описывают обратные к всевозможным корректным расширениям минимального оператора L_0 тогда и только тогда, когда K удовлетворяет (см. [6]) условию

$$\text{Ker}(L_D^{-1} + K^*) = \{0\}.$$

Заметим, что последнее условие эквивалентно следующему: $\overline{D(L)} = L_2(\Omega)$. Если от оператора K из (1.4) требовать дополнительное условие

$$KR(L_0) = \{0\},$$

то оператор L , соответствующий задаче (1.5), (1.6), окажется граничным корректным.

При изучении спектральных свойств операторов, порожденных дифференциальными уравнениями гиперболического типа или параболического типа с начальными данными Коши, как правило, получим вольтерровые граничные корректные задачи. Но пример Адамара доказывает, что задача Коши для уравнения Лапласа не корректна. До сих пор не известно ни одного вольтеррового корректного сужения или расширения для уравнений эллиптического типа. Тем самым, возникает вопрос: существует ли вольтерровое корректное сужение максимального оператора $\hat{L}$ или вольтерровое корректное расширение минимального оператора L_0 , порожденного оператором Лапласа (1.3)? Данная работа посвящена изучению этого вопроса.

2. Основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \geq 2$ и область определения корректного сужения L максимального оператора $\hat{L}$, соответствующего оператору Лапласа (1.3), удовлетворяет условию

$$D(L) \subset W_2^s(\Omega), \quad (2.1)$$

при некотором s , подчиненном условию $2(m-1)/m < s \leq 2$. Тогда оператор L^{-1} не является квазинильпотентным, т.е. L не может быть вольтерровым сужением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем компактность оператора L^{-1} . Из представления (1.4) видно, что компактность L^{-1} эквивалентна компактности K , так как L_D^{-1} компактен. Так же очевидна эквивалентность условий (2.1) следующему условию на K :

$$R(K) \subset W_2^l(\Omega), \quad \text{где вещественное число } l > \frac{2(m-1)}{m}.$$

Отсюда видно, что компактность оператора K обеспечена.

Пусть P означает оператор Пуассона, который соответствует решению следующей задачи:

$$-\Delta Pu = 0 \quad \text{на } \Omega, \quad \Gamma Pu \equiv (Pu)|_{\partial\Omega} = u,$$

где Γ – оператор взятия следа на границу $\partial\Omega$ области Ω . Известно, что P действует из $L_2(\partial\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ непрерывно и его сопряженный оператор P^* действует из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\partial\Omega)$. Композиция P^*P является (см. [7; п. 2.4]) эллиптическим положительным псевдодифференциальным оператором на $\partial\Omega$ порядка -1 .

Обозначим через $\tilde{K}$ оператор K , рассматриваемый как оператор, действующий из $L_2(\Omega)$ в $W_2^l(\Omega)$. Оператор $\tilde{K}$ замкнут. Следовательно, в силу теоремы Банаха $\tilde{K}$ является линейным ограниченным оператором.

Через $\tilde{\Gamma}$ обозначим оператор вложения $W_2^l(\Omega)$ в $L_2(\partial\Omega)$. Учитывая, что Kf – гармоническая функция, с помощью оператора Пуассона P , имеем

$$Kf = P\tilde{\Gamma}\tilde{K}f \quad \text{для любого } f \in L_2(\Omega).$$

Заметим (см. [8]), что

$$P^*P \in \mathfrak{S}_\alpha(L_2(\partial\Omega)) \quad \text{для любого } \alpha > m-1.$$

Тогда оператор Пуассона

$$P \in \mathfrak{S}_p(L_2(\partial\Omega), L_2(\Omega)) \quad \text{для любого } p > 2(m-1).$$

Пользуясь результатом Трибеля (см. [9; с. 15]), можно показать, что

$$\tilde{\Gamma} \in \mathfrak{S}_q(W_2^l(\Omega), L_2(\partial\Omega)) \quad \text{для любого } q > \frac{2l-1}{2(m-1)}.$$

Прежде чем воспользоваться результатами Трибеля, нам необходимо заметить, что Ω является d -множеством с $d = m$ и $\partial\Omega$ является d -множеством с $d = m-1$ (см. [10; с. 30]). Далее воспользуемся пропорциональностью меры Хаусдорфа и меры Лебега при целых размерностях по Хаусдорфу множества $E \subset \mathbb{R}^n$ (см. [11; с. 13]), т.е.

$$\mathcal{L}^n(E) = c_n \mathcal{H}^n(E), \quad \text{где } c_n = \frac{\pi^{n/2}}{(2^n(n/2))!}.$$

Теперь с помощью леммы 9 работы Данфорда и Шварца (см. [12; с. 256]) получим, что

$$K \in \mathfrak{S}_\alpha(L_2(\Omega), L_2(\Omega)) \quad \text{для любого } \alpha > \frac{m-1}{l}.$$

Далее для удобства приведем формулировки нескольких теорем Мацаева.

