Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Захаров, Т. В. Родионов, Естественность класса измеримых функций в смысле Лебега–Бореля–Хаусдорфа, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 4, 554–563

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 02:41:25

Естественность класса измеримых функций в смысле Лебега–Бореля–Хаусдорфа

В. К. Захаров, Т. В. Родионов

Хорошо известно, что семейство всех непрерывных функций на топологическом пространстве содержит постоянные функции и замкнуто относительно обычных поточечных операций (сложения, умножения, конечных супремума и инфимума, деления) и равномерной сходимости. Полное описание подобных семейств функций (*нормальных семейств*) было дано Э. Борелем, А. Лебегом и Ф. Хаусдорфом. Нормальными оказались в точности семейства всех функций, измеримых относительно мультипликативных σ -аддитивных семейств множеств. В 1914 г. Хаусдорф описал и *нормальную оболочку* произвольного семейства функций.

При замене равномерной сходимости на поточечную возникают понятия *вполне нормального семейства* и *вполне нормальной оболочки*. В 1977 г. Дж. Реголи описала все вполне нормальные семейства. Ими оказались в точности семейства всех функций, измеримых относительно σ -алгебр множеств. Кроме того, она описала вполне нормальную оболочку одного частного семейства функций.

В настоящей работе даются дескриптивное и несколько конструктивных описаний вполне нормальной оболочки произвольного семейства функций.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10194

Введение. Пусть T – множество, $F(T)$ – семейство всех функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{1}: T \rightarrow \{1\}$ – единичная функция, $\mathcal{G}$ – открытая топология на T , $C(T, \mathcal{G})$ – семейство всех непрерывных функций.

Весьма давно было установлено, что семейство $C(T, \mathcal{G}) \subset F(T)$ обладает следующими замечательными свойствами:

- 1) $C(T, \mathcal{G})$ содержит $\mathbf{1}$;
- 2) $C(T, \mathcal{G})$ замкнуто относительно умножения на действительные числа;
- 3) $C(T, \mathcal{G})$ замкнуто относительно сложения;
- 4) $C(T, \mathcal{G})$ замкнуто относительно операций $f \vee g$ и $f \wedge g$ таких, что $(f \vee g)(t) \equiv \max(f(t), g(t))$ и $(f \wedge g)(t) \equiv \min(f(t), g(t))$ для любого $t \in T$;
- 5) $C(T, \mathcal{G})$ замкнуто относительно умножения;
- 6) $C(T, \mathcal{G})$ замкнуто относительно равномерной сходимости функциональных последовательностей;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00417) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3682.2014.1).

- 7) $C(T, \mathcal{G})$ замкнуто относительно деления, т.е. для любой функции $f \in C(T, \mathcal{G})$ такой, что $f(t) \neq 0$ для всех $t \in T$, функция $1/f$ принадлежит $C(T, \mathcal{G})$.

Семейство функций $A(T) \subset F(T)$ со свойствами 2) и 3) называется *линейным $\mathbb{R}$ -пространством*, со свойствами 1)–4) – *решеточным линейным $\mathbb{R}$ -пространством с порядковой единицей*, со свойствами 1)–3) и 5) – *линейной $\mathbb{R}$ -алгеброй с мультипликативной единицей*, со свойствами 1)–5) – *решеточной линейной $\mathbb{R}$ -алгеброй с мультипликативной и порядковой единицей*. Семейство функций со всеми свойствами 1)–7) было названо Хаусдорфом *полным* (см. [1] и [2; 37.IX]). В работах [3], [4] оно было названо *нормальным*. Семейство $A(T)$ назовем *вполне нормальным*, если оно обладает еще и свойством

- 8) $A(T)$ замкнуто относительно поточечной сходимости последовательностей.

Разумеется, семейство $F(T)$ обладает свойством 8) и является вполне нормальным.

В связи с наличием таких полезных свойств у семейств $C(T, \mathcal{G})$ и $F(T)$ возникли два естественных вопроса:

- (i) *каковы все семейства функций на T , обладающие свойствами 1)–7), т.е. являющиеся нормальными?*
- (ii) *каковы все семейства функций на T , обладающие свойствами 1)–8), т.е. являющиеся вполне нормальными?*

Ответ на эти вопросы восходят к Э. Борелю, А. Лебегу и Хаусдорфу. Еще в начале XX в. Борелем и Лебегом был введен класс функций, позволивший дать ответы на эти вопросы, а именно *класс измеримых функций*. Дадим точные определения.

