Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, С. А. Пичугов, Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 3–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:31:16

Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи

В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, С. А. Пичугов

Пусть $L_{\infty,\infty}^\Delta(\mathbb{R}^m)$ – пространство функций $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\Delta f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$. В работе получены новые точные неравенства типа Колмогорова для L_∞ -норм производных Рисса $D^\alpha f$ функций $f \in L_{\infty,\infty}^\Delta(\mathbb{R}^m)$. Решена задача Стечкина о приближении неограниченного оператора D^α ограниченными на классе функций $f \in L_{\infty,\infty}^\Delta(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\|\Delta f\|_\infty \leq 1$, а также задача о наилучшем восстановлении оператора D^α на элементах этого класса, заданных с погрешностью δ .

Библиография: 29 названий.

DOI: 10.4213/mzm10196

1. Введение. Неравенства, оценивающие нормы промежуточных производных функций одной и многих переменных через нормы самих функций и нормы производных более высокого порядка (неравенства типа Колмогорова), играют важную роль во многих областях математики и ее приложениях. Получению такого рода неравенств посвящены работы многих математиков. В настоящее время известно большое количество точных неравенств типа Колмогорова для функций одной переменной (см., например, обзоры [1]–[3] и монографии [4]–[6]). Значительно меньше таких результатов получено для функций многих переменных (см., например, [7]–[13]). Отметим, что в [10] получено точное неравенство, оценивающее равномерную норму производной по направлению через равномерную норму функции и L_∞ -норму результата применения к функции оператора Лапласа.

Во многих вопросах анализа и его приложений возникает необходимость наряду с производными целых порядков, рассматривать и производные дробных порядков (см., например, [14]). Некоторые известные точные неравенства типа Колмогорова для производных дробного порядка можно найти в работах [15]–[20], [21; гл. 2], [22]. Результаты данной работы непосредственно примыкают к результатам работ [23] и [24].

Задача о точных неравенствах типа Колмогорова тесно связана с задачей Стечкина о приближении неограниченного оператора ограниченными на заданном классе

элементов Q , а также с задачей оптимального восстановления неограниченного оператора на классе Q в предположении, что элементы Q заданы с известной погрешностью (см. по этому поводу [1], [2], а также [4; § 7.1]).

В данной статье мы получим новые точные неравенства, оценивающие равномерную норму производной Рисса D^α функций многих переменных через L_∞ -норму самой функции и L_∞ -норму ее лапласиана, а также решим задачу наилучшего приближения оператора D^α на классе $W_{\infty,\infty}^\Delta$ функций f таких, что $\|\Delta f\|_\infty \leq 1$ (Δ – оператор Лапласа, понимаемый в смысле теории обобщенных функций) и задачу оптимального восстановления оператора D^α на элементах этого класса, заданных с погрешностью.

Статья организована следующим образом. В п. 2 мы приведем необходимые определения, постановки задач и известные результаты, непосредственно примыкающие к теме данной статьи. В п. 3 мы введем оператор U_h^α , который впоследствии окажется оператором наилучшего приближения для D^α , и получим оценки отклонения $D^\alpha f$ от $U_h^\alpha f$ на классе $W_{\infty,\infty}^\Delta$. В п. 4 с помощью результатов п. 3 мы получим неравенство типа Колмогорова, оценивающее равномерную норму $D^\alpha f$ через равномерную норму f и равномерную норму Δf , в аддитивной и мультипликативной форме, установим точность полученных неравенств и найдем модуль непрерывности оператора D^α на классе $W_{\infty,\infty}^\Delta$. Это позволит в п. 5 завершить решение задачи Стечкина и решить задачу оптимального восстановления оператора D^α на заданных с погрешностью функциях класса $W_{\infty,\infty}^\Delta$. Наконец, в п. 6 мы решим задачу Колмогорова о необходимых и достаточных условиях существования функции, имеющей заданные значения $\|f\|_\infty$, $\|D^\alpha f\|_\infty$ и $\|\Delta f\|_\infty$.

2. Определения, постановки задач, смежные результаты. Пусть $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) – евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_m)$, $|x| = (\sum_{i=1}^m x_i^2)^{1/2}$. Через $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство измеримых функций $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^m)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}^m\},$$

а через $C(\mathbb{R}^m)$ – пространство непрерывных, ограниченных функций $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_C = \|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} := \sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}^m\}.$$

Пусть

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

– оператор Лапласа. Для локально интегрируемых на $\mathbb{R}^m$ функций f и g будем писать

$$\Delta f = g,$$

если для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции φ

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Delta \varphi(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) g(x) dx.$$

Через $L_{\infty,\infty}^\Delta = L_{\infty,\infty}^\Delta(\mathbb{R}^m)$ обозначим совокупность функций $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ таких, что $\Delta f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$. Через $W_{\infty,\infty}^\Delta = W_{\infty,\infty}^\Delta(\mathbb{R}^m)$ обозначим класс функций из $L_{\infty,\infty}^\Delta$ таких, что $\|\Delta f\|_\infty \leq 1$.

