Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Блошанский, З. Н. Цукарева, Локализация для кратных рядов Фурье с “ J_k -лакунарной последовательностью частичных сумм” в классах Орлича, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 26–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:46:54

Локализация для кратных рядов Фурье с “ J_k -лакунарной последовательностью частичных сумм” в классах Орлича

И. Л. Блошанский, З. Н. Цукарева

В работе найдены структурно-геометрические характеристики множеств, на которых справедлива слабая обобщенная локализация почти всюду для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из классов $L(\log^+ L)^{3k+2}(\mathbb{T}^N)$, $1 \leq k \leq N-2$, $N \geq 3$, в случае, когда прямоугольные частичные суммы этих рядов имеют “номер”, в котором ровно k компонент являются членами лакунарных последовательностей.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10197

1. Рассмотрим N -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_N)$, и положим $(mx) = m_1x_1 + \dots + m_Nx_N$. Введем множества: $\mathbb{Z}^N$, $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$, – множество всех векторов с целочисленными координатами, и множество

$$\mathbb{Z}_1^N = \{n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}^N : n_j \geq 1, j = 1, \dots, N\}.$$

Пусть $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – неубывающая функция. Через $\Phi(L)(\mathbb{T}^N)$ обозначим множество суммируемых на

$$\mathbb{T}^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\pi \leq x_j \leq \pi, j = 1, \dots, N\}$$

функций f таких, что

$$\int_{\mathbb{T}^N} \Phi(|f(x)|) dx < \infty.$$

Если $\Phi(u) = u^p$, $p \geq 1$, то обозначим $\Phi(L) = L_p$; если $\Phi(u) = u \log^+ u$, где $\log^+ u = \log \max\{1, u\}$, то $\Phi(L) = L \log^+ L$.

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, $0 < \mu \mathfrak{A} < (2\pi)^N$ (μ – N -мерная мера Лебега), и пусть 2π -периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье: $f(x) \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} c_m e^{i(mx)}$; символом $S_n(x; f)$, где $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$, будем обозначать прямоугольную частичную сумму этого ряда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00417).

2. Рассмотрим M – множество чисел $\{1, \dots, N\}$ и $k \in M$. Обозначим: $J_k = \{j_1, \dots, j_k\}$, $j_s < j_t$ при $s < t$, и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1, \dots, m_{N-k}\}$, $m_s < m_t$ при $s < t$, – непустые подмножества множества M . Будем также считать, что $J_0 = M \setminus J_N = \emptyset$.

Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ на сумму двух подпространств:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[J_k] &= \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in M \setminus J_k\}, \\ \mathbb{R}[M \setminus J_k] &= \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in J_k\}.\end{aligned}$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{T}^N$ – произвольное (непустое) открытое множество. Положим

$$W[J_s] = \Omega[J_s] \times \mathbb{T}[M \setminus J_s], \quad s = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

где $\Omega[J_s] = \text{pr}_{(J_s)}\{\Omega\}$ – ортогональная проекция множества Ω на пространство $\mathbb{R}[J_s]$,

$$\mathbb{T}[M \setminus J_s] = \{x \in \mathbb{R}[M \setminus J_s] : -\pi \leq x_j \leq \pi \text{ при } j \in M \setminus J_s\}.$$

Фиксируем произвольное J_k , $k = 0, 1, \dots, N-s$, $s = 1, 2$, и определим множества:

$$W_s = W_s(J_k) = \bigcup_{J_s \subset M \setminus J_k} W[J_s], \quad (2)$$

и

$$W_s^0 = W_s^0(J_k) = \bigcap_{J_s \subset M \setminus J_k} W[J_s]. \quad (3)$$

Пусть далее $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_1^k$, $j_i \in J_k$, $i = 1, \dots, k$. Символом $n^{(\lambda)} = n^{(\lambda)}[J_k] = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ будем обозначать такой N -мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей, т.е. для $j \in J_k$:

$$n_j = n_j^{(\lambda_j)}, \quad n_j^{(1)} = 1, \quad \frac{n_j^{(\lambda_j+1)}}{n_j^{(\lambda_j)}} \geq q_j > 1, \quad \lambda_j = 1, 2, \dots,$$

и $n_j^{(\lambda_j)} \rightarrow \infty$ при $\lambda_j \rightarrow \infty$. Положим

$$q = q(J_k) = (q_{j_1}, \dots, q_{j_k}) \in \mathbb{R}^k, \quad j_i \in J_k, \quad i = 1, \dots, k. \quad (4)$$

3. В работе Блошанского [1] было введено следующее понятие слабой обобщенной локализации почти всюду (п.в.) для рядов Фурье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье функций из класса $\Phi(L)(\mathbb{T}^N)$ справедлива на множестве $\mathfrak{A}$ *слабая обобщенная локализация почти всюду* (СОЛ), если для любой функции $f \in \Phi(L)(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, существует подмножество положительной меры $\mathfrak{A}_1$ множества $\mathfrak{A}$ такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0 \quad \text{почти всюду на } \mathfrak{A}_1^2.$$

¹При этом любой вектор $z = (z_1, \dots, z_{2N}) \in \Omega[J_s] \times \mathbb{T}[M \setminus J_s]$ мы отождествляем с вектором $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ по формуле: $x_m = z_m$ при $m \in J_s$ и $x_m = z_{N+m}$ при $m \in M \setminus J_s$.