ТЕОРЕМА А (Мацаев [13; с. 267]). Пусть A – вольтерров оператор. Если его мнимая компонента A_{Im} принадлежит $\mathfrak{S}_p$, $1 < p < \infty$, то и его вещественная компонента A_{Re} принадлежит $\mathfrak{S}_p$ и, более того,

$$|A_{\text{Re}}|_p \leq \gamma_p |A_{\text{Im}}|_p,$$

где γ_p – константа, зависящая только от p .

ТЕОРЕМА В (Мацаев [13; с. 269]). Если вольтерров оператор A представим в виде

$$A = C + T,$$

где $T \in \mathfrak{S}_p$, $1/2 < p < 1$, а C – неотрицательный оператор, то $A \in \mathfrak{S}_p$, а значит, и $C \in \mathfrak{S}_p$ и, более того,

$$|C|_p \leq \gamma_p |T|_p,$$

где γ_p – константа, зависящая только от p .

ТЕОРЕМА С (Мацаев [13; с. 273]). Если в представлении $A = C + T$ вольтеррова оператора A оператор C неотрицателен, а оператор T принадлежит $\mathfrak{S}_p$ при некотором $p \leq 1/2$, то существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \lambda_n(C).$$

Теперь предположим противное. Пусть L^{-1} – вольтерров оператор. Тогда учитывая, что $L_D^{-1} \geq 0$ и

$$L_D^{-1} \in \mathfrak{S}_p(L_2(\Omega), L_2(\Omega)) \quad \text{для любого } p > \frac{m}{2},$$

получим противоречие вольтерровости оператора L^{-1} с

$$\text{Теоремой А,} \quad \text{если } K \in \mathfrak{S}_\alpha(L_2(\Omega), L_2(\Omega)), \quad 1 < \alpha < +\infty,$$

$$\text{Теоремой В,} \quad \text{если } K \in \mathfrak{S}_\alpha(L_2(\Omega), L_2(\Omega)), \quad \frac{1}{2} < \alpha \leq 1,$$

$$\text{Теоремой С,} \quad \text{если } K \in \mathfrak{S}_\alpha(L_2(\Omega), L_2(\Omega)), \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Тем самым, теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполнено условие теоремы 1, то корректные расширения (1.7) минимального оператора L_0 не могут быть вольтерровыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из того, что сопряженный к вольтерровому оператору тоже вольтерровый и сопряженные к корректным сужениям, рассматриваемым в теореме 1, окажутся корректными расширениями минимального оператора L_0 . Естественно, надо полагать, что $\text{Ker}(L_D^{-1} + K^*) = \{0\}$. Иначе область определения корректного сужения L максимального оператора $\hat{L}$ будет не плотным в $L_2(\Omega)$ множеством и сопряженный оператор не существует.

Заметим, что о гладкости $D(L^*)$ мы не можем утверждать ничего, так как $R(K^*)$ не обязана обладать гладкостью $R(K)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если K – конечномерный оператор в $L_2(\Omega)$, то нет вольтерровых сужений максимального оператора $\widehat{L}$ и нет вольтерровых расширений минимального оператора L_0 независимо от гладкости $D(L)$, т.е. в этом случае условие теоремы 1 может не выполняться.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из конечномерности оператора K следует, что

$$K \in \mathfrak{S}_\alpha(L_2(\Omega), L_2(\Omega)) \quad \text{для любого } \alpha > 0.$$

Если полагать, что оператор L^{-1} вольтерров, то сразу получим противоречие с теоремой С. При этом мы не воспользовались условием теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если оператор K представим в виде $K = K_1 + K_2$, где K_1 удовлетворяет условию теоремы 1, а K_2 – конечномерный оператор, то нет вольтерровых сужений у максимального оператора $\widehat{L}$ и нет вольтерровых расширений у минимального оператора L_0 .