Производная Рисса порядка α ($0 < \alpha < 2$) функции $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством (см. [14; с. 367–368])

$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_m} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}} dt,$$

где

$$d_{m,2}(\alpha) = \frac{2^{1-\alpha} \pi^{1+m/2}}{\sin(\alpha\pi/2) \Gamma(1+\alpha/2) \Gamma((m+\alpha)/2)}$$

– нормирующий множитель [14; с. 373]. Отметим, что производная Рисса D^α реализует [14; с. 368] дробную степень $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

Для $h > 0$ усеченной производной Рисса порядка $\alpha \in (0, 2)$ функции $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ называется

$$(D_h^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_m \setminus B_h} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}} dt$$

(здесь и везде ниже $B_h = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq h\}$ – шар радиуса h с центром в начале координат).

Пусть X и Y – банаховы пространства, $A: X \rightarrow Y$ – оператор (не обязательно линейный) с областью определения $D_A \subset X$, $Q \subset D_A$ – некоторое множество.

Функция

$$\Omega(\delta) = \Omega(\delta, A, Q) := \sup_{\substack{f \in Q \\ \|f\|_X \leq \delta}} \|Af\|_Y, \quad \delta > 0, \quad (2.1)$$

называется *модулем непрерывности* оператора A на множестве Q . Задача отыскания функции $\Omega(\delta)$ для заданных оператора A и множества Q является абстрактной версией задачи о неравенствах типа Колмогорова.

Через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, Y)$ будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов $S: X \rightarrow Y$. Для $N > 0$ полагаем

$$E_N(A, Q) = \inf_{\substack{S \in \mathcal{L}(X, Y) \\ \|S\| \leq N}} \sup_{f \in Q} \|Af - Sf\|_Y. \quad (2.2)$$

Задача С. Б. Стечкина о наилучшем приближении оператора A на множестве Q линейными ограниченными операторами состоит в том, чтобы при любом $N > 0$ найти величину (2.2), а также указать экстремальный оператор, т.е. оператор, реализующий точную нижнюю грань в правой части (2.2). Эта задача впервые возникла в исследованиях Стечкина в 1965 г. Постановка задачи, первые важные результаты и решение этой задачи для дифференциальных операторов малых порядков представлены в [25]. Обзор дальнейших результатов и соответствующие ссылки можно найти, например, в [1], [2].

Пусть еще

$$l(\delta, A, Q) = \inf_{N \geq 0} \{E_N(A, Q) + N\delta\}.$$

Следующая теорема Стечкина [25] (см. также [1], [2] и [4; теорема 7.1.1]) дает простую, но часто используемую и эффективную оценку снизу величины наилучшего приближения оператора через его модуль непрерывности и устанавливает связь между задачей Стечкина и задачей о точных неравенствах типа Колмогорова.

ТЕОРЕМА А. Если A – однородный (в частности, линейный) оператор, Q – центрально-симметричное выпуклое множество из области определения оператора A , то выполняются неравенства

$$E_N(A, Q) \geq \sup_{\delta > 0} \{ \Omega(\delta, A, Q) - N\delta \} = \sup_{f \in Q} \{ \|Af\|_Y - N\|f\|_X \}, \quad N \geq 0, \quad (2.3)$$

$$\Omega(\delta, A, Q) \leq l(\delta, A, Q), \quad \delta \geq 0. \quad (2.4)$$

Если при этом существует элемент $f \in Q$ и линейный ограниченный оператор T такие, что

$$\|Af\|_Y = \sup_{f \in Q} \|Af - Tf\|_Y + \|T\| \cdot \|f\|_X, \quad (2.5)$$

то справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Omega(\|f\|_X, A, Q) &= \|Af\|_Y, \\ E_{\|T\|}(A, Q) &= \sup_{f \in Q} \|Af - Tf\|_Y = \|Af\|_Y - \|T\| \cdot \|f\|_X \end{aligned}$$

и, следовательно, оператор T является экстремальным в задаче (2.2) при $N = \|T\|$, а элемент f в задаче (2.1) при $\delta = \|f\|_X$.

Многие задачи численного анализа, теории функций и других разделов математики являются некорректными задачами восстановления оператора A на элементах класса $Q \subset D(A)$ в предположении, что элементы класса Q заданы с известной погрешностью. Восстановление осуществляется с помощью некоторого множества отображений $\mathcal{R} = \mathcal{R}(X, Y) \subset \mathcal{O}(X, Y)$, где $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X, Y)$ – совокупность всех отображений, действующих из X в Y .

Для числа $\delta \geq 0$ и оператора $T \in \mathcal{R}(X, Y)$ положим

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}; A, Q) = \inf_{T \in \mathcal{R}} \sup_{\substack{f \in Q, \eta \in X, \\ \|f - \eta\|_X \leq \delta}} \|Af - T\eta\|_Y. \quad (2.6)$$

Задача оптимального восстановления оператора A с помощью множества отображений (методов восстановления) $\mathcal{R}$ на элементах класса Q , заданных с погрешностью δ , состоит в том, чтобы найти величину (2.6) и указать оптимальный (т.е. реализующий точную нижнюю грань в (2.6)) метод восстановления.