²Символ $n \rightarrow \infty$ означает у нас, что $\min_{1 \leq j \leq N} n_j \rightarrow \infty$.

Как известно (см. [1]), для справедливости СОЛ для кратных тригонометрических рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам) функций $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geq 1$, на произвольном измеримом множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, $\mu\mathfrak{A} > 0$, достаточно, чтобы в данное множество вписывался п.в. некоторый “брусочный крест” $W_2(J_0)$ вида (2) (т.е. $\mu(W_2(J_0) \setminus \mathfrak{A}) = 0$) при $p > 1$, и некоторый “плоскостной крест” $W_1(J_0)$ вида (2) (т.е. $\mu(W_1(J_0) \setminus \mathfrak{A}) = 0$) при $p = 1$. Предел последовательности частичных сумм $S_n(x; f)$ при $n \rightarrow \infty$ в таком случае будет равен нулю п.в. в “центре” (3) соответствующего “креста”.

С другой стороны (см. [2]), если последовательность прямоугольных частичных сумм кратного ряда Фурье является “ J_k -лакунарной последовательностью” (т.е. частичная сумма $S_n(x; f)$ имеет “номер” $n = n^{(\lambda)}[J_k]$, $1 \leq k \leq N - 2$, $N \geq 3$), то для справедливости СОЛ на множестве $\mathfrak{A}$ для кратных рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам) функций $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, достаточно, чтобы в данное множество вписывался п.в. уже некоторый “неполный брусочный крест” $W_2(J_k)$ вида (2) (т.е. $\mu(W_2(J_k) \setminus \mathfrak{A}) = 0$), вообще говоря, “меньший”, чем $W_2(J_0)$.

Как оказалось (см. [3]), в классе $L_1(\mathbb{T}^N)$, начиная с двумерного случая, аналогичный результат не верен, точнее, для любого $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N - 1$, была построена функция $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на “неполном плоскостном кресте” $W_1(J_k)$ вида (2), для которой кратный ряд Фурье с “ J_k -лакунарной последовательностью частичных сумм” неограниченно расходится п.в. на всем кубе $\mathbb{T}^N$. В работах [4], [5] было показано, что последний факт имеет место и в классах Орлича $\Phi(L)(\mathbb{T}^N)$, где $\Phi(u) = o(u \ln \ln u)$ при $u \rightarrow \infty$, $N \geq 2$. Возникает вопрос: в каких классах Орлича для справедливости СОЛ на множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, $\mu\mathfrak{A} > 0$, для кратных рядов Фурье с “ J_k -лакунарной последовательностью частичных сумм” еще сохраняются структурно-геометрические характеристики множеств, гарантирующие справедливость СОЛ в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$ (найденные в [2]).

4. В настоящей работе нами показано, что эти характеристики гарантируют справедливость СОЛ в классах $L(\log^+ L)^{3k+2}(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 3$, где k – число лакунарных компонент в номере прямоугольной частичной суммы, а именно справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для любого $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N - 2$, $N \geq 3$, и для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{3k+2}(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $W_2(J_k)$, “ J_k -лакунарная последовательность частичных сумм” ряда Фурье функции f , т.е. $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$, сходится почти всюду к нулю на множестве $W_2^0(J_k)$, точнее,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in W_2^0(J_k). \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат теоремы показывает, что если k компонент ($1 \leq k \leq N - 2$) “номера” $n \in \mathbb{Z}_1^N$ прямоугольной частичной суммы $S_n(x; f)$ будут элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей, то для кратных рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам) в классах $L(\log^+ L)^{3k+2}(\mathbb{T}^N)$ при $N \geq 3$ будет справедлива СОЛ на “кресте” $W_2(J_k)$. Отметим, что при возрастании k (т.е. при увеличении числа лакунарных компонент в “номере” n) возрастают требования к “гладкости” разлагаемой в ряд Фурье функции f , но при этом мы получаем

увеличение множества, на котором рассматриваемый ряд сходится, с одновременным уменьшением множества, на котором необходимо равенство нулю функции f . И, наконец, при “максимальной гладкости” функции f ($f \in L(\log^+ L)^{3N-4}(\mathbb{T}^N)$) указанные множества совпадают, т.е.