СЛЕДСТВИЕ 4. Если оператор K удовлетворяет условию теоремы 1 и $KR(L_0) = \{0\}$, то вольтерровых граничных корректных расширений (т.е. таких $L_0 \subset L \subset \widehat{L}$) нет.

3. О вольтерровых корректных сужений и расширений в одномерном случае. При $m = 1$ в качестве одномерного аналога оператора Лапласа (1.3) рассмотрим в $L_2(0, 1)$ оператор

$$\widehat{L}y \equiv -y'' = f(x), \quad f \in L_2(0, 1),$$

которому соответствует минимальный оператор L_0 с областью определения $D(L_0) = \dot{W}_2^2(0, 1)$, максимальный оператор $\widehat{L}$ с областью определения $D(\widehat{L}) = W_2^2(0, 1)$. Тогда получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m = 1$. Тогда для корректных сужений L максимального оператора $\widehat{L}$, теорема 1 не верна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор K из представления (1.4) в одномерном случае является конечномерным, а оператор L_D , который соответствует задаче Дирихле, обладает обратным $L_D^{-1} \in \mathfrak{S}_p(L_2(0, 1))$ для любого $p > 1/2$. Отсюда видно, что в случае $m = 1$ предложенное в теореме 1 доказательство не проходит, так как противоречия с теоремой С не получается. Более того, корректные вольтерровые сужения можно явно построить. Обозначим через L_C корректное сужение, соответствующее задаче Коши, с областью определения

$$D(L_C) = \{y \in W_2^2(0, 1) : y(0) = 0, y'(0) = 0\}.$$

Обратный оператор

$$L_C^{-1}f = - \int_0^x (x-t)f(t) dt,$$

является вольтерровым. Это означает, что L_C – вольтерровое корректное сужение. Тем самым, теорема 2 доказана.

В одномерном случае существуют множество вольтерровых корректных сужений и расширений кроме задач Коши. Если брать в качестве фиксированного корректного сужения задачу Коши, то всевозможные корректные сужения L имеют обратные следующего вида:

$$L^{-1}f = - \int_0^x (x-t)f(t) dt + \int_0^1 f(t)\overline{\sigma_1(t)} dt + x \int_0^1 f(t)\overline{\sigma_2(t)} dt,$$

где пара функций $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ из $L_2(0,1)$ определяет всевозможные корректные сужения, т.е. определяет оператор K . Прямому оператору соответствует задача

$$\widehat{L}y \equiv -y'' = f(x), \quad f \in L_2(0,1), \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} y(0) = - \int_0^1 y''(t)\overline{\sigma_1(t)} dt, \\ y'(0) = - \int_0^1 y''(t)\overline{\sigma_2(t)} dt. \end{cases} \quad (3.2)$$

В работе [6] получен следующий критерий вольтерровости корректных сужений.

ТЕОРЕМА D (Бияров [6]). *Корректное сужение L , соответствующее задаче (3.1), (3.2), максимального оператора $\widehat{L}$ является вольтерровым тогда и только тогда, когда*

$$\int_x^1 \{ \sigma_2(t)[\sigma_1(t-x) + (t-x)] - \sigma_1(t)[\sigma_2(t-x) - 1] \} dt = 0, \quad (3.3)$$

при $0 \leq x \leq 1$, $\sigma_1(x), \sigma_2(x) \in L_2(0,1)$.

ПРИМЕР 1. В частности, при $\sigma_1(x) = 1 - x^2$, $\sigma_2(x) = 4x^2 - 2x - 2$ выполняется критерий вольтерровости (3.3). Тогда вольтерровая корректная задача выглядит так:

$$L_v y \equiv -y'' = f, \quad f \in L_2(0,1),$$

$$D(L_v) = \left\{ y \in W_2^2(0,1) : y(0) = -2 \int_0^1 y(t) dt, \quad y'(0) = 2y(0) + 2y(1) \right\},$$

и обратный оператор

$$y = L_v^{-1}f = - \int_0^x (x-t)f(t) dt + \int_0^1 f(t)(1-t^2) dt + x \int_0^1 f(t)(4t^2 - 2t - 2) dt.$$

Несмотря на то, что носитель ядра интегрального оператора есть весь квадрат $[0,1] \times [0,1]$, данное интегральное уравнение вольтерровое, т.е. спектральный радиус равен нулю.