Связь задачи (2.6) с неравенствами типа Колмогорова, с одной стороны, и задачей приближения неограниченных операторов ограниченными, с другой, дается следующей теоремой (см. [25], а также [1], [2] и [4; теорема 7.1.2]).

ТЕОРЕМА В. Если Q – уравновешенное множество и A – однородный оператор, то

$$\Omega(\delta, A, Q) \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}; A, Q) \leq \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}; A, Q) \leq l(\delta, A, Q).$$

Если при этом существует элемент $f \in Q$ и оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ со свойством (2.5), то

$$\|Af\|_Y = \Omega(\delta, A, Q) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}; A, Q) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}; A, Q), \quad \delta = \|f\|_X,$$

и для соответствующего δ оператор T является оптимальным.

Мы будем рассматривать сформулированные задачи в случае, когда $X = L_\infty(\mathbb{R}^m)$, $Y = L_\infty(\mathbb{R}^m)$, $A = D^\alpha$ и $Q = W_{\infty,\infty}^\Delta$. При этом для решения задачи отыскания модуля непрерывности $\Omega(\delta, D^\alpha, W_{\infty,\infty}^\Delta)$ мы ниже получим неулучшаемые неравенства типа Колмогорова, оценивающие $\|D^\alpha f\|_\infty$ через $\|f\|_\infty$ и $\|\Delta f\|_\infty$ для функции $f \in L_{\infty,\infty}^\Delta$ в аддитивной и мультипликативной форме.

3. Оценка сверху нормы оператора U_h^α и его уклонения от D^α . Пусть $h > 0$. Через $G_h(x, y)$ будем обозначать функцию Грина шара B_h (см., [26; с. 265]), т.е. для $x, y \in B_h$, $x \neq y$, в случае $m \geq 3$

$$G_h(x, y) = \frac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)} \left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}} - \frac{h^{m-2}|y|^{m-2}}{|x|y|^2 - h^2y|^{m-2}} \right),$$

и в случае $m = 2$

$$G_h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{h^2 - xy}{h(x-y)} \right|$$

(здесь и везде ниже σ_{m-1} – площадь поверхности единичной сферы S^{m-1} пространства $\mathbb{R}^m$).

Для $\rho \in (0, h]$ положим

$$G_h(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)} \left(\frac{1}{\rho^{m-2}} - \frac{1}{h^{m-2}} \right), & m \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{h}{\rho}, & m = 2. \end{cases}$$

Отметим, что для $y \in B_h$, $y \neq 0$

$$G_h(0, y) = G_h(|y|).$$

Усреднением функции f в точке x по сфере радиуса h назовем величину

$$\tilde{f}(x, h) = \frac{1}{\sigma_{m-1}} \int_{S^{m-1}} f(x + hy) ds_y$$

(ds_y – элемент площади поверхности сферы S^{m-1}).

Известно (см., например, [26; с. 289]), что для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции f справедливо представление

$$f(x) = \tilde{f}(x, h) + \int_{B_h} G_h(x, y)(-\Delta f(y)) dy. \quad (3.1)$$

Применяя представление (3.1) к функции $f(z \pm x)$ (при фиксированном x) и полагая затем $z = 0$, получим

$$f(x) = \tilde{f}(x, h) + \int_{B_h} G_h(0, y)(-\Delta f(x \pm y)) dy.$$

Для любой функции $f \in L_{\infty,\infty}^\Delta$ и любой финитной бесконечно дифференцируемой функции φ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \left[\tilde{\varphi}(x, h) + \int_{B_h} G_h(0, y)(-\Delta \varphi(x \mp y)) dy \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \left[\tilde{f}(x, h) + \int_{B_h} G_h(0, y)(-\Delta f(x \pm y)) dy \right] dx. \end{aligned}$$

Таким образом, для $f \in L_{\infty, \infty}^{\Delta}$ и почти всех $x \in \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \tilde{f}(x, h) + \int_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y)) dy. \quad (3.2)$$

Введем также следующую функцию:

$$F_h(t) = \int_t^h G_\rho(t) \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}, \quad t \in [0, h].$$

Нетрудно видеть, что для функций $G_h(|y|)$ и $F_h(|y|)$ имеют место следующие соотношения:

$$G_h(|y|) = h^{2-m} G_1\left(\frac{|y|}{h}\right) \quad (3.3)$$

и

$$F_h(|y|) = h^{2-\alpha-m} F_1\left(\frac{|y|}{h}\right). \quad (3.4)$$

Для заданного $h > 0$ рассмотрим оператор

$$U_h^\alpha f(x) = D_h^\alpha f(x) + \frac{2c_h \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} (f(x) - \tilde{f}(x, h)),$$

где

$$c_h = \frac{F_h(h/\sqrt[m]{2})}{G_h(h/\sqrt[m]{2})} = h^{-\alpha} \frac{F_1(1/\sqrt[m]{2})}{G_1(1/\sqrt[m]{2})} = h^{-\alpha} c_1. \quad (3.5)$$

Покажем, что U_h^α – ограниченный оператор, действующий из $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$, и найдем его норму.