Всякое непустое семейство $\mathcal{S}$ подмножеств T назовем *ансамблем на T* . Функция $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ называется *$\mathcal{S}$ -измеримой функцией*, если $f^{-1}[G] \in \mathcal{S}$ для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}$. Семейство всех $\mathcal{S}$ -измеримых функций на T обозначим через $M(T, \mathcal{S})$. Ясно, что $C(T, \mathcal{G}) = M(T, \mathcal{G})$.

Мультипликативный (т.е. замкнутый относительно конечных пересечений) ансамбль, содержащий $\emptyset$ и T , называется *основой*, а *σ -аддитивная* (замкнутая относительно счетных объединений) основа называется *σ -основой* [4].

Именно с помощью класса измеримых функций Борелем и Лебегом были получены частичные ответы на вопросы (i) и (ii):

- *если ансамбль $\mathcal{S}$ является σ -основой, то семейство $M(T, \mathcal{S})$ нормально;*
- *если $\mathcal{S}$ является σ -алгеброй, то семейство $M(T, \mathcal{S})$ вполне нормально.*

Окончательный ответ на первый вопрос был дан Хаусдорфом в 1914 г. (см. [1] и [2; 37.IX, теорема VIII]). Он показал, что

- *класс всех нормальных семейств на множестве T в точности совпадает с классом всех семейств $M(T, \mathcal{S})$ для σ -основ $\mathcal{S}$.*

Теорема Хаусдорфа показала естественность класса измеримых функций.

По непонятным причинам после результата Хаусдорфа описание вполне нормальных семейств затянулось на длительный срок. Только в 1977 г. в работе Реголи [5] появилось их первое описание:

- *класс всех вполне нормальных семейств на множестве T в точности совпадает с классом всех семейств $M(T, \mathcal{S})$ для σ -алгебр $\mathcal{S}$.*

Теорема Реголи подтвердила естественность класса измеримых функций.

С вопросами (i) и (ii) тесно связаны также следующие вопросы:

- (iii) *какова нормальная оболочка семейства $A(T) \subset F(T)$, т.е. наименьшее нормальное семейство на T , содержащее $A(T)$?*

(iv) *какова вполне нормальная оболочка семейства $A(T) \subset F(T)$, т.е. наименьшее вполне нормальное семейство на T , содержащее $A(T)$?*

Ясно, что эти вопросы являются более сложными, чем соответствующие вопросы (i) и (ii).

Ответ на вопрос (iii) о виде *нормальной оболочки* $N(A(T))$ семейства $A(T)$ был также дан Ф. Хаусдорфом в 1914 г. (см. [1] и [2; 37.IX, теорема VII]) в терминах лебеговских множеств семейства $A(T)$.

Частичный ответ на вопрос (iv) о виде *вполне нормальной оболочки* $CN(A(T))$ семейства $A(T)$ был дан Реголи в той же работе [5]. Ее результат касается только семейств $A(T)$, обладающих свойствами 1)–4).

В настоящей работе дается полный ответ на вопрос (iv), т.е. описывается вполне нормальная оболочка *произвольного* семейства $A(T)$.

Для этого нам потребуются уточненные и дополненные формулировки упомянутых выше результатов. Этому посвящены пп. 1 и 2. При этом необходимые, но не доказываемые здесь утверждения, будем нумеровать буквами.

1. Теоремы Бореля, Лебега и Хаусдорфа. Если $\mathcal{S}$ – произвольный ансамбль на множестве T , то через $\mathcal{S}_\sigma$ обозначается ансамбль, состоящий из всех счетных объединений элементов из $\mathcal{S}$, а через $\mathcal{S}_\eta$ обозначается ансамбль, состоящий из всех конечных пересечений элементов из $\mathcal{S}$.

Для функции $f \in F(T)$ множество $\text{zer } f \equiv \{t \in T \mid f(t) = 0\}$ называется *нуль-множеством функции f* , а множество $\text{coz } f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\} = T \setminus \text{zer } f$ – *конуль-множеством функции f* (см., например, [6; гл. II, 6.5.5]). Поскольку $\text{coz } f = f^{-1}[]0, \infty[] \cup f^{-1}[] - \infty, 0[]$, множество $\text{coz } f$ можно также называть *основным двусторонним лебеговским множеством* (определения лебеговских множеств см. [2; 37.1]). Для семейства $A(T)$ ансамбль $\text{Coz } A(T) \equiv \{\text{coz } f \mid f \in A(T)\}$ называется *ансамблем конуль-множеств семейства $A(T)$* .

