Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Власенко, А. Г. Руткас, Об одном классе импульсных функционально-дифференциальных уравнений с неатомарным разностным оператором, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 37–49

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:49:44

Об одном классе импульсных функционально-дифференциальных уравнений с неатомарным разностным оператором

Л. А. Власенко, А. Г. Руткас

Установлены условия существования и единственности решения нелинейного функционально-дифференциального уравнения с импульсными воздействиями в банаховом пространстве. Уравнение не является разрешенным относительно производной. Предполагается, что характеристический пучок операторов, отвечающий линейной части уравнения, удовлетворяет ограничению параболического типа в некоторой правой полуплоскости. Рассматриваются приложения к функционально-дифференциальным уравнениям в частных производных не типа Ковалевской.

Библиография: 27 названий.

DOI: 10.4213/mzm10198

1. Введение и предварительные результаты. В связи с многочисленными приложениями в теплофизике, теории вязкоупругости сред, газовой динамике, радиотехнике и т.д. развивается теория функционально-дифференциальных уравнений со скалярными, матричными и операторными коэффициентами [1]–[5]. Мы исследуем следующий класс функционально-дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = F(t, u_t), \quad \text{п.в.} \quad t \geq t_0. \quad (1.1)$$

Здесь A, B – замкнутые линейные операторы, действующие из комплексного банахова пространства X в, вообще говоря, другое комплексное банахово пространство Y с областями определения D_A, D_B соответственно; u_t – общепринятый в теории функционально-дифференциальных уравнений символ, обозначающий функцию $u_t(\tau) = u(t + \tau)$, $-\omega \leq \tau \leq 0$; $F(t, \psi): [t_0, \infty) \times L_1(-\omega, 0; X) \rightarrow Y$; $L_1(-\omega, 0; X)$ – пространство X -значных функций, интегрируемых по Бохнеру на $[-\omega, 0]$. Специфическая особенность уравнения (1.1) состоит в том, что оператор A может быть вырожденным (необратимым). Такая ситуация характерна для общего класса уравнений нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}f_1(t, u_t) = f_2(t, u_t),$$

когда разностный оператор $f_1(t, \varphi) = A\varphi(0)$ не является атомарным в нуле (см. определение в [1; с. 67] и работы [6], [7]). Функционально-дифференциальные уравнения с неатомарным разностным оператором (или D-оператором) встречаются в математических моделях переходных процессов в микроволновых устройствах с многопроводными линиями передач и нелинейными элементами [8]. Уравнения вида (1.1) также называют функционально-дифференциальными уравнениями типа Соболева [9]. Абстрактные уравнения типа Соболева являются операторной формой дифференциальных уравнений в частных производных не типа Ковалевской [10], которые не являются разрешенными относительно старшей производной по времени. Система уравнений не типа Ковалевской, которую рассматривал С. Л. Соболев для описания движения вращающегося волчка с полостью, наполненной жидкостью, является сложной для анализа и представления в операторной форме. Линеаризованные уравнения подобной задачи, полученные и исследованные в [11], допускают удобную операторную трактовку. В дальнейшем уравнение (1.1) с необратимым оператором A будем называть *вырожденным*, а с единичным оператором $A = E$ – *явным*. В общем случае уравнение вида (1.1) будем называть *неявным* или *типа Соболева*.

В ряде прикладных задач, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями, возникает необходимость учитывать импульсные эффекты. Например, в [12] отмечалось, что исследование модели Я. И. Френкеля и Т. А. Конторовой 1938 года из теории пластической деформации приводит к рассмотрению импульсных решений функционально-дифференциальных уравнений, которые претерпевают скачки в определенные моменты времени. Чтобы изучать такие решения уравнения типа Соболева (1.1), мы учитываем импульсные воздействия

$$\Delta_k[Au(t)] \equiv (Au)(t_k + 0) - (Au)(t_k - 0) = \mathfrak{F}_k((Au)(t_k - 0)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

где $\mathfrak{F}_k: \Omega_k \rightarrow Y$ ($\Omega_k \subset Y$) – заданные функции, моменты времени $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ перенумерованы в порядке возрастания $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ и $t_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Отметим, что в более ранних работах, например, в [13], [14], изучались явные функционально-дифференциальные уравнения с импульсной поддержкой.

