Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Бичегкуев, Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах функций, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 18–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:46:38

Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах функций

М. С. Бичегкуев

В банаховых пространствах векторных функций, определяемых с помощью весовой функции предэкспоненциального роста изучаются спектральные свойства операторов, построенных по некоторому семейству эволюционных операторов. В терминах экспоненциальной дихотомии получены необходимые и достаточные условия обратимости рассматриваемых операторов. Доказана теорема об отображении спектра для полугрупп разностных операторов Хоулэнда, генератором которой является исследуемый оператор.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10195

1. Введение. Пусть X – комплексное банахово пространство, $LB(X)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Символом $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ обозначим одно из следующих банаховых пространств: $C_b = C_b(\mathbb{R}, X)$ – банахово пространство непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$; $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ – замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций в $C_b(\mathbb{R}, X)$; $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$ – замкнутое подпространство из $C_{b,u}$ убывающих на бесконечности функций $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$; $L^p = L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, – банахово пространство измеримых (по Бохнеру) суммируемых со степенью p функций, действующих из $\mathbb{R}$ в X , с нормой

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p dt \right)^{1/p}.$$

Пусть $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ – весовая функция (вес), которая считается непрерывной. Символом $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство функций $x: \mathbb{R} \rightarrow X$ таких, что $x/\alpha \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, с нормой $\|x\|_\alpha = \|x/\alpha\|_{\mathcal{F}}$. В частности, если $\mathcal{F} = C_{b,u}$, то норма в пространстве $\mathcal{F}_\alpha = (C_{b,u})_\alpha$ определяется формулой

$$\|x\|_{\infty, \alpha} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|x(t)\|}{\alpha(t)}, \quad x \in (C_{b,u})_\alpha.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00378).

В банаховом пространстве $L_\alpha^p = L_\alpha^p(\mathbb{R}, X) = (L^p(\mathbb{R}, X))_\alpha$, $p \in [1, \infty)$, норма определяется равенством

$$\|x\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\|x(t)\|^p}{\alpha^p(t)} dt \right)^{1/p}, \quad x \in L_\alpha^p.$$

Отметим, что из определения пространств следует, что $\mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, если $\alpha = 1$.

Отображение $\mathcal{U}: \Delta_{\mathbb{R}} = \{(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : s \leq t\} \rightarrow LB(X)$ называется *семейством эволюционных операторов* (“*вперед*”), если выполнены следующие условия:

- 1) $\mathcal{U}(t, t) = I$ – тождественный оператор для любого $t \in \mathbb{R}$;
- 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$ для всех $\tau \leq s \leq t$ из $\mathbb{R}$;
- 3) $\sup_{0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| = K < \infty$;
- 4) семейство $\mathcal{U}$ сильно непрерывно, т.е. для любого элемента $x \in X$ функция $(t, s) \mapsto \mathcal{U}(t, s)x: \Delta_{\mathbb{R}} \rightarrow X$ непрерывна.

Эволюционное семейство операторов естественным образом появляется в связи с представлением решений абстрактной задачи Коши

$$x(s) = x_0 \in D(A(s)), \quad s \leq t, \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

для дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (2)$$

в предположении, что область определения $D(A(s))$ оператора $A(s)$ плотна в X для каждого $s \in \mathbb{R}$.

Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_{\mathbb{R}} \rightarrow LB(X)$ решает *абстрактную задачу Коши* (1), (2), если для любого $s \in \mathbb{R}$ существует плотное в X подпространство X_s из $D(A(s))$ такое, что для каждого $x_0 \in X_s$ функция $x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s)$ дифференцируема при всех $t \geq s$, $x(t) \in D(A(t))$ и выполнены равенства (1), (2).

По заданному семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_{\mathbb{R}} \rightarrow LB(X)$ построим линейный оператор

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}) \subset \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X) = \mathcal{F}_\alpha$$

(в случае $\alpha = 1$ он будет обозначаться символом $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$).