Для любой функции $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ и $h > 0$

$$\begin{aligned} \|U_h^\alpha f\|_\infty &= \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \left\| \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{2f(\cdot) - f(\cdot + t) - f(\cdot - t)}{|t|^{m+\alpha}} dt \right. \\ &\quad \left. + 2c_h \sigma_{m-1} (f(\cdot) - \tilde{f}(\cdot, h)) \right\|_\infty \\ &\leq \frac{4\|f\|_\infty}{d_{m,2}(\alpha)} \left\{ \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{dt}{|t|^{m+\alpha}} + c_h \sigma_{m-1} \right\} = \frac{4\|f\|_\infty \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h \right), \end{aligned}$$

так что

$$\|U_h^\alpha f\|_\infty \leq \frac{4\|f\|_\infty \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h \right) = \frac{4\|f\|_\infty \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} h^{-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right). \quad (3.6)$$

Последнее выражение нам будет удобно записать с использованием следующей функции, которая в рассматриваемых задачах является многомерным аналогом эйлера идеального сплайна второго порядка (см., например, [4; стр. 66–69]).

Пусть для $\rho \geq 0$ и $\delta = \sqrt[m]{2}$

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2m} \left(\rho^2 - \frac{1}{\delta^2} - \sigma_{m-1} G_1\left(\frac{1}{\delta}\right) + \frac{1}{2} \right), & 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\delta}, \\ \frac{1}{2m} \left(-\rho^2 - 2\sigma_{m-1} G_1(\rho) + \frac{1}{\delta^2} + \sigma_{m-1} G_1\left(\frac{1}{\delta}\right) + \frac{1}{2} \right), & \frac{1}{\delta} < \rho \leq 1, \\ \psi(1), & \rho > 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Для $h > 0$ и $x \in \mathbb{R}^m$ положим

$$\varphi_{h,2}(x) = h^{-2}\psi(h|x|). \quad (3.8)$$

Функция $\varphi_{h,2}(x)$ очевидно непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}^m$.

Пользуясь представлением оператора Лапласа для радиальных функций $\varphi(\rho)$,

$$\Delta\varphi(\rho) = \varphi''(\rho) + \frac{m-1}{\rho}\varphi'(\rho),$$

нетрудно проверить, что $\varphi_{h,2} \in W_{\infty,\infty}^{\Delta}$ и при этом

$$\Delta\varphi_{h,2}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{h}{\delta}, \\ -1, & \frac{h}{\delta} < |x| < h, \\ 0, & |x| \geq h, \end{cases} \quad (3.9)$$

так что

$$\|\Delta\varphi_{h,2}\|_{\infty} = 1. \quad (3.10)$$

Ясно, что при любом $h > 0$

$$\|\varphi_{h,2}\|_{\infty} = h^{-2}\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}, \quad (3.11)$$

и, как нетрудно проверить,

$$\|D^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty} = h^{2-\alpha}\|D^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty}. \quad (3.12)$$

Отметим также, что представление (3.2) для функции $\varphi_{h,2}$ имеет место в каждой точке $x \in \mathbb{R}^m$.

Для любого $h > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty} &\geq |U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}(0)| \\ &= \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \left| \int_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{2\varphi_{h,2}(0) - 2\varphi_{h,2}(y)}{|y|^{m+\alpha}} dy + 2c_h\sigma_{m-1}(\varphi_{h,2}(0) - \tilde{\varphi}_{h,2}(0)) \right| \\ &= \frac{4\|\varphi_{h,2}\|_{\infty}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\int_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{dy}{|y|^{m+\alpha}} + 4c_h\sigma_{m-1} \right) \\ &= \frac{4\|\varphi_{h,2}\|_{\infty}\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} h^{-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right). \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (3.6) и (3.11) получаем, что для функции $\varphi_{h,2}$ имеет место равенство

$$\|U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty} = |U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}(0)| = \frac{4\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} h^{-2-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right) = h^{-2-\alpha}\|U_1^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty}. \quad (3.13)$$

Ввиду соотношений (3.6) и (3.13) видим, что справедлива

ЛЕММА 1. Пусть $h > 0$ и $\alpha \in (0, 2)$. Тогда

$$\|U_h^\alpha\| = \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h \right) = \frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty} = h^{-\alpha} \frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}.$$

Теперь для функций $f \in L_{\infty,\infty}^\Delta$ мы получим оценку величины $\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty$. Прежде всего покажем, что для $f \in L_{\infty,\infty}^\Delta$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ имеет место представление

$$D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{B_h} (-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy. \quad (3.14)$$

Как легко видеть, для любой функции $f \in L_{\infty,\infty}^\Delta$ и любой финитной бесконечно дифференцируемой функции φ

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)(D^\alpha \varphi(x) - U_h^\alpha \varphi(x)) dx. \quad (3.15)$$