Начальные условия для уравнения (1.1) зададим в виде

$$u(t) = u_0(t) \quad \text{для п.в.} \quad t_0 - \omega \leq t \leq t_0, \quad (Au)(t_0 + 0) = y_0. \quad (1.3)$$

Мы не предполагаем непрерывную стыковку начальных условий в момент времени t_0 , т.е., вообще говоря,

$$u_0(t_0 - 0) \neq u(t_0 + 0), \quad Au_0(t_0 - 0) \neq Au(t_0 + 0) = y_0.$$

Для явных уравнений подобные начальные условия хорошо известны, например, [2], [5], [15]; для неявных уравнений такие начальные условия ставились, например, в [16]. В (1.3) начальная функция $u_0(t): [t_0 - \omega, t_0] \rightarrow X$ является элементом пространства $L_1(t_0 - \omega, t_0; X)$.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{L}(X, Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов из X в Y , $\mathcal{L}(X, X) = \mathcal{L}(X)$; $W_1^j(a, b; X)$ – пространство Соболева X -значных функций, которые принадлежат $L_1(a, b; X)$ вместе со своими обобщенными производными до порядка j включительно; $L_{1, \text{loc}}(a, \infty; X)$ – пространство функций, которые принадлежат $L_1(a, b; X)$ для всех $b > a$; $W_{1, \text{loc}}^j(a, \infty; X)$ –

пространство функций, которые принадлежат $W_1^j(a, b; X)$ для всех $b > a$; $C^p(I, X)$ – класс X -значных функций, которые являются p раз непрерывно дифференцируемыми на $I \subset \mathbb{R}$, $C(I, X) = C^0(I, X)$.

Подобно подходу, принятому в работе [17], мы будем рассматривать линейный пучок операторов $\lambda A + B$, который существенно влияет на динамику уравнения типа Соболева (1.1). Пучок $\lambda A + B$ определен на $D = D_A \cap D_B \neq \{0\}$ – общей области определения операторов A, B . Для регулярных точек λ существует резольвента $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, которая является голоморфной оператор-функцией. Как и для уравнений типа Соболева с импульсными воздействиями в [18], предполагаем выполнение следующих ограничений:

(H) *пространство Y рефлексивно, в правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq C_1$ пучок операторов $\lambda A + B$ имеет резольвенту $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ и оператор-функция $A(\lambda A + B)^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$ удовлетворяет оценке*

$$\|A(\lambda A + B)^{-1}\| \leq \frac{C_2}{1 + |\lambda|}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq C_1, \quad C_2 > 0. \quad (1.4)$$

В случае единичного оператора $A = E$ оценка (1.4) принимает вид ограничения на резольвенту оператора $-B$, отвечающего абстрактному параболическому уравнению в [19; гл. 1, §§ 3, 6]. Если выполнено предположение (H), то пучок операторов $\lambda A + B$ и соответствующее ему уравнение типа Соболева называются *параболическими* [16], [18]. Приведем свойства параболического пучка операторов. Эти свойства устанавливаются и обосновываются с помощью обобщенных эргодических теорем Хилле для псевдорезольвент [20; с. 299–303]. Справедливы разложения линейала $D = D_A \cap D_B \neq \{0\}$ в прямую сумму линейалов D_1, D_2 и пространства Y в прямую сумму замкнутых подпространств Y_1, Y_2 :

$$D = D_A \cap D_B = D_1 \dot{+} D_2, \quad Y = Y_1 \dot{+} Y_2 \\ D_2 = \operatorname{Ker} A \cap D, \quad Y_2 = B D_2, \quad Y_1 = \overline{A D}, \quad D_1 = (\lambda A + B)^{-1} Y_1,$$

такие, что: операторы A, B отображают D_j в Y_j , $j = 1, 2$, оператор A не вырождается на D_1 , оператор B не вырождается на D_2 . Пары взаимно дополнительных проекторов P_1, P_2 на D_1, D_2 и $Q_1, Q_2 \in \mathcal{L}(Y)$ на Y_1, Y_2 строятся как слабые пределы псевдорезольвент:

$$Q_1 y = \lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re} \lambda \geq C_1}} \lambda A R(\lambda) y, \quad y \in Y, \quad P_1 x = \lim_{\substack{|\lambda| \rightarrow \infty \\ \operatorname{Re} \lambda \geq C_1}} \lambda R(\lambda) A x, \quad x \in D. \quad (1.5)$$