ПРИМЕР 2. Корректное сужение, приведенное в теореме D, обладает неплотной областью определения тогда и только тогда, когда существует функция

$$\sigma(x) = c_1\sigma_1(x) + c_2\sigma_2(x) \quad \text{из } W_2^2(0,1),$$

$$\begin{cases} \sigma(1) = \sigma'(1) = 0, \\ \sigma(0) = c_1, \quad \sigma'(0) = -c_2. \end{cases}$$

Если исключить такие пары из числа определяющих пар $\sigma_1(x), \sigma_2(x) \in L_2(0, 1)$, то оператор L^* , сопряженный корректному сужению L из теоремы D, полностью описывает корректные расширения минимального оператора L_0 . Обратные к ним в силу (1.7) имеют вид

$$y \equiv (L^*)^{-1}f = \int_x^1 (x-t)f(t) dt + \sigma_1(x) \int_0^1 f(t) dt + \sigma_2(x) \int_0^1 tf(t) dt.$$

Сопряженный к вольтерровому оператору тоже вольтерровый. Поэтому критерий вольтерровости корректных сужений (3.3) одновременно является критерием вольтерровости корректных расширений L^* минимального оператора L_0 . В частности, при $\sigma_1(x) = 1 - x^2$, $\sigma_2(x) = 4x^2 - 2x - 2$ данное вольтерровое расширение имеет вид

$$L_v^* y \equiv -y''(x) - 4y(0) + 2y'(0) = f(x), \\ D(L_v^*) = \{y \in W_2^2(0, 1) : y(1) = 0, 2y(0) + y'(1) = 0\}.$$

Обратный к нему представляется в виде

$$y \equiv (L_v^*)^{-1}f = \int_x^1 (x-t)f(t) dt + (1-x^2) \int_0^1 f(t) dt + (4x^2 - 2x - 2) \int_0^1 tf(t) dt.$$

ПРИМЕР 3. В случае, когда L – граничное корректное, т.е. $L_0 \subset L \subset \widehat{L}$, всевозможные вольтерровые корректные исчерпываются следующими задачами:

$$Ly \equiv -y'' = f, \\ D(L) = \{y \in W_2^2(0, 1) : (1-\alpha)y(0) = \alpha y(1), (1-\alpha)y'(0) = -\alpha y'(1)\},$$

где α пробегает всю комплексную плоскость за исключением $\alpha = 1/2$ и $\alpha = \infty$. Обратные операторы примут вид

$$y \equiv L^{-1}f = - \int_0^x (x-t)f(t) dt + \frac{\alpha}{2\alpha-1} \int_0^1 (1-\alpha-t)f(t) dt + \alpha x \int_0^1 f(t) dt.$$

Автор выражает благодарность профессору А. А. Шкаликову за критические замечания и ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. И. Вишик, “Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений”, Тр. ММО, **1**, ГИТТЛ, М.–Л., 1952, 187–246.
- [2] А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, “О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задачах”, Докл. АН СССР, **185**:4 (1969), 739–740.
- [3] A. A. Dezin, *Partial Differential Equations. An Introduction to a General Theory of Linear Boundary Value Problems*, Springer Ser. Soviet Math., Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [4] Б. К. Кокебаев, М. Отелбаев, А. Н. Шыныбеков, “О расширениях и сужениях операторов в банаховом пространстве”, УМН, **37**:4 (1982), 116.
- [5] Л. Хёрмандер, *К теории общих дифференциальных операторов в частных производных*, ИЛ, М., 1959.
- [6] Б. Н. Бияров, *Спектральные свойства корректных сужений и расширений*, (LAP) LAMBERT Acad. Publ., Saarbrücken, 2012.

- [7] M. Engliš, “Analytic continuation of weighted Bergman kernels”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **94**:6 (2010), 622–650.
- [8] G. Grubb, “Singular Green operators and their spectral asymptotics”, *Duke Math. J.*, **51**:3 (1984), 477–528.
- [9] H. Triebel, “Approximation numbers in function spaces and the distribution of eigenvalues of some fractal elliptic operators”, *J. Approx. Theory*, **129**:1 (2004), 1–27.
- [10] A. Jonsson, H. Wallin, *Function Spaces on Subsets of $\mathbb{R}^n$* , Math. Rep., **2**, № 1, Harwood Acad. Publ., London, 1984.
- [11] K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge Tracts in Math., **85**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
- [12] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве*, ИЛ, М., 1966.
- [13] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.

Б. Н. Бияров

Евразийский национальный университет

им. Л. Н. Гумилева, г. Астана

E-mail: splinekz@mail.ru

Поступило

07.11.2012

Исправленный вариант

23.08.2013