Используя определения $D^\alpha \varphi$ и $U_h^\alpha \varphi$ и переходя к полярным координатам, получаем

$$\begin{aligned} & d_{m,2}(\alpha)(D^\alpha \varphi(x) - U_h^\alpha \varphi(x)) \\ &= \int_{B_h} \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+y) - \varphi(x-y)}{|y|^{m+\alpha}} dy - 2c_h \sigma_{m-1}(\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x, h)) \\ &= \int_{S^{m-1}} ds_y \int_0^h \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+\rho y) - \varphi(x-\rho y)}{\rho^{\alpha+1}} d\rho - 2c_h \sigma_{m-1}(\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x, h)) \\ &= 2 \int_{S^{m-1}} ds_y \int_0^h \frac{\varphi(x) - \varphi(x+\rho y)}{\rho^{\alpha+1}} d\rho - 2c_h \sigma_{m-1}(\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x, h)) \\ &= 2 \int_0^h \sigma_{m-1}(\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x, \rho)) \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}} - 2c_h \sigma_{m-1}(\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x, h)). \end{aligned}$$

Учитывая представление (3.1), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} & d_{m,2}(\alpha)(D^\alpha \varphi(x) - U_h^\alpha \varphi(x)) \\ &= 2 \int_0^h \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}} \int_{B_\rho} G_\rho(|y|)(-\Delta \varphi(x+y)) dy - 2c_h \int_{B_h} (-\Delta \varphi(x+y)) G_h(|y|) dy \\ &= 2 \int_{B_h} (-\Delta \varphi(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy, \end{aligned}$$

т.е.

$$D^\alpha \varphi(x) - U_h^\alpha \varphi(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{B_h} (-\Delta \varphi(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy. \quad (3.16)$$

Подставляя (3.16) в (3.15) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x)) dx \\ &= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \int_{B_h} (-\Delta \varphi(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy dx \\ &= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{B_h} (-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любой функции $f \in L_{\infty, \infty}^{\Delta}$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ имеет место равенство (3.14).

Используя (3.14), получим, что для почти всех $x \in \mathbb{R}^m$

$$|D^{\alpha} f(x) - U_h^{\alpha} f(x)| \leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|\Delta f\|_{\infty} \int_{B_h} |F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)| dy. \quad (3.17)$$

Отметим, что при выводе соотношения (3.16) бесконечная дифференцируемость функции φ была несущественной. В действительности использовалось только то обстоятельство, что для таких функций представление (3.2) имело место в каждой точке $x \in \mathbb{R}^m$. Поэтому, учитывая замечание, сделанное после вывода (3.2), заключаем, что для функции $\varphi_{h,2}$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство

$$D^{\alpha} \varphi_{h,2}(x) - U_h^{\alpha} \varphi_{h,2}(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{B_h} (-\Delta \varphi_{h,2}(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) dy. \quad (3.18)$$

Учитывая (3.9), а также определения функций $G_h(|y|)$, $F_h(|y|)$ и константы c_h , нетрудно проверить, что почти всюду

$$\Delta \varphi_{h,2}(x) = \operatorname{sgn}(F_h(|x|) - c_h G_h(|x|)) \quad (3.19)$$

(константа c_h в определении оператора U_h^{α} как раз и была выбрана так, чтобы (3.19) имело место). Поэтому для функции $\varphi_{h,2}$ с учетом (3.18) получим

$$|D^{\alpha} \varphi_{h,2}(0) - U_h^{\alpha} \varphi_{h,2}(0)| = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int_{B_h} |F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)| dy. \quad (3.20)$$

Сопоставляя (3.17) и (3.20), видим, что справедлива

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \alpha < 2$. Тогда для любого $h > 0$ и для любой функции $f \in L_{\infty, \infty}^{\Delta}$

$$\|D^{\alpha} f - U_h^{\alpha} f\|_{\infty} \leq h^{2-\alpha} \|\Delta f\|_{\infty} |D^{\alpha} \varphi_{1,2}(0) - U_1^{\alpha} \varphi_{1,2}(0)|.$$

Из лемм 1 и 2 следует

ЛЕММА 3. Пусть $0 < \alpha < 2$ и

$$h_N = \left(\frac{\|U_1^{\alpha} \varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty} N} \right)^{1/\alpha}$$

для $N > 0$. Тогда $\|U_{h_N}^{\alpha}\| = N$ и

$$\begin{aligned} E_N(D^{\alpha}, W_{\infty, \infty}^{\Delta}) &\leq \sup_{f \in W_{\infty, \infty}^{\Delta}} \|D^{\alpha} f - U_{h_N}^{\alpha} f\|_{\infty} = h_N^{2-\alpha} |D^{\alpha} \varphi_{1,2}(0) - U_1^{\alpha} \varphi_{1,2}(0)| \\ &= N^{1-2/\alpha} \left(\frac{\|U_1^{\alpha} \varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}} \right)^{2/\alpha-1} |D^{\alpha} \varphi_{1,2}(0) - U_1^{\alpha} \varphi_{1,2}(0)|. \end{aligned}$$

4. Неравенства типа Колмогорова. Из лемм 1 и 2 для $f \in L_{\infty, \infty}^{\Delta}$ и $0 < \alpha < 2$ следует, что при любом $h > 0$

$$\begin{aligned} \|D^{\alpha} f\|_{\infty} &\leq \|D^{\alpha} f - U_h^{\alpha} f\|_{\infty} + \|U_h^{\alpha} f\|_{\infty} \\ &\leq |D^{\alpha} \varphi_{1,2}(0) - U_1^{\alpha} \varphi_{1,2}(0)| \|\Delta f\|_{\infty} h^{2-\alpha} + \frac{\|U_1^{\alpha} \varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}} \|f\|_{\infty} h^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Покажем, что при любом $h > 0$ неравенство (4.1) обращается в равенство для функции $f(t) = \varphi_{h,2}(t)$.