Оператор

$$G = A + B P_2 = A + Q_2 B: D \rightarrow Y, \quad D_G = D,$$

отображает D_j в Y_j , $j = 1, 2$, и имеет обратный оператор G^{-1} , определенный на $A D \dot{+} Y_2$, причем $G^{-1} Q_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B G^{-1} Q_2 = Q_2 \in \mathcal{L}(Y)$. Оператор

$$W = -Q_1 B G^{-1}, \quad D_W = A D \dot{+} Y_2, \quad (1.6)$$

является генератором аналитической полугруппы $U(t)$ в $\mathcal{L}(Y)$. Сужение $W_1 = W|_{Y_1}$ на подпространство Y_1 является генератором аналитической полугруппы $U_1(t)$ в $\mathcal{L}(Y_1)$, причем

$$U(t) = U_1(t) Q_1 + Q_2. \quad (1.7)$$

Для полугруппы $U_1(t)$ справедлива оценка

$$\|U_1(t)\| \leq C_3 e^{C_1 t}, \quad t \geq 0, \quad C_3 > 0. \quad (1.8)$$

Если конечный спектр пучка $\lambda A + B$ представляет собой ограниченное множество, то проекторы Q_j , P_j строятся с помощью контурных интегралов типа Рисса [21]:

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=\gamma} A(\lambda A + B)^{-1} d\lambda, \quad P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=\gamma} (\lambda A + B)^{-1} d\lambda A.$$

В этом случае функционально-дифференциальное уравнение типа Соболева без импульсных воздействий исследовалось в [22].

2. Существование и единственность решения. Относительно правой части уравнения (1.1) будем предполагать, что для каждой функции $\psi \in L_1(-\omega, 0; X)$ функция $t \rightarrow F(t, \psi)$ является элементом пространства $L_{1,\text{loc}}(t_0, \infty; Y)$. Дадим определение решения задачи (1.1)–(1.3). Функция $u(t) \in L_{1,\text{loc}}(t_0 - \omega, \infty; X)$ называется *решением задачи (1.1)–(1.3) на полуоси* $[t_0 - \omega, \infty)$, если выполняются следующие условия: $u(t) \in D$ для п.в. $t \geq t_0$; $Au(t) \in W_1^1(t_k, t_{k+1}; Y)$, $k = 0, 1, \dots$; $Bu(t) \in L_{1,\text{loc}}(t_0, \infty; Y)$; $u(t)$ удовлетворяет начальному условию (1.3) для п.в. $t_0 - \omega \leq t \leq t_0$ и $Au(t)$ удовлетворяет (1.3) при $t = t_0 + 0$; $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) для п.в. $t \geq t_0$; $Au(t)$ удовлетворяет импульсным воздействиям (1.2). Из определения решения $u(t)$ следует, что после возможного изменения на множестве меры нуль функция $Au(t)$ является непрерывной при $t \geq t_0$ и $t \neq t_k$, $k = 1, 2, \dots$; в точках t_k функция $Au(t)$ имеет скачки. Если $u(t) \in L_1(t_0 - \omega, b; X)$, то u_t является непрерывной вектор-функцией от $t \in [t_0, b]$ со значениями в $L_1(-\omega, 0; X)$, т.е. $u_t \in C([t_0, b]; L_1(-\omega, 0; X))$ (следует из теоремы 3.8.3 [23]).

Будем рассматривать правые части $F(t, \psi)$ уравнения (1.1), у которых в качестве отдельных слагаемых присутствуют функции, отвечающие распределенным и сосредоточенным запаздываниям. Примеры таких уравнений возникают в теории линий передач и могут включать много различных интегральных слагаемых (см. уравнение (6) в [8]). Таким образом, на полуоси $[t_0, \infty)$ изучаем следующее функционально-дифференциальное уравнение:

$$\frac{d}{dt}[Au(t)] + Bu(t) = \Psi(u)(t) \doteq f(t, u_t) + g(t, u(t), u(t - \omega_1), \dots, u(t - \omega_m)). \quad (2.1)$$

Здесь

$$f(t, \psi) : [t_0, \infty) \times L_1(-\omega, 0; X) \rightarrow Y, \quad g(t, v) : [t_0, \infty) \times X^{m+1} \rightarrow Y,$$

$v = (v_0, v_1, \dots, v_m)$. Для определенности положим $0 < \omega_1 < \dots < \omega_m = \omega$. Норму в декартовом произведении X^{m+1} обозначим

$$\|v\|_{X^{m+1}} = \sqrt{\sum_{j=0}^m \|v_j\|_X^2}.$$

Явные функционально-дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах с подобными “гибридными” правыми частями изучались в [15]. Различные классы отображений Ψ в качестве правых частей явных уравнений в конечномерных пространствах рассматривались в [2].