ТЕОРЕМА А. Пусть $A(T)$ – семейство функций на T . Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) семейство $A(T)$ является нормальным;
- (2) $A(T) = M(T, \mathcal{S})$ для некоторой σ -основы $\mathcal{S}$;
- (3) $A(T) = M(T, \{\emptyset, T\} \cup (\text{Coz } A(T))_{\eta\sigma})$.

Для произвольного семейства $A(T) \subset F(T)$ рассмотрим, следуя работе [3], *присоединенное семейство* $A(T)_*$, состоящее из всех функций $f \in F(T)$, имеющих вид

$$f = ((u - x\mathbf{1}) \vee \mathbf{0}) \wedge ((y\mathbf{1} - u) \vee \mathbf{0}), \quad \text{где } u \in A(T), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y.$$

ТЕОРЕМА В. Пусть $A(T)$ – семейство функций на T . Тогда его *нормальная оболочка* $N(A(T))$ совпадает с $M(T, \{\emptyset, T\} \cup (\text{Coz } A(T)_*)_{\eta\sigma})$.

Доказательства этих теорем в приведенных формулировках были даны в работе [3].

2. Дополненная теорема Реголи. Приведем теперь теорему Реголи с дополнительными дескриптивными характеристиками, позволяющими дать ряд новых конструктивных описаний вполне нормальной оболочки.

Для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ на множестве T рассмотрим его *коансамбль* $\mathcal{R} \equiv \text{co-}\mathcal{S}$, состоящий из всех множеств вида $T \setminus S$, где $S \in \mathcal{S}$. Ансамбль $\mathcal{S}$ называется

совершенным, если он содержит T и $\emptyset$, аддитивен (замкнут относительно конечных объединений) и $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}_\sigma$. Ансамбль $\mathcal{S}$ называется *отделимым*, если для любых двух непересекающихся множеств $R, R' \in \mathcal{R}$ найдутся содержащие их непересекающиеся множества $S, S' \in \mathcal{S}$. В хаусдорфовом топологическом случае это дает понятие нормального пространства.

Рассмотрим последовательность $(f_n \in F(T) \mid n \in \mathbb{N})$ и функцию $f \in F(T)$. Если для каждого $t \in T$ имеет место сходимость последовательности $(f_n(t) \mid n \in \mathbb{N})$ к числу $f(t)$, то будем писать $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \mathbb{N})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $A(T)$ удовлетворяет условиям 1)–4), то $\text{Coz } A(T)$ является отделимой совершенной основой. Если, кроме того, $A(T)$ удовлетворяет условию 8), то $\text{Coz } A(T)$ является σ -алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\text{Coz } A(T)$ через $\mathcal{S}$. Из условия 1) вытекает, что $T = \text{coz } \mathbf{1} \in \mathcal{S}$. С учетом условия 2) получаем, что $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{1} \in A(T)$. Поэтому $\emptyset = \text{coz } \mathbf{0} \in \mathcal{S}$.

Если $X, Y \in \mathcal{S}$, то $X = \text{coz } f$, $Y = \text{coz } g$ для некоторых $f, g \in A(T)$. Пользуясь условиями 2) и 4), заключаем, что $|f| = f \vee (-f) \in A(T)$ и $|g| = g \vee (-g) \in A(T)$. Тогда

$$\begin{aligned} X \cap Y &= \text{coz } |f| \cap \text{coz } |g| = \text{coz } (|f| \wedge |g|) \in \mathcal{S}, \\ X \cup Y &= \text{coz } |f| \cup \text{coz } |g| = \text{coz } (|f| \vee |g|) \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{S}$ является аддитивной основой.

Теперь пусть $X, Y \in \mathcal{R} \equiv \text{co-}\mathcal{S}$ и $X \cap Y = \emptyset$. Тогда $X = \text{zer } f$ и $Y = \text{zer } g$ для некоторых $f, g \in A(T)$. Рассмотрим функции

$$u \equiv |f| - |f| \wedge |g| \quad \text{и} \quad v \equiv |g| - |f| \wedge |g|,$$

лежащие в $A(T)$. Если $t \in X$, то $v(t) = |g(t)| \neq 0$. Поэтому $X \subset \text{coz } v \in \mathcal{S}$. Аналогично $Y \subset \text{coz } u \in \mathcal{S}$. Поскольку $u \wedge v = |f| \wedge |g| - |f| \wedge |g| = 0$, мы получаем $\text{coz } u \cap \text{coz } v = \emptyset$. Таким образом, основа $\mathcal{S}$ является отделимой.