$$W_2^0(J_{N-2}) = W_2(J_{N-2}) = W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2].$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Фиксируем произвольное k , $1 \leq k \leq N-2$, $N \geq 3$. Не ограничивая общности, будем считать, что $J_k = \{N-k+1, \dots, N\}$, соответственно, $M \setminus J_k = \{1, \dots, N-k\}$. Пусть r, v, l – целые числа, $0 \leq r, v, l \leq N-k$, $r+v+l = N-k$, и пусть $m = (m_1, \dots, m_{N-k}) \in \mathbb{Z}^{N-k}$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta(r, v, l) = \{m \in \mathbb{Z}^{N-k} : 0 = m_0 < m_1 < \dots < m_r \leq N-k, \\ 0 = m_0 < m_{r+1} < \dots < m_{r+v} \leq N-k; \\ 1 \leq m_{r+v+1} < \dots < m_{r+v+l} \leq N-k, \\ m_{p_1} \neq m_{p_2} \text{ при } p_1 \neq p_2\}, \\ 0 \leq r, v, l \leq N-k, \quad r+v+l = N-k. \end{aligned} \quad (6)$$

Для любого вектора $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k}) \in \mathbb{R}^{N-k}$, $0 < \delta_j \leq \pi$, $j = 1, \dots, N-k$, можем расписать частичную сумму $S_{n^{(\lambda)}}(x; f)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{n^{(\lambda)}}(x; f) &= \frac{1}{\pi^N} \left\{ \int_{-\pi}^{-\delta_1} + \int_{-\delta_1}^{\delta_1} + \int_{\delta_1}^{\pi} \right\} \dots \left\{ \int_{-\pi}^{-\delta_{N-k}} + \int_{-\delta_{N-k}}^{\delta_{N-k}} + \int_{\delta_{N-k}}^{\pi} \right\} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{T}^k} f(x+u) D_{n^{(\lambda)}}(u) du \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r, v, l \leq N-k \\ r+v+l=N-k}} \sum_{m \in \Delta(r, v, l)} \frac{1}{\pi^N} \int_{-\pi}^{-\delta_{m_1}} \dots \int_{-\pi}^{-\delta_{m_r}} \int_{-\delta_{m_{r+1}}}^{\delta_{m_{r+1}}} \dots \int_{-\delta_{m_{r+v}}}^{\delta_{m_{r+v}}} \\ &\quad \int_{\delta_{m_{r+v+1}}}^{\pi} \dots \int_{\delta_{m_{r+v+l}}}^{\pi} \int_{\mathbb{T}^k} f(x+u) D_{n^{(\lambda)}}(u) du \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r, v, l \leq N-k \\ r+v+l=N-k}} \sum_{m \in \Delta(r, v, l)} A_{n^{(\lambda)}}^{(r, v, l)}(m; \delta, x, f), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$D_{n^{(\lambda)}}(u) = D_{n_1}(u_1) \dots D_{n_{N-k}}(u_{N-k}) D_{n_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}}(u_{N-k+1}) \dots D_{n_N^{(\lambda_N)}}(u_N),$$

$D_{n_j}(u_j) = \sin(n_j + 1/2)u_j/2 \sin(u_j/2)$ – одномерное ядро Дирихле, $n_j \in \mathbb{Z}_1^1$, $j = 1, \dots, N$.

При этом мы предполагаем, что при $r = 0$ в (7) отсутствуют интегралы вида $\int_{-\pi}^{-\delta_j}$, при $v = 0$ – интегралы вида $\int_{-\delta_j}^{\delta_j}$, при $l = 0$ – интегралы вида $\int_{\delta_j}^{\pi}$, где $j = 1, \dots, N-k$.

Обозначим через $B_{n^{(\lambda)}}^{(r, v, l)}(\delta, x, f)$ внутреннюю сумму в (7), т.е.

$$B_{n^{(\lambda)}}^{(r, v, l)}(\delta, x, f) = \sum_{m \in \Delta(r, v, l)} A_{n^{(\lambda)}}^{(r, v, l)}(m; \delta, x, f) \quad (8)$$

(число слагаемых в сумме (8), в силу определения множества $\Delta(r, v, l)$ (6), равно $(N - k)!/(r!v!l!)$).