Решение задачи (2.1), (1.2), (1.3) на полуоси $[t_0 - \omega, \infty)$ строится последовательно для $k = 1, 2, \dots$ на отрезках $[t_{k-1}, t_k]$ с помощью решений $u(t) = u_k(t)$ уравнения (2.1) без импульсных воздействий на отрезках $[t_{k-1}, t_k]$ с начальными условиями на отрезках $[t_{k-1} - \omega, t_{k-1}]$ и в точках t_{k-1} вида

$$u(t) = u_{k-1}(t) \quad \text{для п.в.} \quad t_{k-1} - \omega \leq t \leq t_{k-1}, \quad (Au)(t_{k-1} + 0) = y_{k-1}, \quad (2.2)$$

$k = 1, 2, \dots$, где

$$y_{k-1} = (Au_{k-1})(t_{k-1} - 0) + \Im_k((Au_{k-1})(t_{k-1} - 0)), \quad (2.3)$$

$k = 2, 3, \dots$.

В предположении, что известны функция $u_{k-1}(t) \in L_1(t_{k-1} - \omega, t_{k-1}; X)$ и вектор $y_{k-1} \in Y$, можно определить решения $u_k(t)$. Функция $u(t) = u_k(t) \in L_1(t_{k-1} - \omega, t_k; X)$ является решением задачи (2.1), (2.2) на $[t_{k-1} - \omega, t_k]$, если выполнены следующие условия: $u(t) \in D$ для п.в. $t \in [t_{k-1}, t_k]$; $Au(t) \in W_1^1(t_{k-1}, t_k; Y)$, $Bu(t) \in L_1(t_{k-1}, t_k; Y)$, $u(t)$ удовлетворяет начальному условию (2.2) для п.в. $t \in [t_{k-1} - \omega, t_{k-1}]$ и $Au(t)$ удовлетворяет (2.2) при $t = t_{k-1} + 0$; $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) для п.в. $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Функция $Au_k(t)$ является непрерывной при $t \in [t_{k-1}, t_k]$ после возможного изменения на множестве меры нуль; решение $u_k(t)$, вообще говоря, не является непрерывным на $[t_{k-1}, t_k]$. Непрерывные решения функционально-дифференциального уравнения типа Соболева изучались в [22].

Условия разрешимости начальной задачи (2.1), (2.2) на отрезке $[t_{k-1} - \omega, t_k]$ приводятся в следующей лемме.

ЛЕММА 1. Пусть выполнено предположение (H), оператор G^{-1} ограничен на своей области определения, функции

$$f(t, \psi): [t_{k-1}, t_k] \times L_1(-\omega, 0; X) \rightarrow Y, \quad g(t, v): [t_{k-1}, t_k] \times X^{m+1} \rightarrow Y$$

удовлетворяют следующим ограничениям: значения функций $Q_1 f(t, \psi)$, $Q_1 g(t, v)$ принадлежат AD ; при фиксированных $\psi \in L_1(-\omega, 0; X)$ и $v \in X^{m+1}$ по аргументу t функции $[BG^{-1}Q_1]^j f(t, \psi)$, $[BG^{-1}Q_1]^j g(t, v)$ принадлежат $L_1(t_{k-1}, t_k; Y)$, $j = 0, 1$; для п.в. $t \in [t_{k-1}, t_k]$ и $j = 0, 1$ справедливы условия Литшица

$$\|[BG^{-1}Q_1]^j [f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)]\| \leq M_{1,j}^k \int_{-\omega}^0 \|\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)\| d\tau, \quad (2.4)$$

$$\|[BG^{-1}Q_1]^j [g(t, v) - g(t, v')]\| \leq M_{2,j}^k \|v - v'\|_{X^{m+1}} \quad (2.5)$$