Наконец, пусть $X \equiv \text{coz } f$, где $f \in A(T)$. Рассмотрим функции

$$g_n \equiv \left(\frac{1}{n}\right) \mathbf{1} - |f| \wedge \left(\frac{1}{n}\right) \mathbf{1} \in A(T).$$

Тогда $|f|^{-1}[[1/n, \infty[] = \text{zer } g_n \in \mathcal{R}$. Поэтому

$$X = \bigcup (\text{zer } g_n \mid n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{R}_\sigma$$

и основа $\mathcal{S}$ совершенна.

Теперь предположим, что $A(T)$ удовлетворяет еще и условию 8). Если $S \in \mathcal{S}$, то $S = \text{coz } f$, где $f \in A(T)$. Рассмотрим функции $f_n \equiv n|f| \wedge \mathbf{1} \in A(T)$, $n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $\chi(S) = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \mathbb{N})$. Поэтому $\chi(S) \in A(T)$. Следовательно, и функция $h \equiv \chi(S) - \mathbf{1}$ принадлежит $A(T)$. Тогда $T \setminus S = \text{coz } h \in \mathcal{S}$.

Осталось доказать, что $\mathcal{S}$ обладает σ -аддитивностью. Возьмем множества $S_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $S_n = \text{coz } f_n$, где $f_n \in A(T)$. Поэтому $S_n = \text{coz } |f_n| = \text{coz } 2^{-n}(|f_n| \wedge \mathbf{1})$. Определим функции

$$g_n \equiv \sum (2^{-k}(|f_k| \wedge \mathbf{1}) \mid 1 \leq k \leq n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для любого $t \in T$ последовательность $(g_n(t) \mid n \in \mathbb{N})$ возрастает и ограничена сверху, так как $g_n(t) \leq \sum (2^{-k} \mid 1 \leq k \leq n) < 2$. Поэтому существует $g = \text{p-lim}(g_n \mid n \in \mathbb{N}) \in A(T)$. Нетрудно заметить, что $\bigcup (S_k \mid 1 \leq k \leq n) = \text{coz } g_n$ и $\bigcup (S_n \mid n \in \mathbb{N}) = \text{coz } g \in \mathcal{S}$.

Для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ на множестве T обозначим через $\mathcal{B}(T, \mathcal{S})$ борелевскую σ -алгебру для $\mathcal{S}$ (борелевскую оболочку ансамбля $\mathcal{S}$), т.е. наименьшую σ -алгебру на T , содержащую $\mathcal{S}$.

Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на T . Функция $f \in F(T)$ называется $\mathcal{S}$ -ступенчатой функцией, если существуют такие конечные коллекции $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ и $(x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I)$, что $f = \sum (x_i \chi(S_i) \mid i \in I)$. Семейство $\mathcal{S}$ -ступенчатых функций на T обозначается через $\text{St}(T, \mathcal{S})$. Ясно, что в случае σ -алгебры $\mathcal{S}$ функция f принадлежит $\text{St}(T, \mathcal{S})$ тогда и только тогда, когда f принадлежит $M(T, \mathcal{S})$ и принимает только конечное число значений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А. Пусть $\mathcal{S}$ — σ -алгебра на T . Тогда для любой функции $f \in M(T, \mathcal{S})$ существует последовательность $(f_n \in \text{St}(T, \mathcal{S}) \mid n \in \mathbb{N})$ такая, что $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \mathbb{N})$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [7; § 6, предложение 7].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A(T)$ — семейство функций на множестве T . Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) семейство $A(T)$ вполне нормально;
- (2) семейство $A(T)$ обладает свойствами 1)–4) и 8) из введения;
- (3) семейство $A(T)$ обладает свойствами 1)–3), 5) и 8);
- (4) $A(T) = M(T, \mathcal{S})$ для некоторой σ -алгебры $\mathcal{S}$;
- (5) $\text{Coz } A(T)$ является σ -алгеброй и $A(T) = M(T, \text{Coz } A(T))$;
- (6) $A(T) = M(T, \mathcal{B}(T, \text{Coz } A(T)))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равносильность утверждений (1)–(4) была доказана в работе [5].

(1) $\vdash$ (5). По теореме А имеет место равенство $A(T) = M(T, \{\emptyset, T\} \cup (\text{Coz } A(T))_{\eta\sigma})$. В силу предложения 1 $\text{Coz } A(T)$ есть σ -алгебра, и потому $\{\emptyset, T\} \cup (\text{Coz } A(T))_{\eta\sigma} = \text{Coz } A(T)$. Следовательно, $A(T) = M(T, \text{Coz } A(T))$.