В таком случае, учитывая (7) и (8), имеем

$$S_{n^{(\lambda)}}(x; f) = \sum_{\substack{0 \leq r, v, l \leq N-k \\ r+v+l=N-k}} B_{n^{(\lambda)}}^{(r, v, l)}(\delta, x, f).$$

Разобьем последнюю сумму на три суммы:

$$\begin{aligned} S_{n^{(\lambda)}}(x; f) &= \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq N-k \\ v=0 \\ r+l=N-k}} B_{n^{(\lambda)}}^{(r, v, l)}(\delta, x, f) \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq N-k \\ v=1 \\ r+l=N-k-1}} B_{n^{(\lambda)}}^{(r, v, l)}(\delta, x, f) + \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq N-k \\ 2 \leq v \leq N-k \\ r+v+l=N-k}} B_{n^{(\lambda)}}^{(r, v, l)}(\delta, x, f) \\ &= B_{n^{(\lambda)}}^{(0)}(\delta, x, f) + B_{n^{(\lambda)}}^{(1)}(\delta, x, f) + B_{n^{(\lambda)}}^{(2)}(\delta, x, f). \end{aligned} \quad (9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого вектора $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k}) \in \mathbb{R}^{N-k}$, $0 < \delta_i \leq \pi$, $i = 1, \dots, N - k$, $B_{n^{(\lambda)}}^{(0)}(\delta, x, f) \rightarrow 0$ при $\lambda_j \rightarrow \infty$, $j \in J_k$, $n_j \rightarrow \infty$, $j \in M \setminus J_k$, п.в. на $\mathbb{T}^N$; более того,

$$\left\| \sup_{\substack{\lambda_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n^{(\lambda)}}^{(0)}(\delta, x, f)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^N)} \leq C \int_{\mathbb{T}^N} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^{3k-1} dx + C,$$

где константа C не зависит от функции f , $C = C(\delta, k, q)$, а величина q удовлетворяет условию (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим и оценим $B_{n^{(\lambda)}}^{(r, v, l)}(\delta, x, f)$ при $v = 0$, $0 \leq r, l \leq N - k$, $r + l = N - k$. Имеем

$$B_{n^{(\lambda)}}^{(r, 0, l)}(\delta, x, f) = \sum_{m \in \Delta(r, 0, l)} A_{n^{(\lambda)}}^{(r, 0, l)}(m; \delta, x, f). \quad (10)$$

Фиксируем произвольный вектор $m \in \Delta(r, 0, l)$ и рассмотрим $A_{n^{(\lambda)}}^{(r, 0, l)}(m; \delta, x, f)$ из суммы (10). В силу (6) и (7) можем записать

$$\begin{aligned} A_{n^{(\lambda)}}^{(r, 0, l)}(m; \delta, x, f) &= \frac{1}{\pi^N} \int_{-\pi}^{-\delta_{m_1}} \cdots \int_{-\pi}^{-\delta_{m_r}} \int_{\delta_{m_{r+1}}}^{\pi} \cdots \int_{\delta_{m_{r+l}}}^{\pi} \\ &\quad \int_{\mathbb{T}^k} f(x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) D_{n_1}(u_1) \cdots D_{n_{N-k}}(u_{N-k}) \\ &\quad \times D_{n_{N-k+1}}^{(\lambda_{N-k+1})}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N}^{(\lambda_N)}(u_N) du_1 \dots du_N. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как

$$|D_{n_j}(u_j)| \leq C(\delta_j) = \text{const} \quad \text{при} \quad \delta_j \leq |u_j| \leq \pi, \quad (12)$$

из (11) получаем (с учетом 2π -периодичности функции $f(x)$ по каждой переменной):

$$\begin{aligned} & |A_{n(\lambda)}^{(r,0,l)}(m; \delta, x, f)| \\ & \leq C_0(\delta) \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{\pi^k} \int_{\mathbb{T}^k} f(u_1, \dots, u_{N-k}, x_{N-k+1} + u_{N-k+1}, \dots, x_N + u_N) \right. \\ & \quad \times D_{n_{N-k+1}}^{(\lambda_{N-k+1})}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N}^{(\lambda_N)}(u_N) \\ & \quad \left. \times du_{N-k+1} \dots du_N \right| du_1 \dots du_{N-k}, \end{aligned}$$

где $C_0(\delta) = (1/\pi^{N-k})C(\delta_{m_1}) \cdots C(\delta_{m_{r+l}})$.

Выражение под знаком модуля для почти всех $(u_1, \dots, u_{N-k}) \in \mathbb{T}^{N-k}$ можно рассматривать как частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ по переменным $x_{N-k+1}, \dots, x_N$. Обозначим эту частичную сумму

$$S_{n_{N-k+1}}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, n_{N-1}^{(\lambda_{N-1})}, n_N^{(\lambda_N)}(x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; u_1, \dots, u_{N-k}).$$

Для оценки мажоранты данной частичной суммы воспользуемся неравенством Ханта [6]:

$$\left\| \sup_{n>0} |S_n(x; g)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^1)} \leq C[1 + \|g(\log^+ |g|)^2\|_{L_1(\mathbb{T}^1)}]$$

и результатом Санадзе, Хеладзе [7]:

$$\left\| \sup_{\nu_1, \dots, \nu_{\varkappa-1}, n_{\varkappa}} |S_{n_1^{(\nu_1)}, \dots, n_{\varkappa-1}^{(\nu_{\varkappa-1})}, n_{\varkappa}}(x; g)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^{\varkappa})} \leq C(q)[1 + \|g(\log^+ |g|)^{3\varkappa-1}\|_{L_1(\mathbb{T}^{\varkappa})}], \quad (13)$$

где $\{n_j^{(\nu_j)}\}$, $j = 1, \dots, \varkappa - 1$, — лакунарные последовательности, $\varkappa \geq 2$, q удовлетворяет условию (4).