Область определения $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha})$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}$ определяется следующим образом: непрерывная функция $x \in \mathcal{F}_\alpha$ включается в $D(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha})$, если существует функция $f \in \mathcal{F}_\alpha$ такая, что для всех $s \leq t$ из $\mathbb{R}$ имеет место равенство

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau. \quad (3)$$

При этом полагается $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}x = f$. Отметим единственность функции f , т.е. корректность определения оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}$.

Такое определение оператора в невесовых пространствах использовалось в статье [1], а в весовых – в статье [2].

В данной работе предполагается, что весовая функция (вес) удовлетворяет трем условиям:

$$\sup_{|t-s| \leq 1} \frac{\alpha(s)}{\alpha(t)} < \infty, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sup_{s \in \mathbb{R}} \frac{\alpha(s-t)}{\alpha(s)} = 0, \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sup_{s \in \mathbb{R}} \frac{\alpha(s)}{\alpha(s-t)} = 0. \quad (6)$$

Если выполнены условия (5) и (6), то вес назовем *допустимым* или *весом предэкспоненциального роста*. Отметим, что если α – допустимый вес, то и вес $\alpha^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, также является допустимым.

Примером такого веса являются функции вида: $\alpha_1(t) = (1 + |t|)^\omega$, $t \in \mathbb{R}$, где ω – некоторое фиксированное число из $\mathbb{R}$; $\alpha_2(t) = \exp(c|t|^a)$, $t \in \mathbb{R}$, a – некоторое число из интервала $(0, 1)$ и $c \in \mathbb{R}$.

Условие (4) и непрерывность весовой функции α позволяют заключить, что семейство операторов вида

$$\tilde{\mathcal{U}}(t, s) = \frac{\alpha(s)}{\alpha(t)} \mathcal{U}(t, s), \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad s \leq t, \quad (7)$$

образует эволюционное семейство операторов из алгебры $LB(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_{\mathbb{R}} \rightarrow LB(X)$ допускает *экспоненциальную дихотомию* на $\mathbb{R}$, если существует ограниченная сильно непрерывная проекторнозначная функция $P: \mathbb{R} \rightarrow LB(X)$ и постоянные $M, \gamma > 0$ такие, что выполнены следующие свойства:

- 1) $\mathcal{U}(t, s)P(s) = P(t)\mathcal{U}(t, s)$ для всех $t \geq s$, $t, s \in \mathbb{R}$;
- 2) $\|\mathcal{U}(t, s)P(s)\| \leq M \exp(-\gamma(t-s))$, $t \geq s$, $t, s \in \mathbb{R}$;
- 3) для $t > s$ сужение $\mathcal{U}_{t,s}: X'(s) \rightarrow X'(t)$ оператора $\mathcal{U}(t, s)$ на область значений $X'(s) = \text{Im } Q(s)$ дополнительного проектора $Q(s) = I - P(s)$ есть изометрический изоморфизм подпространств $X'(s)$ и $X'(t)$, т.е. оператор $\mathcal{U}(s, t) \in LB(X)$ при $s < t$ равен оператору $\mathcal{U}_{t,s}^{-1}$ на $X'(t)$ и равен нулю на подпространстве $X(t) = \text{Im } P(t) \subset X$;
- 4) $\|\mathcal{U}(s, t)\| \leq M \exp(\gamma(s-t))$ для всех $t \geq s$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Пару проекторнозначных функций P и Q из определения 1 называют *расщепляющей парой* для семейства эволюционных операторов $\mathcal{U}$. Если $P = 0$ или $Q = 0$, то говорят, что для $\mathcal{U}$ имеет место тривиальная дихотомия.

Приведем основные результаты статьи.