(5) $\vdash$ (6). Поскольку $\text{Coz } A(T)$ — σ -алгебра, имеем $\mathcal{B}(T, \text{Coz } A(T)) = \text{Coz } A(T)$.

(6) $\vdash$ (4). Эта дедукция очевидна.

(4) $\vdash$ (1). По теореме А семейство $A(T)$ нормально. Из леммы 4.2 работы [8] следует, что $A(T)$ замкнуто относительно поточечной сходимости.

(1) $\vdash$ (2). Эта дедукция очевидна.

(2) $\vdash$ (5). По предложению 1 ансамбль $\mathcal{S} \equiv \text{Coz } A(T)$ — σ -алгебра.

Сначала проверим, что $A(T) \subset M(T, \mathcal{S})$. Пусть $f \in A(T)$. Заметим, что $S \equiv f^{-1}[x, y[= \text{coz } g$ для функции

$$g \equiv ((f - x\mathbf{1}) \vee \mathbf{0}) \wedge ((y\mathbf{1} - f) \vee \mathbf{0}) \in A(T).$$

Действительно, если $x < f(t) < y$, то $g(t) = (f(t) - x) \wedge (y - f(t)) > 0$ и потому $t \in \text{coz } g$. А если $t \in \text{coz } g$, то $f(t) - x > 0$ и $y - f(t) > 0$, т.е. $x < f(t) < y$. Таким образом, $S \in \mathcal{S}$ и $f \in M(T, \mathcal{S})$.

Теперь убедимся, что и $M(T, \mathcal{S}) \subset A(T)$. Возьмем множество $S \in \mathcal{S}$ и функцию $g \equiv \chi(S)$. По определению $S = \text{coz } a$ для некоторой функции $a \in A(T)_+$. Тогда $g = \text{p-lim}(na \wedge 1 \mid n \in \mathbb{N}) \in A(T)$. Следовательно, $\text{St}(T, \mathcal{S}) \subset A(T)$. Пусть $f \in M(T, \mathcal{S})$. В силу предложения А $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ для некоторой последовательности $(f_n \in \text{St}(T, \mathcal{S}) \mid n \in \mathbb{N})$. Тогда по свойству 8) $f \in A(T)$.

(1) $\vdash$ (3). Эта дедукция очевидна.

(3) $\vdash$ (5). Сначала проверим, что $M(T, \mathcal{S}) \subset A(T)$. Возьмем множество $S \in \mathcal{S}$. По определению $S = \text{coz } a$ для некоторой функции $a \in A(T)$. Тогда $g_n \equiv (1 - a^2/n)^n \in A(T)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Будем далее использовать показательную функцию $\exp x \equiv e^x$ на $\mathbb{R}$. Рассмотрим функцию $g \equiv \exp(-a^2) \equiv \text{p-lim}(g_n \mid n \in \mathbb{N})$. По свойству 8) $g \in A(T)$. Поскольку $-a^2(t) < 0$ для всех $t \in S$ и $-a^2(t) = 0$ для всех $t \in T \setminus S$, то $0 < g(t) < 1$ для всех $t \in S$ и $g(t) = 1$ для $t \in T \setminus S$. Определим функцию $h \equiv \text{p-lim}(g^n \mid n \in \mathbb{N}) \in A(T)$. Она принимает значения $h(t) = 0$ для всех $t \in S$ и $h(t) = 1$ для всех $t \in T \setminus S$, т.е. $h = \chi(T \setminus S)$. Таким образом, $T \setminus S \in \mathcal{S}$ и, следовательно, $\mathcal{S}$ – σ -алгебра.

Взяв множества $S_n \equiv \text{coz } a_n \in \mathcal{S}$, и рассмотрев функцию

$$b = \text{p-lim}\left(\sum(2^{-k}(1 - \exp(-a_k^2)) \mid k \in n) \mid n \in \omega\right) \in A(T)$$

увидим, что $\bigcup(S \mid n \in \omega) = \text{coz } b \in \mathcal{S}$. Кроме того, $T = \text{coz } 1 \in \mathcal{S}$. Поэтому $\mathcal{S}$ – σ -алгебра.

Кроме того, $\chi(S) = 1 - h \in A(T)$. Следовательно, $\text{St}(T, \mathcal{S}) \subset A(T)$. Пусть $f \in M(T, \mathcal{S})$. В силу предложения А $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ для некоторой последовательности $(f_n \in \text{St}(T, \mathcal{S}) \mid n \in \mathbb{N})$. Тогда по свойству 8) $f \in A(T)$.