Для этого, прежде всего, покажем, что функция $D^{\alpha} \varphi_{h,2}(x)$ непрерывна при $x = 0$. Для $\delta \in \mathbb{R}^m$ определим множество $\Omega_{h,\delta}$ следующим образом:

$$\Omega_{h,\delta} = B_h \cap \text{supp}(\Delta \varphi_{h,2}(y) - \Delta \varphi_{h,2}(y + \delta)).$$

Ясно, что $\text{mes } \Omega_{h,\delta} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Для $\delta \in \mathbb{R}^m$ имеем с учетом (3.19)

$$\begin{aligned} &|(D^{\alpha} - U_h^{\alpha})(\varphi_{h,2}(0) - \varphi_{h,2}(\delta))| \\ &= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left| \int_{B_h} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)) (\Delta \varphi_{h,2}(y) - \Delta \varphi_{h,2}(y + \delta)) dy \right| \\ &\leq \int_{\Omega_{h,\delta}} |F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)| dy. \end{aligned}$$

Так как последний интеграл стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$, функция $(D^{\alpha} - D_h^{\alpha})\varphi_{h,2}(x)$ непрерывна в точке 0. Ясно также, что функция $U_h^{\alpha} \varphi_{h,2}(x)$ непрерывна в точке 0. Следовательно, и $D^{\alpha} \varphi_{h,2}(x)$ непрерывна в точке 0. Поэтому

$$\|D^{\alpha} \varphi_{h,2}\|_{\infty} \geq |D^{\alpha} \varphi_{h,2}(0)| = |D^{\alpha} \varphi_{h,2}(0) - U_h^{\alpha} \varphi_{h,2}(0) + U_h^{\alpha} \varphi_{h,2}(0)|.$$

Учитывая определение функции $\varphi_{h,2}$, производной $D^{\alpha} \varphi_{h,2}$, оператора U_h^{α} , а также соотношения (3.19) и (3.16), нетрудно проверить, что $D^{\alpha} \varphi_{h,2}(0) - U_h^{\alpha} \varphi_{h,2}(0) < 0$ и $U_h^{\alpha} \varphi_{h,2}(0) < 0$. Поэтому, используя еще соотношения (3.13) и (3.12), получаем

$$\begin{aligned} \|D^{\alpha} \varphi_{h,2}\|_{\infty} &\geq |D^{\alpha} \varphi_{h,2}(0) - U_h^{\alpha} \varphi_{h,2}(0)| + |U_h^{\alpha} \varphi_{h,2}(0)| \\ &= h^{2-\alpha} |D^{\alpha} \varphi_{1,2}(0) - U_h^{\alpha} \varphi_{1,2}(0)| + h^{-\alpha} \frac{\|U_1^{\alpha} \varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}} \|\varphi_{h,2}\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Таким образом, неравенство (4.1) точное, и нами доказана

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \alpha < 2$. Тогда для любой функции $f \in L_{\infty, \infty}^{\Delta}$ при каждом $h > 0$ имеет место точное неравенство

$$\|D^{\alpha} f\|_{\infty} \leq h^{2-\alpha} |D^{\alpha} \varphi_{1,2}(0) - U_1^{\alpha} \varphi_{1,2}(0)| \cdot \|\Delta f\|_{\infty} + h^{-\alpha} \frac{\|U_1^{\alpha} \varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}} \cdot \|f\|_{\infty}. \quad (4.3)$$

Неравенство (4.3) обращается в равенство для функции $\varphi_{h,2}$, определенной соотношениями (3.7) и (3.8).

Получим теперь мультипликативное неравенство. Пусть сначала $\|\Delta f\|_{\infty} = 1$. Выберем h так, чтобы выполнялось

$$\|f\|_{\infty} = \|\varphi_{h,2}\|_{\infty} = h^{-2} \|\varphi_{1,2}\|_{\infty}. \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что $h = (\|\varphi_{1,2}\|_\infty / \|f\|_\infty)^{1/2}$. Покажем, что $\|D^\alpha f\|_\infty \leq \|D^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty$. Действительно, с учетом (4.3), (4.4) и (4.2) получим

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq h^{2-\alpha} |D^\alpha \varphi_{1,2}(0) - U_1^\alpha \varphi_{1,2}(0)| + h^{-\alpha} \frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty} \cdot \|\varphi_{h,2}\|_\infty = \|D^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty. \quad (4.5)$$

Отсюда с учетом (3.12) получим

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq h^{\alpha-2} \|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty,$$

откуда при $h = (\|\varphi_{1,2}\|_\infty / \|f\|_\infty)^{1/2}$, получаем

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq \left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty} \right)^{1-\alpha/2}. \quad (4.6)$$