для любых $\psi_1, \psi_2 \in L_1(-\omega, 0; X)$ и $v, v' \in X^{m+1}$ с константами $M_{1,j}^k$, $M_{2,j}^k$, не зависящими от t , причем

$$M_{2,0}^k \|G^{-1}Q_2\| < 1. \quad (2.6)$$

Тогда для любых начальных условий (2.2) таких, что $u_{k-1}(t) \in L_1(t_{k-1} - \omega, t_{k-1}; X)$ и $y_{k-1} \in AD$, задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение $u(t) = u_k(t)$ на интервале $[t_{k-1} - \omega, t_k]$. Функция $u_k(t)$ при п.в. $t \in [t_{k-1}, t_k]$ удовлетворяет уравнению

$$u(t) = \Phi_1(u)(t) \doteq G^{-1} \left[U(t - t_{k-1})y_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^t U(t - s)Q_1 \Psi(u)(s) ds + Q_2 \Psi(u)(t) \right], \quad (2.7)$$

где $U(t)$ – аналитическая полугруппа в $\mathcal{L}(Y)$ с генератором W (1.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, если $u(t) \in L_1(t_{k-1}-\omega, t_k; X)$, то в силу налагаемых на функции $f(t, \psi)$ и $g(t, v)$ требований для оператора Ψ из правой части уравнения (2.1) имеем

$$\Psi(u)(t) \in L_1(t_{k-1}, t_k; Y), \quad BG^{-1}Q_1\Psi(u)(t) \in L_1(t_{k-1}, t_k; Y).$$

Это означает, что Ψ отображает $L_1(t_{k-1}-\omega, t_k; X)$ в $L_1(t_{k-1}, t_k; Y)$. При доказательстве используются свойства пространств L_1 [23; с. 95–100].

После применения к уравнению (2.1) проекторов Q_1 из (1.5) и $Q_2 = E - Q_1$ получаем эквивалентную систему уравнений

$$\frac{d}{dt}[Au(t)] = W[Au(t)] + Q_1\Psi(u)(t), \quad (2.8)$$

$$Q_2Bu(t) = Q_2\Psi(u)(t). \quad (2.9)$$

С помощью метода вариации постоянных [24; с. 105–109] для абстрактного параболического уравнения (2.8) на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$ с неизвестной функцией $Au(t)$, функцией $Q_1\Psi(u) \in D_W = AD$ в правой части такой, что $Q_1\Psi(u)(t), WQ_1\Psi(u)(t) \in L_1(t_{k-1}, t_k; Y)$, и начальным вектором $y_{k-1} \in D_W$ получаем эквивалентную форму уравнения (2.8):

$$Au(t) = U(t - t_k)y_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^t U(t - s)Q_1\Psi(u)(s) ds, \quad (2.10)$$

где $U(t)$ – аналитическая полугруппа в $\mathcal{L}(Y)$ с генератором W (1.6). Таким образом, из (2.9), (2.10) получаем, что в условиях леммы суммируемая функция $u(t) = u_k(t)$ является решением задачи (2.1), (2.2) на отрезке $[t_{k-1}-\omega, t_k]$, если и только если она при п.в. $t \in [t_{k-1}, t_k]$ удовлетворяет уравнению (2.7) и начальным условиям (2.2).

В пространстве

$$\mathcal{L}_1 = L_1(t_{k-1}-\omega, t_{k-1} + \tau_1; X),$$

где $0 < \tau_1 \leq \tau_0 = \min\{t_k - t_{k-1}, \omega_1\}$ уточним ниже, рассмотрим определенное на функциях $v(t)$ из замкнутого подмножества

$$\mathcal{L}_0 = \{v(t) \in \mathcal{L}_1 : v(t) = u_{k-1}(t) \text{ для п.в. } t_{k-1}-\omega \leq t \leq t_{k-1}\}$$

отображение

$$\Phi(u(t)) = \begin{cases} \Phi_1(u(t)), & \text{для п.в. } t_{k-1} \leq t \leq t_{k-1} + \tau_1, \\ u_{k-1}(t), & \text{для п.в. } t_{k-1}-\omega \leq t \leq t_{k-1}. \end{cases}$$

Отображение Φ_1 определено в (2.7). Понятно, что Φ отображает $\mathcal{L}_0$ само в себя. Используя представление (1.7) полугруппы $U(t)$, оценку (1.8) для полугруппы $U_1(t)$ и условие Липшица (2.5), оценим норму:

$$\|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)\|_{\mathcal{L}_1} \leq (\tau_1 M + M_{2,0}^k \|G^{-1}Q_2\|) \cdot \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{L}_1} \quad \text{для всех } w_1, w_2 \in \mathcal{L}_0,$$

$$M = C_3(\tau_0 M_{1,0}^k + M_{2,0}^k) e^{|C_1|\tau_0} \cdot \|G^{-1}\| \cdot \|Q_1\| + M_{1,0}^k \|G^{-1}Q_2\|,$$