ТЕОРЕМА 1. Оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}, \alpha}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}, \alpha}) \subset \mathcal{F}_{\alpha} \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha}$ является генератором сильно непрерывной полугруппы разностных операторов

$$(T_{\mathcal{U}, \alpha}(t)x)(s) = \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathcal{F}_{\alpha},$$

где банахово пространство $\mathcal{F}_{\alpha} \in \{L_{\alpha}^p, p \in [1, \infty); (C_0)_{\alpha}\}$.

ТЕОРЕМА 2. Спектр $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha})$ оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}$ и спектры $\sigma(T_{\tilde{\mathcal{U}}}(t))$, $\sigma(T_{\mathcal{U},\alpha}(t))$ разностных операторов $T_{\tilde{\mathcal{U}}}(t) \in LB(\mathcal{F}_\alpha)$, $T_{\mathcal{U},\alpha}(t) \in LB(\mathcal{F}_\alpha)$ соответственно связаны равенствами

$$\sigma(T_{\mathcal{U},\alpha}(t)) \setminus \{0\} = \sigma(T_{\tilde{\mathcal{U}}}(t)) \setminus \{0\} = \{\exp \lambda t : \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}})\} = \{\exp \lambda t : \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha})\}. \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть α – допустимый вес. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) линейный оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}) \subset \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X) = \mathcal{F}_\alpha$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию;
- 2) спектр $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha})$ не зависит от выбора пространства $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X)$.

Если семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию, то обратный к $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}$ оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}^{-1} \in LB(\mathcal{F}_\alpha)$ определяется формулой

$$(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}^{-1}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t,s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{F}_\alpha, \quad (9)$$

где функция Грина $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow LB(X)$ имеет вид

$$G(t,s) = \begin{cases} -\mathcal{U}(t,s)P(s), & s \leq t, \\ \mathcal{U}(t,s)Q(s), & s > t. \end{cases}$$

Отметим, что соответствующие теоремам 1–3 результаты можно получить для операторов, определенных семейством эволюционных операторов

$$\mathcal{U} : \triangle_{\overline{\mathbb{R}}_+} = \{(t,s) \in \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ : s \leq t\} \rightarrow LB(X), \quad \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty),$$

и действующих в весовом банаховом пространстве, где вес $\alpha : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (4)–(6). При этом используются результаты статей [3]–[10] (см. также монографию [11], содержащую обзор результатов по теории дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами). Статья [12] посвящена изучению дифференциального оператора на полуоси в весовом пространстве в случае конечномерного пространства X . Следует отметить также статью [13], где изучаются дифференциальные операторы в невесовых пространствах, многие результаты которой (особенно теорема 1.13) могут быть распространены на рассматриваемый нами дифференциальный оператор в весовых пространствах.

Из статей [2], [14] следует, что если опустить условия (5), (6) на вес α , то спектр дифференциального оператора $\mathcal{L} = -d/dt + A : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X) = \mathcal{F}_\alpha$ может существенно отличаться от спектра оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}$. Здесь $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ – генератор сильно непрерывной полугруппы операторов $T : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow LB(X)$ и $\mathcal{U}(t,s) = T(t-s)$, $s \leq t$.

2. Вспомогательные сведения. Два линейных оператора

$$\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{X}_i, \quad i = 1, 2,$$

где $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ – комплексные банаховы пространства, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый (т.е. инъективный и сюръективный одновременно) линейный ограниченный оператор $\mathcal{V} : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ такой, что

$$\mathcal{V}(D(\mathcal{A}_1)) = D(\mathcal{A}_2), \quad \mathcal{V}\mathcal{A}_1x = \mathcal{A}_2\mathcal{V}x, \quad x \in D(\mathcal{A}_1). \quad (10)$$

Оператор $\mathcal{V}$ называется *оператором преобразования* $\mathcal{A}_1$ в $\mathcal{A}_2$. Ясно, что оператор $\mathcal{V}^{-1}$ является оператором преобразования $\mathcal{A}_2$ в $\mathcal{A}_1$, что следует из равенств (10). Кроме того, из равенств

$$(\mathcal{A}_2 - \lambda I)\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{A}_1 - \lambda I), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