Имеем для п.в. $(u_1, \dots, u_{N-k}) \in \mathbb{T}^{N-k}$:

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{\lambda_j > 0, j \in J_k} |S_{n_{N-k+1}}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}(x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; u_1, \dots, u_{N-k})| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^k)} \\ & \leq C_1(q) \left[1 + \int_{\mathbb{T}^k} |f(u_1, \dots, u_N)| (\log^+ |f(u_1, \dots, u_N)|)^{3k-1} du_{N-k+1} \dots du_N \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая (14), можем получить оценку для $A_{n(\lambda)}^{(r,0,l)}(m; \delta, x, f)$:

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{\substack{\lambda_j > 0, j \in J_k, \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |A_{n(\lambda)}^{(r,0,l)}(m; \delta, x, f)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^N)} \\ & \leq C_2(q, \delta) \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\mathbb{T}^k} \sup_{\lambda_j > 0, j \in J_k} |S_{n_{N-k+1}}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}(x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; u_1, \dots, u_{N-k})| \right. \\ & \quad \left. dx_{N-k+1} \dots dx_N \right) du_1 \dots du_{N-k} \\ & \leq C_3(q, \delta) (2\pi)^{N-k} \left[1 + \frac{1}{(2\pi)^{N-k}} \int_{\mathbb{T}^N} |f| (\log^+ |f|)^{3k-1} du \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу произвольности выбора вектора m из множества $\Delta(r, 0, l)$ оценка (15) справедлива для каждого слагаемого в сумме (10) при $v = 0$. Следовательно, учитывая количество элементов в множестве $\Delta(r, 0, l)$, получаем с учетом (15):

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{\substack{\lambda_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n^{(\lambda)}}^{(r, 0, l)}| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^N)} &= \left\| \sup_{\substack{\lambda_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} \left| \sum_{m \in \Delta(r, 0, l)} A_{n^{(\lambda)}}^{(r, 0, l)}(m; \delta, x, f) \right| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^N)} \\ &\leq \sum_{m \in \Delta(r, 0, l)} \left\| \sup_{\substack{\lambda_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |A_{n^{(\lambda)}}^{(r, 0, l)}(m; \delta, x, f)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^N)} \\ &\leq \frac{(N-k)!}{r!l!} C_4(q, \delta) \left[1 + \int_{\mathbb{T}^N} |f| (\log^+ |f|)^{3k-1} du \right]. \end{aligned}$$

Окончательно мы получаем оценку для $\sup_{\substack{\lambda_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n^{(\lambda)}}^{(0)}(\delta, x, f)|$, где

$$B_{n^{(\lambda)}}^{(0)}(\delta, x, f) = \sum_{\substack{0 \leq r, l \leq N-k \\ r+l=N-k}} B_{n^{(\lambda)}}^{(r, 0, l)}(\delta, x, f),$$

а именно:

$$\left\| \sup_{\substack{\lambda_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n^{(\lambda)}}^{(0)}(\delta, x, f)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^N)} \leq C(q, \delta, k) \left[1 + \int_{\mathbb{T}^N} |f| (\log^+ |f|)^{3k-1} du \right], \quad (16)$$