где константы C_1, C_3 участвуют в оценке (1.8). В силу (2.6) можно выбрать $\tau_1 \in (0, \tau_0]$ таким образом, чтобы

$$\tau_1 < \frac{1 - M_{2,0}^k \|G^{-1}Q_2\|}{M}.$$

Тогда отображение Φ является сжимающим из $\mathcal{L}_0$ в $\mathcal{L}_0$. В силу теоремы о неподвижной точке отображение Φ имеет единственную неподвижную точку $u(t) \in \mathcal{L}_0$, которая является решением задачи (2.7), (2.2) на $[t_{k-1} - \omega, t_{k-1} + \tau_1]$.

Если $\tau_1 < t_k - t_{k-1}$, то мы единственным образом продолжаем это решение на отрезок $[t_{k-1} + \tau_1, t_{k-1} + \tau_2]$, где $\tau_2 = \min\{2\tau_1, t_k - t_{k-1}\}$. Для этого рассуждения, предложенные выше, применим к уравнению (1.1) на отрезке $[t_{k-1} + \tau_1, t_{k-1} + \tau_2]$ с начальной функцией $u(t)$ на $[t_{k-1} + \tau_1 - \omega, t_{k-1} + \tau_1]$, которая только что найдена, и начальным условием $(Au)(t_{k-1} + \tau_1 + 0) = (Au)(t_{k-1} + \tau_1 - 0)$. Понятно, что за конечное число шагов мы единственным образом продолжим решение на весь отрезок $[t_{k-1} - \omega, t_k]$. Лемма доказана.

В следующей теореме приводятся условия существования и единственности решения задачи (2.1), (1.2), (1.3).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено предположение (H), оператор G^{-1} ограничен на своей области определения, функции

$$f(t, \psi): [t_0, \infty) \times L_1(-\omega, 0; X) \rightarrow Y, \quad g(t, v): [t_0, \infty) \times X^{m+1} \rightarrow Y$$

удовлетворяют следующим ограничениям: значения функций $Q_1 f(t, \psi)$, $Q_1 g(t, v)$ принадлежат AD ; функции $[BG^{-1}Q_1]^j f(t, \psi)$, $[BG^{-1}Q_1]^j g(t, v)$ при фиксированных $\psi \in L_1(-\omega, 0; X)$ и $v \in X^{m+1}$ по аргументу t принадлежат $L_{1,\text{loc}}(t_0, \infty; Y)$, $j = 0, 1$; при $k = 1, 2, \dots$ справедливы условия Липшица (2.4), (2.5) для п.в. $t \in [t_{k-1}, t_k]$ и $j = 0, 1$ для любых $\psi_1, \psi_2 \in L_1(-\omega, 0; X)$ и $v, v' \in X^{m+1}$ с константами $M_{1,j}^k, M_{2,j}^k$, не зависящими от t и удовлетворяющими неравенствам (2.6). Также предположим, что начальные условия (1.3) являются такими, что $u_0(t) \in L_1(t_0 - \omega, t_0; X)$ и $y_0 \in AD$, а функции $\mathfrak{F}_k: \Omega_k \rightarrow Y$ ($\Omega_k \supset AD$) из импульсных условий (1.2) удовлетворяют включению $\mathfrak{F}_k(AD) \subset AD$. Тогда существует единственное решение $u(t)$ задачи (2.1), (1.2), (1.3) на полуоси $t \geq t_0 - \omega$ и это решение удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} u(t) = & G^{-1}U(t - t_0)Q_1 y_0 + G^{-1} \int_{t_0}^t U(t - s)Q_1 \Psi(u)(s) ds + G^{-1}Q_2 \Psi(u)(t) \\ & + G^{-1} \sum_{t_0 < t_k < t} U(t - t_k) \mathfrak{F}_k((Au)(t_k - 0)) \quad \text{для п.в. } t \geq t_0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 1 выполнено следующее: если $u(t) \in L_{1,\text{loc}}(t_0 - \omega, \infty; X)$, то в силу налагаемых на функции $f(t, \psi)$ и $g(t, v)$ требований для оператора Ψ из правой части уравнения (2.1) имеем

$$\Psi(u)(t) \in L_{1,\text{loc}}(t_0, \infty; Y), \quad BG^{-1}Q_1 \Psi(u)(t) \in L_{1,\text{loc}}(t_0, \infty; Y).$$