вытекает, что непрерывная обратимость одного из операторов $\mathcal{A}_1 - \lambda I$, $\mathcal{A}_2 - \lambda I$ влечет непрерывную обратимость другого, причем

$$(\mathcal{A}_1 - \lambda I)^{-1}\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}^{-1}(\mathcal{A}_2 - \lambda I)^{-1}. \quad (11)$$

Следовательно, имеют место равенства

$$\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2), \quad \rho(\mathcal{A}_1) = \rho(\mathcal{A}_2)$$

для спектров $\sigma(\mathcal{A}_k)$, $k = 1, 2$, а значит, и для резольвентных множеств $\rho(\mathcal{A}_k)$, $k = 1, 2$, подобных операторов $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$. Равенства (11) можно переписать также в виде

$$R(\lambda, \mathcal{A}_1) = \mathcal{V}^{-1}R(\lambda, \mathcal{A}_2)\mathcal{V}, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}_1) = \rho(\mathcal{A}_2), \quad (12)$$

где отображение

$$R(\cdot, \mathcal{A}_k): \rho(\mathcal{A}_k) \rightarrow LB(\mathcal{X}_k), \quad R(\lambda_k, \mathcal{A}_k) = (\mathcal{A}_k - \lambda I)^{-1},$$

резольвента оператора $\mathcal{A}_k$, $k = 1, 2$.

Символом V_α обозначим линейный оператор

$$V_\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_\alpha, \quad (V_\alpha x)(t) = \alpha(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X),$$

который осуществляет изометрический изоморфизм пространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_\alpha$.

ЛЕММА 1. *Оператор*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}, \alpha}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}, \alpha}) \subset \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X),$$

действующий в весовом пространстве $\mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X)$, подобен оператору

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}: D(\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X),$$

построенному по семейству эволюционных операторов (7). При этом имеет место равенство

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}V_\alpha^{-1} = V_\alpha^{-1}\mathcal{L}_{\mathcal{U}, \alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, f \in \mathcal{F}_\alpha$ таковы, что имеет место равенство (3). Это равенство перепишем в виде

$$(V_\alpha^{-1}x)(t) = \frac{x(t)}{\alpha(t)} = \tilde{\mathcal{U}}(t, s)(V_\alpha^{-1}x)(s) - \int_s^t \tilde{\mathcal{U}}(t, \tau)(V_\alpha^{-1}f)(\tau) d\tau.$$

Следовательно, $x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}, \alpha})$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}, \alpha}x = f$ тогда и только тогда, когда $V_\alpha^{-1}x \in D(\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}})$ и $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}V_\alpha^{-1}x = V_\alpha^{-1}\mathcal{L}_{\mathcal{U}, \alpha}x$. Лемма доказана.

Таким образом, изучение оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}$, действующего в весовом пространстве $\mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X)$, сводится к изучению оператора $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}$, действующего в невесовом пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Далее используется следующая

ТЕОРЕМА 4 [1]. *Оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ является генератором сильно непрерывной полугруппы разностных операторов Хоулэнда вида*

$$(T_{\mathcal{U}}(t)x)(s) = \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, X),$$

в банаховом пространстве $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$, совпадающим с одним из банаховых пространств $L^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, $C_0(\mathbb{R}, X)$.