$$0 \leq r, l \leq N-k, \quad r+l=N-k.$$

Поскольку оценка (16) справедлива для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{3k-1}(\mathbb{T}^N)$, она справедлива и для функций f/α , где $0 < \alpha < 1$. Положив в таком случае $f := f/\alpha$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sup_{\substack{\lambda_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n^{(\lambda)}}^{(0)}(\delta, x, f)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^N)} \\ \leq C(q, \delta, k) \int_{\mathbb{T}^N} |f| \left(\log^+ \frac{|f|}{\alpha} \right)^{3k-1} du + C(q, \delta, k) \alpha. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, разобьем куб $\mathbb{T}^N$ на 3 множества:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{T}^N : |f| \leq \alpha\}, \\ E_2 &= \left\{ (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{T}^N : \alpha < |f| \leq \frac{1}{\alpha} \right\}, \quad E_3 = \mathbb{T}^N \setminus (E_1 \cup E_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая (18), получим оценку для интеграла из правой части неравенства (17):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^N} |f| \left(\log^+ \frac{|f|}{\alpha} \right)^{3k-1} du &= \left\{ \int_{E_1} + \int_{E_2} + \int_{E_3} \right\} |f| \left(\log^+ \frac{|f|}{\alpha} \right)^{3k-1} du \\ &\leq 2^{3k-1} \left(\log^+ \frac{1}{\alpha} \right)^{3k-1} \int_{E_2} |f| du + \int_{E_3} |f| \left(\log^+ |f| + \log^+ \frac{1}{\alpha} \right)^{3k-1} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2^{3k-1} \left(\log^+ \frac{1}{\alpha} \right)^{3k-1} \int_{\mathbb{T}^N} |f| du + \int_{\mathbb{T}^N} |f| (2 \log^+ |f|)^{3k-1} du \\
 &\leq 2^{3k-1} \left(\log^+ \frac{1}{\alpha} \right)^{3k-1} \left[\int_{\mathbb{T}^N} |f| du + \int_{\mathbb{T}^N} |f| (\log^+ |f|)^{3k-1} du \right] \\
 &\leq 2^{3k-1} \left(\log^+ \frac{1}{\alpha} \right)^{3k-1} \int_{\mathbb{T}^N} |f| (1 + \log^+ |f|)^{3k-1} du.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Обозначим

$$K(f) = \int_{\mathbb{T}^N} |f| (1 + \log^+ |f|)^{3k-1} du,$$

не ограничивая общности будем считать, что $K(f) < 1$. Положив в качестве α в оценке (19) $\alpha = K(f)$, из оценок (16)–(19) получаем

$$\begin{aligned}
 \left\| \sup_{\substack{\lambda_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\lambda)}^{(0)}(\delta, x, f)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^N)} &\leq C_5(q, \delta, k) K(f) \left[\left(\log^+ \frac{1}{K(f)} \right)^{3k-1} + 1 \right] \\
 &\leq C_6(q, \delta, k) K(f) \left(\log^+ \frac{1}{K(f)} \right)^{3k-1}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Выберем функцию $h \in \mathbb{C}^\infty$, удовлетворяющую следующему условию:

$$C_6(q, \delta, k) K(f - h) \left(\log^+ \frac{1}{K(f - h)} \right)^{3k-1} < \varepsilon. \tag{21}$$

Так как

$$\begin{aligned}
 &\limsup_{\substack{\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\lambda)}^{(0)}(\delta, x, f)| \\
 &\leq \limsup_{\substack{\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\lambda)}^{(0)}(\delta, x, h)| + \limsup_{\substack{\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\lambda)}^{(0)}(\delta, x, f - h)|,
 \end{aligned} \tag{22}$$

а для $h \in \mathbb{C}^\infty$ справедливо

$$\limsup_{\substack{\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\lambda)}^{(0)}(\delta, x, h)| = 0 \quad \text{для почти всех } x \in \mathbb{T}^N, \tag{23}$$

из (20), (22), (23) получаем

$$\left\| \limsup_{\substack{\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\lambda)}^{(0)}(\delta, x, f)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^N)} \leq C_6(q, \delta, k) K(f - h) \left(\log^+ \frac{1}{K(f - h)} \right)^{3k-1}. \tag{24}$$

Из (24) в силу оценки (21) имеем

$$\left\| \limsup_{\substack{\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\lambda)}^{(0)}(\delta, x, f)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^N)} = 0.$$

Поэтому

$$\limsup_{\substack{\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\lambda)}^{(0)}(\delta, x, f)| = 0 \quad \text{п.в. на } \mathbb{T}^N,$$

т.е. $B_{n(\lambda)}^{(0)}(\delta, x, f) \rightarrow 0$ п.в. на $\mathbb{T}^N$ при $\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k, n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k$. Предложение 1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любого вектора $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k}) \in \mathbb{R}^{N-k}, 0 < \delta_i \leq \pi, i = 1, \dots, N-k, B_{n(\lambda)}^{(1)}(\delta, x, f) \rightarrow 0$ при $\lambda_j \rightarrow \infty, j \in J_k, n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k$, п.в. на $\mathbb{T}^N$; более того

$$\left\| \sup_{\substack{\lambda_j > 0, j \in J_k \\ n_j > 0, j \in M \setminus J_k}} |B_{n(\lambda)}^{(1)}(\delta, x, f)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^N)} \leq C \int_{\mathbb{T}^N} |f(x)| (\log^+ |f(x)|)^{3k+2} dx + C,$$