Теперь убедимся, что и $A(T) \subset M(T, \mathcal{S})$. Пусть $f \in A(T)$ и $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Положим $S \equiv f^{-1}[]x, y[)$ и $S' \equiv f^{-1}[[x, y]]$. Тогда имеем

$$S = \{t \in T \mid x < f(t) < y\} = \{t \in T \mid (f(t) - x)(y - f(t)) > 0\}, \\ S' \setminus S = \{t \in T \mid (f(t) - x)(y - f(t)) = 0\}.$$

Из свойств 1), 2), 3), 5) и 8) следует, что $g \equiv \exp((f - x1)(y1 - f)) \in A(T)$. Ясно, что $g(t) > 1$ для $t \in S$, $g(t) = 1$ для $t \in S' \setminus S$ и $0 < g(t) < 1$ для $t \in T \setminus S'$. Рассмотрим функцию

$$h \equiv \text{p-lim}(\exp(-g^n) \mid n \in \mathbb{N}) \in A(T).$$

Для нее имеем $h(t) = 0$ при $t \in S$, $h(t) = \exp(-1)$ при $t \in S' \setminus S$ и $h(t) = 1$ при $t \in T \setminus S'$. Таким образом, $T \setminus S = \text{coz } h \in \mathcal{S}$. Как было показано выше, $\mathcal{S}$ – σ -алгебра. Следовательно, $S \in \mathcal{S}$ и $f \in M(T, \mathcal{S})$.

3. Дескриптивное описание вполне нормальной оболочки. Теперь мы можем описать вполне нормальную оболочку $CN(A(T))$ произвольного семейства функций $A(T)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A(T)$ – семейство функций на множестве T . Тогда семейство $M(T, \mathcal{B}(T, \text{Coz } A(T)_*))$ будет вполне нормальной оболочкой $CN(A(T))$ семейства $A(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы В имеем

$$A(T) \subset N(A(T)) = M(T, \{\emptyset, T\} \cup (\text{Coz } A(T)_*)_{\eta\sigma}).$$

Из включения $\{\emptyset, T\} \cup (\text{Coz } A(T)_*)_{\eta\sigma} \subset \mathcal{B}(T, \text{Coz } A(T)_*)$ следует, что

$$A(T) \subset M(T, \mathcal{B}(T, \text{Coz } A(T)_*)) \equiv E(T).$$

По теореме 1 семейство $E(T)$ вполне нормально.

Пусть $B(T)$ – вполне нормальное семейство и $A(T) \subset B(T)$. Тогда из $\text{Coz } A(T)_* \subset \text{Coz } B(T)_*$ вытекает, что

$$E(T) \subset M(T, \mathcal{B}(T, \text{Coz } B(T)_*)).$$

Согласно лемме 4 из работы [4] семейство $B(T)_*$ совпадает с подсемейством $B_b(T)_+$ всех неотрицательных ограниченных функций из $B(T)$. Поэтому

$$\text{Coz } B(T)_* = \text{Coz } B_b(T)_+ = \text{Coz } B(T).$$

Следовательно, $E(T) \subset M(T, \mathcal{B}(T, \text{Coz } B(T)))$. Используя импликацию $(1) \vdash (6)$ из теоремы 1, мы заключаем, что $M(T, \mathcal{B}(T, \text{Coz } B(T))) = B(T)$ и, таким образом, $E(T) \subset B(T)$.

При дополнительных условиях на $A(T)$ это описание можно упростить.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $A(T) \subset F(T)$ удовлетворяет условиям 1)–4) из введения. Тогда его вполне нормальная оболочка $CN(A(T))$ совпадает с $M(T, \mathcal{B}(T, \text{Coz } A(T)))$.

Последнее описание можно извлечь также из [5].

Пользуясь результатами о сходимостном построении (классификации) семейства борелевских функций $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S}))$ из работы [8], выведем из приведенных выше дескриптивных описаний соответствующие конструктивные описания.

4. Конструктивное описание вполне нормальных семейств и оболочек.

Напомним некоторые понятия, обозначения и результаты из [8]. Через $\text{p-Lim } A(T)$ обозначается семейство всех функций $f \in F(T)$ таких, что $f = \text{p-lim}(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ для некоторой последовательности $(f_n \in A(T) \mid n \in \mathbb{N})$.

Определим возрастающую бэровскую коллекцию $(\text{Lim}_\alpha A(T) \mid \alpha \in \omega_1 + 1)$ семейства $A(T)$, полагая

$$\text{Lim}_0 A(T) \equiv A(T), \quad \text{Lim}_\alpha A(T) \equiv \text{p-Lim} \cup (\text{Lim}_\beta A(T) \mid \beta \in \alpha), \quad \alpha \in [1, \omega_1],$$

где ω_1 – первый несчетный ординал.