3. Доказательство основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Непосредственно проверяется, что полугруппа $T_{\mathcal{U},\alpha}$ подобна полугруппе $T_{\tilde{\mathcal{U}}}: \mathbb{R} \rightarrow LB(\mathcal{F})$ операторов. Это означает выполнение равенств

$$T_{\tilde{\mathcal{U}}}(t) = V_\alpha^{-1} T_{\mathcal{U},\alpha}(t) V_\alpha, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Действительно, для любой функции $x \in \mathcal{F}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} (V_\alpha^{-1} T_{\mathcal{U},\alpha}(t) V_\alpha x)(s) &= \frac{1}{\alpha(s)} \mathcal{U}(s, s-t) \alpha(s-t) x(s-t) \\ &= \tilde{\mathcal{U}}(s, s-t) x(s-t) = (T_{\tilde{\mathcal{U}}}(t)x)(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Из теоремы 4 следует, что оператор $L_{\tilde{\mathcal{U}}}$ является генератором полугруппы разностных операторов. Теперь из леммы 1 и равенства

$$T_{\mathcal{U},\alpha}(t) = V_\alpha T_{\tilde{\mathcal{U}}}(t) V_\alpha^{-1}, \quad t \geq 0,$$

вытекающего из (13), получаем, что оператор $L_{\mathcal{U},\alpha}$ является генератором полугруппы операторов $T_{\mathcal{U},\alpha}$. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Равенство

$$\sigma(T_{\tilde{\mathcal{U}}}(t)) \setminus \{0\} = \{\exp \lambda t : \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}})\}$$

было установлено в теореме 2 из статьи [1] (случай невесовых пространств). Поскольку оператор $T_{\mathcal{U},\alpha}(t)$ подобен оператору $T_{\tilde{\mathcal{U}}}(t)$ (см. равенства (13)), а из леммы 1 следует подобие операторов $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}$ и $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}$, то

$$\sigma(T_{\mathcal{U},\alpha}(t)) = \sigma(T_{\tilde{\mathcal{U}}}(t)), \quad \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}) = \sigma(\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}).$$

Следовательно, имеют место равенства (8). Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Отметим, что утверждение 1) теоремы 4 в случае невесового пространства получено в статье [1]. Согласно лемме 1 оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}$ подобен оператору $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}: D(\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) = \mathcal{F}$, где семейство эволюционных операторов $\tilde{\mathcal{U}}$ имеет вид (7). Следовательно, оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}$ непрерывно обратим

тогда и только тогда, когда непрерывно обратим $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}$. В силу отмеченного он обратим в том и только в том случае, когда семейство операторов $\tilde{\mathcal{U}}$ допускает экспоненциальную дихотомию. Докажем, что семейство $\tilde{\mathcal{U}}$ обладает этим свойством $\mathcal{U}$. Пусть семейство $\mathcal{U}$ обладает свойством экспоненциальной дихотомии с расщепляющей парой проекторнозначных функций (далее используются обозначения из определения 1). Тогда в виду скалярности функции α для семейства

$$\tilde{\mathcal{U}}(t, s) = \frac{\alpha(s)}{\alpha(t)} \mathcal{U}(t, s), \quad s \leq t,$$

будут выполнены свойства:

- 1) $\tilde{\mathcal{U}}(t, s)P(s) = P(t)\tilde{\mathcal{U}}(t, s)$, $s \leq t$;
- 3) для $s < t$ сужение $\tilde{\mathcal{U}}_{t,s}: X'(s) \rightarrow X'(t)$ оператора $\mathcal{U}(t, s)$ на $X'(s)$ есть изометрический изоморфизм подпространств $X'(s)$, $X'(t)$.

Далее, из условий (5), (6) следует, что существуют постоянные $M_+, M_- > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(s)}{\alpha(t)} &\leq M_+ \exp\left(\frac{\gamma}{2}(t-s)\right), & s \leq t, \\ \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} &\leq M_- \exp\left(-\frac{\gamma}{2}(t-s)\right), & s > t, \end{aligned}$$

где γ – постоянная из определения 1. Поэтому для семейства $\tilde{\mathcal{U}}$ выполнены свойства:

- 2) $\|\tilde{\mathcal{U}}(t, s)\| = (\alpha(s)/\alpha(t))\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M_+M \exp(-\gamma/2(t-s))$, $s \leq t$;
- 4) $\|\tilde{\mathcal{U}}(t, s)\| = (\alpha(s)/\alpha(t))\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M_-M \exp(\gamma/2(t-s))$, $s > t$.