где константа C не зависит от функции f , $C = C(\delta, k, q)$, а величина q удовлетворяет условию (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим и оценим $B_{n(\lambda)}^{(r,v,l)}(\delta, x, f)$ при $v = 1, 0 \leq r, l \leq N - k - 1, r + l = N - k - 1$. Для этого рассмотрим и оценим каждое слагаемое в сумме (8) при $v = 1$. Если $v = 1$, то для произвольного вектора $m \in \Delta(r, 1, l)$ соответствующее слагаемое в сумме (8) имеет вид

$$\begin{aligned} & A_{n(\lambda)}^{(r,1,l)}(m; \delta, x, f) \\ &= \frac{1}{\pi^N} \int_{-\pi}^{-\delta_{m_1}} \cdots \int_{-\pi}^{-\delta_{m_r}} \int_{-\delta_{m_{r+1}}}^{\delta_{m_{r+1}}} \int_{\delta_{m_{r+2}}}^{\pi} \cdots \int_{\delta_{m_{r+l+1}}}^{\pi} \int_{\mathbb{T}^k} f(x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) \\ & \quad \times D_{n_1}(u_1) \cdots D_{n_{N-k}}(u_{N-k}) D_{n_{N-k+1}}^{(\lambda_{N-k+1})}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N}^{(\lambda_N)}(u_N) du_1 \cdots du_N, \\ & \quad 0 \leq r, l \leq N - k - 1, \quad r + l = N - k - 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Из (25), учитывая оценку (12) и 2π -периодичность функции $f(x)$ по каждому аргументу, получаем

$$\begin{aligned} & |A_{n(\lambda)}^{(r,1,l)}(m; \delta, x, f)| \\ & \leq C_7(\delta) \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{S}_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; \\ & \quad u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}})| \\ & \quad du_{m_1} \cdots du_{m_r} du_{m_{r+2}} \cdots du_{m_{N-k}}, \end{aligned}$$

где через

$$\tilde{S}_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; \cdot)$$

обозначен интеграл

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}) \\ &= \frac{1}{\pi^{k+1}} \int_{-\delta_{m_{r+1}}}^{\delta_{m_{r+1}}} \int_{\mathbb{T}^k} f(u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, x_{m_{r+1}} + u_{m_{r+1}}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}, \\ & \quad x_{N-k+1} + u_{N-k+1}, \dots, x_N + u_N) \\ & \quad \times D_{n_{m_{r+1}}}(u_{m_{r+1}}) D_{n_{N-k+1}}^{(\lambda_{N-k+1})}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N}^{(\lambda_N)}(u_N) du_{m_{r+1}} du_{N-k+1} \cdots du_N. \end{aligned}$$

Так как $f \in L(\log^+ L)^{3k+2}(\mathbb{T}^N)$, $0 < \delta_{m_{r+1}} \leq \pi$ и

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; \cdot) \\ &= \frac{1}{\pi^{k+1}} \left\{ \int_{\mathbb{T}^{k+1}} - \int_{-\pi}^{-\delta_{m_{r+1}}} \int_{\mathbb{T}^k} - \int_{\delta_{m_{r+1}}}^{\pi} \int_{\mathbb{T}^k} \right\} \\ & \quad f(u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, x_{m_{r+1}} + u_{m_{r+1}}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}, \\ & \quad x_{N-k+1} + u_{N-k+1}, \dots, x_N + u_N) \\ & \quad \times D_{n_{m_{r+1}}}(u_{m_{r+1}}) D_{n_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N^{(\lambda_N)}}(u_N) du_{m_{r+1}} du_{N-k+1} \cdots du_N, \end{aligned}$$

то (с учетом предложения 1) для п.в. $(u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}) \in \mathbb{T}^{N-k-1}$ можно рассматривать

$$\tilde{S}_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; \cdot)$$

как “главный член” частичной суммы ряда Фурье функции $f(x)$ по переменным $x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N$. Обозначим эту частичную сумму

$$\begin{aligned} & S_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}) \\ &= \frac{1}{\pi^{k+1}} \int_{\mathbb{T}^{k+1}} f(u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, x_{m_{r+1}} + u_{m_{r+1}}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}, \\ & \quad x_{N-k+1} + u_{N-k+1}, \dots, x_N + u_N) \\ & \quad \times D_{n_{m_{r+1}}}(u_{m_{r+1}}) D_{n_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}}(u_{N-k+1}) \cdots D_{n_N^{(\lambda_N)}}(u_N) du_{m_{r+1}} du_{N-k+1} \cdots du_N. \end{aligned}$$

По условию теоремы $n_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}$ – элементы лакунарных последовательностей, компонента $n_{m_{r+1}}$ свободна. Применим для оценки мажоранты этой частичной суммы неравенство (13).