Если f – произвольная функция из $L_{\infty,\infty}^\Delta$, то применив неравенство (4.6) к функции $f/\|\Delta f\|_\infty$, получим

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \|\Delta f\|_\infty^{\alpha/2} \|f\|_\infty^{1-\alpha/2}.$$

Очевидно, что последнее неравенство обращается в равенство для любой функции вида $f(t) = a\varphi_{h,2}(t)$, $h > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Таким образом доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \alpha < 2$. Тогда для любой функции $f \in L_{\infty,\infty}^\Delta$ имеет место точное неравенство

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \|\Delta f\|_\infty^{\alpha/2} \|f\|_\infty^{1-\alpha/2}. \quad (4.7)$$

Неравенство (4.7) обращается в равенство для функций вида $f(t) = a\varphi_{h,2}(t)$, $h > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 2 для всех $\delta > 0$,

$$\Omega(\delta, D^\alpha, W_{\infty,\infty}^\Delta) = \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \cdot \delta^{1-\alpha/2}. \quad (4.8)$$

5. Наилучшее приближение оператора D^α ограниченными и оптимальное восстановление этого оператора по неточно заданной информации на классе $W_{\infty,\infty}^\Delta$. Пусть

$$h_N = \left(\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N} \right)^{1/\alpha}$$

для $N > 0$. Из теоремы 1 и леммы 3 следует, что выполняется условие (2.5) теоремы A с оператором $D_{h_N}^\alpha$ и функцией $\varphi_{h,2}$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N > 0$ и $0 < \alpha < 2$. Тогда

$$\begin{aligned} E_N(D^\alpha, W_{\infty, \infty}^\Delta) &= h_N^{2-\alpha} |D^\alpha \varphi_{1,2}(0) - U_1^\alpha \varphi_{1,2}(0)| \\ &= \left(\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N} \right)^{2/\alpha-1} |D^\alpha \varphi_{1,2}(0) - U_1^\alpha \varphi_{1,2}(0)|. \end{aligned}$$

При этом оператор

$$U_{h_N}^\alpha f(x) = D_{h_N}^\alpha f(x) - \frac{2c_{h_N} \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} (f(x) - \tilde{f}(x, h_N)), \quad h_N = \left(\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N} \right)^{1/\alpha}, \quad (5.1)$$

является экстремальным оператором.

Теперь, пользуясь теоремой В, можем получить значение величины оптимальной погрешности восстановления оператора D^α с помощью множества отображений $\mathcal{L}(C, C)$ и $\mathcal{O}(C, C)$ на элементах класса $W_{\infty, \infty}^\Delta$, заданных с погрешностью δ . Выберем h из условия

$$\|\varphi_{h,2}\|_\infty = \delta,$$

т.е. положим

$$h = \left(\frac{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}{\delta} \right)^{1/2}.$$

Отметим, что функция $\varphi_{h,2} \in W_{\infty, \infty}^\Delta$. Для этой функции и оператора U_h^α , как уже отмечалось, выполнено условие (2.5) теоремы А, и, следовательно, в силу теоремы В

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}, D^\alpha, W_{\infty, \infty}^\Delta) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}, D^\alpha, W_{\infty, \infty}^\Delta) = \|D^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty = \Omega(\delta, D^\alpha, W_{\infty, \infty}^\Delta).$$

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть $N > 0$ и $0 < \alpha < 2$. Тогда для всех $\delta > 0$

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}, D^\alpha, W_{\infty, \infty}^\Delta) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}, D^\alpha, W_{\infty, \infty}^\Delta) = \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \cdot \delta^{1-\alpha/2}.$$

При этом оператор (5.1) является экстремальным оператором.

6. Задача Колмогорова. Неравенства для норм промежуточных производных тесно связаны также с задачей Колмогорова о необходимых и достаточных условиях существования функции, для которой данные числа являются точными границами модулей ее производных соответствующих порядков [28], [29]. Некоторые известные результаты в этом направлении изложены, например, в [4]. Мы рассмотрим задачу Колмогорова в следующей постановке. Пусть числа M_0 , M_α , M_Δ заданы. Требуется найти необходимое и достаточное условия для существования функции $f \in L_{\infty, \infty}^\Delta$ такой, что

$$\|f\|_\infty = M_0, \quad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \quad \|\Delta f\|_\infty = M_\Delta.$$

Решение этой задачи дает следующая

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < \alpha < 2$ и M_0, M_α, M_Δ – положительные числа. Для существования функции $f \in L_{\infty, \infty}^\Delta$ такой, что

$$\|f\|_\infty = M_0, \quad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \quad \|\Delta f\|_\infty = M_\Delta,$$

необходимо и достаточно выполнения условий

$$M_\alpha \leq \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} M_0^{1-\alpha/2} M_\Delta^{\alpha/2}. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из теоремы 2. Докажем достаточность. Не уменьшая общности, можно считать, что $M_\Delta = 1$. Так как выполнено условие (6.1), найдется $0 < L_0 < M_0$ такое, что

$$M_\alpha = \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} L_0^{1-\alpha/2}.$$