Рассмотрим также ансамбль $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$, состоящий из всевозможных симметризуемых множеств $K \subset T$ вида $K = \bigcap (S_i \cap R_i \mid i \in I)$ для конечных коллекций

$$(S_i \in \{T\} \cup \mathcal{S} \mid i \in I) \quad \text{и} \quad (R_i \in \{T\} \cup \text{co-}\mathcal{S} \mid i \in I)$$

(см. [8], [9]).

В работе [8] (следствие 1 теоремы 5.5) была дана общая сходимостная классификация борелевских функций в следующем виде.

ТЕОРЕМА С. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда

$$M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{K}(T, \mathcal{S})_\sigma).$$

Эта классификация позволяет от дескриптивных описаний, сделанных в теоремах 1 и 2 посредством не конструктивно определенного борелевского ансамбля $\mathcal{B}(T, \text{Coz } A(T))$, перейти к конструктивным описаниям в терминах указанной выше бэровской коллекции, примененной к некоторым простейшим нормальным семействам измеримых функций, связанным с семейством $A(T)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A(T)$ – семейство функций на множестве T . Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) семейство $A(T)$ вполне нормально;
- (2) $A(T) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{K}(T, \text{Coz } A(T))_\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\vdash$ (2). Обозначим $\mathcal{S} \equiv \text{Coz } A(T)$, $\mathcal{E} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})_\sigma$. Из теоремы 1 вытекает $A(T) = M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S}))$, а по теореме C имеем

$$M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{E}).$$

(2) $\vdash$ (1). В силу теоремы C получаем

$$M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{E}) = A(T).$$

Тогда по теореме 1 семейство $A(T)$ вполне нормально.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $A(T)$ – семейство функций на множестве T . Тогда семейство

$$\text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{K}(T, \text{Coz } A(T)_*))$$

будет вполне нормальной оболочкой $CN(A(T))$ семейства $A(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\text{Coz } A(T)_*$ через $\mathcal{S}$. В силу теоремы 2 мы имеем $CN(A(T)) = M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S}))$. Тогда по теореме C получаем, что $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \text{Lim}_{\omega_1} M(T, \mathcal{K}(T, \mathcal{S})_\sigma)$.

5. Тонкое конструктивное описание вполне нормальных семейств и оболочек. Расширение класса измеримых функций с помощью класса равномерных функций (см. [4], [10]) и результаты о тонкой сходимостной классификации борелевских функций из [11] позволяют “уточнить” теоремы 3 и 4, заменив в них семейства измеримых функций на более узкие семейства равномерных функций, и, тем самым, снять операцию счетного объединения $\mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}_\sigma$.

Для любого $S \subset T$ определим колебание функции f на множестве S как

$$\omega(f, S) \equiv \sup(|f(s) - f(t)| \mid s, t \in S).$$

Функция f называется *равномерной относительно ансамбля $\mathcal{S}$ на T* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное покрытие $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T , что $\omega(f, S_i) < \varepsilon$ для всех $i \in I$. Обозначим через $U(T, \mathcal{S})$ семейство всех функций, равномерных относительно $\mathcal{S}$.

Пусть $F_b(T)$ – семейство всех ограниченных функций на T , $M_b(T, \mathcal{S}) \equiv M(T, \mathcal{S}) \cap F_b(T)$. В [4] доказано, что для любого ансамбля $\mathcal{S}$ справедливы вложения

$$M_b(T, \mathcal{S}) \subset U(T, \mathcal{S}) \subset M_b(T, \mathcal{S}_\sigma).$$

Отсюда следует, что для σ -аддитивных ансамблей $\mathcal{S}$ семейства ограниченных измеримых функций и равномерных функций совпадают. В работах [3] и [4] доказано, что для любой основы $\mathcal{S}$ семейство $U(T, \mathcal{S})$ обладает свойствами 1)–6) и свойством

7') $U(T, \mathcal{S})$ замкнуто относительно *ограниченного деления*, т.е. для любой функции $f \in U(T, \mathcal{S})$, такой что $f(t) \neq 0$ для всех $t \in T$ и $1/f \in F_b(T)$, функция $1/f$ принадлежит $U(T, \mathcal{S})$.

Иначе говоря, $U(T, \mathcal{S})$ является *ограниченно нормальным*.