Итак, семейство $\tilde{\mathcal{U}}$ допускает экспоненциальную дихотомию с той же расщепляющей парой P, Q .

Поскольку

$$\mathcal{U}(t, s) = \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \tilde{\mathcal{U}}(t, s), \quad s \leq t,$$

то точно таким же образом (с использованием условий (5), (6) на вес α) устанавливается, что семейство $\mathcal{U}$ допускает экспоненциальную дихотомию, если семейство $\tilde{\mathcal{U}}$ допускает экспоненциальную дихотомию, причем для $\mathcal{U}$ будет расщепляющей та же пара проекторов, которая является расщепляющей для $\tilde{\mathcal{U}}$.

Если семейство $\tilde{\mathcal{U}}$ допускает экспоненциальную дихотомию с расщепляющей парой проекторнозначных функций $P, Q: \mathbb{R} \rightarrow LB(X)$, то из [1] следует, что оператор $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}: D(\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ непрерывно обратим и

$$(\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}}^{-1}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(t, s)f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{F},$$

где функция Грина определяется формулой

$$\tilde{G}(t, s) = \begin{cases} -\tilde{\mathcal{U}}(t, s)P(s) = -\frac{\alpha(s)}{\alpha(t)}\mathcal{U}(t, s)P(s), & s \leq t, \\ \tilde{\mathcal{U}}(t, s)Q(s) = \frac{\alpha(s)}{\alpha(t)}\mathcal{U}(t, s)Q(s), & s > t. \end{cases} \quad (14)$$

Из леммы 1 следует, что

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}, \alpha}^{-1} = V_{\alpha} \mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{U}}} V_{\alpha}^{-1},$$

и поэтому из вида функции $\tilde{G}$ следует, что $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}^{-1}$ определяется формулой (14). Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Баскаков, “Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:3 (1996), 1–11.
- [2] М. С. Бичегкуев, “О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:1 (2010), 80–83.
- [3] А. Г. Баскаков, “О корректности линейных дифференциальных операторов”, *Матем. сб.*, **190**:3 (1999), 3–28.
- [4] А. Г. Баскаков, “Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов”, *Функциональный анализ, СМФН*, **9**, МАИ, М., 2004, 3–151.
- [5] А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 3–68.
- [6] М. С. Бичегкуев, “Линейные разностные и дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах”, *Матем. заметки*, **86**:5 (2009), 673–680.
- [7] М. С. Бичегкуев, “Об условиях разрешимости разностных уравнений с начальным условием из подпространства”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:4 (2010), 751–768.
- [8] М. С. Бичегкуев, “Об условиях обратимости разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:4 (2011), 3–20.
- [9] А. Г. Баскаков, “Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов”, *Матем. заметки*, **59**:6 (1996), 811–820.
- [10] N. Van Minh, F. Răbiger, R. Schnaubelt, “Exponential stability, exponential expansiveness, and exponential dichotomy of evolution equation on the half-line”, *Integral Equations Operator Theory*, **32**:3 (1998), 332–353.
- [11] C. Chicone, Yu. Latushkin, *Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations*, Math. Surveys Monogr., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [12] D. Todorov, *Generalisation of Analogs of Theorems of Maizel and Pliss and Their Application in Shadowing Theory*, arXiv: math.DS/1202.4338v1.
- [13] А. Г. Баскаков, “Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений”, *УМН*, **68**:1 (2013), 77–128.
- [14] М. С. Бичегкуев, “К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах”, *Матем. сб.*, **204**:11 (2013), 3–20.

М. С. Бичегкуев

Северо-Осетинский государственный университет

им. К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ

E-mail: bichegkuev@yandex.ru

Поступило

19.10.2012

Исправленный вариант

08.02.2013