Для п.в. $(u_{m_1}, \dots, u_{m_r}, u_{m_{r+2}}, \dots, u_{m_{N-k}}) \in \mathbb{T}^{N-k-1}$ получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \sup_{\lambda_j > 0, j \in J_k} |S_{n_{m_{r+1}}, n_{N-k+1}^{(\lambda_{N-k+1})}, \dots, n_N^{(\lambda_N)}}(x_{m_{r+1}}, x_{N-k+1}, \dots, x_N, f; \cdot)| \right\|_{L_1(\mathbb{T}^{k+1})} \\ & \leq C(q) \left[1 + \int_{\mathbb{T}^{k+1}} |f(u_1, \dots, u_N)| \right. \\ & \quad \left. \times (\log^+ |f(u_1, \dots, u_N)|)^{3k+2} du_{m_{r+1}} du_{N-k+1} \cdots du_N \right]. \end{aligned}$$

Далее, опираясь на те же рассуждения, что и при доказательстве предложения 1, получим оценки для $A_{n^{(r,1,l)}}^{(r,1,l)}(\delta, x, f)$, $B_{n^{(r,1,l)}}^{(r,1,l)}(\delta, x, f)$, а затем и $B_{n^{(r,1,l)}}^{(1)}(\delta, x, f)$, доказав тем самым предложение 2.

Используя теорему Уитни (см. [8; с. 199] или [9]) о разложении произвольного открытого множества Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$) на кубы Q_m , ребра которых параллельны координатным осям, внутренности не пересекаются, а диаметры соизмеримы с расстоянием до замкнутого множества P ($P = \mathbb{R}^N \setminus \Omega$), представим открытое множество W_2^0 (3), $W_2^0 \subset \mathbb{T}^N$, в виде

$$W_2^0 = \bigcup_m Q_m \quad (26)$$

(здесь в качестве замкнутого множества взято множество $P = \mathbb{T}^N \setminus W_2^0$).

Рассмотрим произвольный куб Q_m из объединения (26). Согласно теореме Уитни для этого куба справедлива оценка: $\text{diam } Q_m \leq \text{dist}(Q_m, \mathbb{T}^N \setminus W_2^0) \leq 4 \text{diam } Q_m$, которая позволяет доказать следующий факт (см. работу [2; предложение 3]):

$$B_{n(\lambda)}^{(2)}(\delta, x, f) = 0, \quad x \in Q_m, \quad \delta = (\delta_1, \dots, \delta_{N-k}), \quad \delta_j = \text{diam } Q_m, \quad (27)$$

$j = 1, \dots, N - k$.

Используя разложение (9) для этого δ , можем записать

$$S_{n(\lambda)}(x; f) = B_{n(\lambda)}^{(0)}(\delta, x, f) + B_{n(\lambda)}^{(1)}(\delta, x, f) + B_{n(\lambda)}^{(2)}(\delta, x, f).$$

В таком случае в силу предложений 1, 2 и оценки (27) получаем: для п.в. $x \in Q_m$

$$S_{n(\lambda)}(x; f) \rightarrow 0, \quad \lambda_j \rightarrow \infty, \quad j \in J_k, \quad n_j \rightarrow \infty, \quad j \in M \setminus J_k. \quad (28)$$

Так как соотношение (28) справедливо для любого куба Q_m в множестве W_2^0 , оно справедливо и для п.в. $x \in W_2^0$. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Л. Блошанский, “О критериях слабой обобщенной локализации в n -мерном пространстве”, *Докл. АН СССР*, **271**:6 (1983), 1294–1298.
- [2] И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева, “Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности”, *Матем. заметки*, **84**:3 (2008), 334–347.
- [3] И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева, “О локализации для кратных рядов Фурье с лакунарной последовательностью частичных сумм в классе L_1 ”, *Материалы 15-й Саратовской зимней школы*, Изд-во СГУ, Саратов, 2010, 29–30.
- [4] I. Bloshanskii, O. Lifantseva, Z. Tsukareva, “On localization for multiple Fourier series with lacunary sequences of partial sums in Orlicz spaces”, *The 8-th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computations*, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 2011, 399–400.
- [5] З. Н. Цукарева, “Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье с лакунарной последовательностью частичных сумм в классах Орлича”, *Вестн. Моск. гос. обл. ун-та. Сер. Физ., матем.*, 2012, № 1, 18–22.
- [6] R. A. Hunt, “On the convergence of Fourier series”, *Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues* (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill, 1968, 235–255.
- [7] Д. К. Санадзе, Ш. В. Хеладзе, “О сходимости и расходимости кратных рядов Фурье–Уолша”, *Тр. Тбилисс. матем. ин-та АН Груз. ССР*, **55**, 1977, 93–106.
- [8] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
- [9] H. Whitney, “Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36**:1 (1934), 63–89.

И. Л. Блошанский

Московский государственный областной
университет

E-mail: ig.bloshn@gmail.com

Поступило

26.11.2012

З. Н. Цукарева

Московский государственный областной
университет

E-mail: zoyatsukareva@gmail.com