Пусть h_0 выбрано из условия $\|\varphi_{h_0,2}\|_\infty = L_0$, т.е. с учетом (3.11) и (3.10)

$$h_0 = \left(\frac{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}{L_0} \right)^{1/2}.$$

Тогда в силу теоремы 2

$$\|D^\alpha \varphi_{h_0,2}\|_\infty = \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} L_0^{1-\alpha/2},$$

откуда получаем $\|D^\alpha \varphi_{h_0,2}\|_\infty = M_\alpha$. В качестве искомой функции f возьмем $f = \varphi_{h_0,2} + M_0 - L_0$. Ясно, что

$$\|f\|_\infty = M_0, \quad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \quad \|\Delta f\|_\infty = M_\Delta = 1.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Арестов, В. Н. Габушин, “Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными”, *Изв. вузов. Матем.*, 1995, № 11, 42–68.
- [2] В. В. Арестов, “Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи”, *УМН*, **51:6** (1996), 89–124.
- [3] В. М. Тихомиров, Г. Г. Магарил-Ильяев, “Неравенства для производных”: А. Н. Колмогоров, *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985, 387–390.
- [4] В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наукова думка, Киев, 2003.
- [5] M. K. Kwong, A. Zettl, *Norm Inequalities for Derivatives and Differences*, Lecture Notes in Math., **1536**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

- [6] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, A. M. Fink, *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*, Math. Appl. (East European Ser.), **53**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [7] В. Н. Коновалов, “Точные неравенства для норм функций, третьих частных, вторых смешанных или косых производных”, *Матем. заметки*, **23**:1 (1978), 67–78.
- [8] А. П. Буслаев, В. М. Тихомиров, “О неравенствах для производных в многомерном случае”, *Матем. заметки*, **25**:1 (1979), 59–73.
- [9] О. А. Тимошин, “Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков”, *Докл. РАН*, **344**:1 (1995), 20–22.
- [10] В. Г. Тимофеев, “Неравенство типа Ландау для функций нескольких переменных”, *Матем. заметки*, **37**:5 (1985), 676–689.
- [11] V. F. Babenko, V. A. Kofanov, S. A. Pichugov, “Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications”, *Multivariate Approximation and Splines*, eds. G. Nörberger, J. W. Schmidt, G. Walz, Birkhäuser, Basel, 1997, 1–12.
- [12] В. Ф. Бабенко, “О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных”, *Доп. НАН України*, 2005, № 5, 7–11.
- [13] V. F. Babenko, S. A. Pichugov, “Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of Hölder functions of two variables”, *East J. Approx.*, **13**:3 (2007), 321–329.
- [14] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
- [15] С. П. Гейсберг, “Обобщение неравенства Адамара”, Сб. научн. тр. ЛОМИ, **50**, ЛОМИ, Л., 1965, 42–54.
- [16] V. V. Arestov, “Inequalities for fractional derivatives on the half-line”, *Approximation Theory*, Banach Center Publ., **4**, PWN, Warsaw, 1979, 19–34.
- [17] G. G. Magaril-II’jaev, V. M. Tihomirov, “On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line”, *Anal. Math.*, **7**:1 (1981), 37–47.
- [18] В. Ф. Бабенко, М. С. Чурилова, “О неравенствах типа Колмогорова для производных дробного порядка”, *Вестн. Днепропетровского ун-та. Матем.*, 2001, № 6, 16–20.
- [19] В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов, “Точные оценки норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условиям Гёльдера”, *Матем. заметки*, **87**:1 (2010), 26–34.
- [20] V. F. Babenko, N. V. Parfinovych, S. A. Pichugov, “Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions”, *Укр. матем. журн.*, **62**:3 (2010), 301–314.
- [21] В. П. Моторный, В. Ф. Бабенко, А. А. Довгошей, О. И. Кузнецова, *Теория аппроксимации и гармонический анализ*, Наукова думка, Киев, 2012.
- [22] V. F. Babenko, M. S. Churilova, “Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic”, *Banach J. Math. Anal.*, **1**:1 (2007), 66–77.
- [23] В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, “Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **17**, 2011, 60–70.
- [24] В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, “Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения”, *Укр. матем. вісник*, **9**:2 (2012), 157–174.
- [25] С. Б. Стечкин, “Наилучшее приближение линейных операторов”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 137–148.
- [26] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.
- [27] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
- [28] А. Н. Колмогоров, “О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции”, *Уч. записки Моск. гос. ун-та*, **30**, Математика, кн. 3, Изд-во Моск. ун-та, М., 1939, 3–16.

- [29] А. Н. Колмогоров, “О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале”, *Избранные труды. Математика и механика*, Наука, М., 1985, 252–263.

В. Ф. Бабенко

Днепропетровский национальный университет

E-mail: babenko.vladislav@gmail.com

Поступило

10.07.2011

Исправленный вариант

21.07.2013

Н. В. Парфинovich

Днепропетровский национальный университет

E-mail: nparfinovich@yandex.ru

С. А. Пичугов

Днепропетровский национальный университет,

Днепропетровский национальный технический

университет железнодорожного транспорта