ТЕОРЕМА D. Пусть $\mathcal{S}$ – ансамбль на множестве T . Тогда

$$M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \text{Lim}_{\omega_1} U(T, \mathcal{K}(T, \mathcal{S})).$$

Этот результат доказан в [11] (следствие 1 теоремы 3). С его помощью мы получаем следующее тонкое описание вполне нормальных семейств.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A(T)$ – семейство функций на множестве T . Тогда следующие утверждения равносильны:

- (1) семейство $A(T)$ вполне нормально;
- (2) $A(T) = \text{Lim}_{\omega_1} U(T, \mathcal{K}(T, \text{Coz } A(T)))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\vdash$ (2). Обозначим $\mathcal{S} \equiv \text{Coz } A(T)$, $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(T, \mathcal{S})$. По теореме 1 $A(T) = M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S}))$, а в силу теоремы D имеем

$$M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \text{Lim}_{\omega_1} U(T, \mathcal{K}).$$

(2) $\vdash$ (1). По теореме D

$$M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \text{Lim}_{\omega_1} U(T, \mathcal{K}) = A(T).$$

Тогда согласно теореме 1 семейство $A(T)$ вполне нормально.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $A(T)$ – семейство функций на множестве T . Тогда его вполне нормальная оболочка $CN(A(T))$ совпадает с $\text{Lim}_{\omega_1} U(T, \mathcal{K}(T, \text{Coz } A(T)_*))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\text{Coz } A(T)_*$ через $\mathcal{S}$. Из теоремы 2 вытекает равенство $CN(A(T)) = M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S}))$. Тогда по теореме D имеем $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \text{Lim}_{\omega_1} U(T, \mathcal{K}(T, \mathcal{S}))$.

При дополнительных условиях на $\mathcal{S}$ в теореме D можно сузить исходное семейство $U(T, \mathcal{K}(T, \mathcal{S}))$ до $U(T, \mathcal{S})$, а именно, справедливо следующее утверждение, доказанное в [11] (следствие 2 теоремы 3).

ТЕОРЕМА E. Пусть $\mathcal{S}$ – отделимая совершенная основа на множестве T . Тогда

$$M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \text{Lim}_{\omega_1} U(T, \mathcal{S}).$$

Это позволяет при дополнительных условиях на $A(T)$ получить более простое конструктивное описание вполне нормальной оболочки.

ТЕОРЕМА 7. Пусть семейство функций $A(T)$ обладает свойствами 1)–4) из введения. Тогда

$$CN(A(T)) = \text{Lim}_{\omega_1} U(T, \text{Coz } A(T)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathcal{S} \equiv \text{Coz } A(T)$. В силу следствия 1 теоремы 2 имеем $CN(A(T)) = M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S}))$. Из предложения 1 вытекает, что $\mathcal{S}$ является отделимой совершенной основой. Тогда по теореме E получаем $M(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{S})) = \text{Lim}_{\omega_1} U(T, \mathcal{S})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig, 1914.
- [2] Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, УРСС, М., 2004.
- [3] В. К. Захаров, “Теоремы Хаусдорфа об измеримых функциях и новый класс равномерных функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. мех.*, 2008, № 1, 3–8.
- [4] В. К. Захаров, Т. В. Родионов, “Класс равномерных функций и его соотношение с классом измеримых функций”, *Матем. заметки*, **84**:6 (2008), 809–824.
- [5] G. Regoli, “Some characterization of sets of measurable functions”, *Amer. Math. Monthly*, **84**:6 (1977), 455–458.
- [6] Z. Semadeni, *Banach Spaces of Continuous Functions*, Vol. 1, Monografie Matematyczne, **55**, PWN, Warszawa, 1971.
- [7] N. Dinculianu, *Vector Measures*, Oxford Univ. Press, London, 1967.
- [8] В. К. Захаров, Т. В. Родионов, “Классификация борелевских множеств и функций на произвольном пространстве”, *Матем. сб.*, **199**:6 (2008), 49–84.
- [9] В. К. Захаров, “Классификация борелевских множеств и функций для произвольного пространства”, *Докл. РАН*, **385**:5 (2002), 596–598.
- [10] В. К. Захаров, “Новые классы функций, связанные с общими семействами множеств”, *Докл. РАН*, **407**:2 (2006), 167–171.
- [11] V. K. Zakharov, T. V. Rodionov, “A fine correlation between Baire and Borel functional hierarchies”, *Acta Math. Hungar.*, **142**:2 (2014), 384–402.

В. К. Захаров

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: zakharov_valeriy@list.ru

Поступило

13.01.2013

Исправленный вариант

05.07.2013

Т. В. Родионов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: rodionovtv@mail.ru