Выше было отмечено, что на полуоси $[t_0 - \omega, \infty)$ решение $u(t)$ задачи (2.1), (1.2), (1.3) строится последовательно на конечных отрезках $[t_{k-1}, t_k]$ для $k = 1, 2, \dots$ с помощью решений $u_k(t)$ задач (2.1), (2.2) на интервалах $[t_{k-1}, t_k]$. Начальные векторы $y_1, y_2, \dots$ последовательно определяются в (2.3). Существование и единственность решений $u_k(t)$ устанавливается последовательно для $k = 1, 2, \dots$ с помощью леммы 1. Поэтому функция

$$u(t) = u_0(t) \quad \text{для п.в. } t_0 - \omega \leq t \leq t_0,$$

$$u(t) = u_k(t) \quad \text{для п.в.} \quad t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

является единственным решением задачи (2.1), (1.2), (1.3) на полуоси $[t_0 - \omega, \infty)$.

Для завершения доказательства теоремы убедимся в справедливости формулы (2.11). Решение $u(t)$ удовлетворяет (2.7) для п.в. $t \in [t_{k-1}, t_k]$ и всех $k = 1, 2, \dots$. Из (2.7) при $k = 1$ получаем, что решение $u(t)$ удовлетворяет (2.11) для п.в. $t \in [t_0, t_1]$. Тогда мы найдем $Au(t_1 - 0)$ и подставим это значение в выражение для y_1 в (2.3) при $k = 2$. Имеем

$$y_1 = U(t_1 - t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t_1} U(t_1 - s)Q_1\Psi(u)(s)ds + \Im_1((Au)(t_1 - 0)). \quad (2.12)$$

Из (2.7) при $k = 2$ с использованием соотношения (2.12) устанавливаем, что решение $u(t)$ удовлетворяет (2.11) для п.в. $t_1 \leq t \leq t_2$. Повторяя подобные рассуждения для отрезков $[t_2, t_3], [t_3, t_4], \dots$, получаем требуемый результат. На этом доказательство теоремы завершается.

3. Приложение. Покажем, как полученные результаты применяются к исследованию функционально-дифференциальных уравнений в частных производных не типа Ковалевской. Мы используем сведения о свойствах пространств Соболева и дифференциальных операторов в частных производных из [25]. Введем обозначения: Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$; $L_2 = L_2(\Omega)$ – пространство комплекснозначных функций $u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, суммируемых с квадратом; $W_2^k(\Omega)$ – пространство Соболева порядка k функций из $L_2(\Omega)$; $\bar{W}_2^k(\Omega)$ – замыкание по норме $W_2^k(\Omega)$ множества бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в Ω . Рассмотрим дифференциальное выражение

$$\mathcal{A}(x, D_x)u = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_{\alpha, \beta}(x) D_x^\beta u), \quad (3.1)$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – мультииндексы, $0 \leq \alpha_j, \beta_j \leq N$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$; $D_x = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ – формальный вектор, $D_x^\alpha = \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$. Коэффициенты $a_{\alpha, \beta}(x)$ удовлетворяют условиям гладкости $a_{\alpha, \beta}(x) \in C^{|\alpha|+2N}(\bar{\Omega})$, $a_{\alpha, \beta}(x) = \overline{a_{\beta, \alpha}(x)}$, $a_{0,0}(x)$ – вещественнозначная функция. Предполагаем, что дифференциальное выражение (3.1) является сильно эллиптическим:

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=N} a_{\alpha, \beta}(x) \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \geq \delta |\xi|^{2N}, \quad \delta > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}.$$

Исследуем следующий класс функционально-дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{A}(x, D_x) + a)u(x, t) + (\mathcal{A}^2(x, D_x) + b(x))u(x, t) \\ & = f(x, t, u_t) + g(x, t, u(\cdot, t), u(\cdot, t - \omega)) \quad \text{для п.в.} \quad t \geq t_0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В (3.2) порядок дифференциального оператора $\mathcal{A}(x, D_x) + a$ при производной по времени в два раза ниже порядка дифференциального оператора $\mathcal{A}^2(x, D_x) + b(x)$ в слагаемом без дифференцирования по времени. Интерес к подобным уравнениям

вызван рядом прикладных задач. Например, при описании модели волн изгиба в стержне [26; с. 26–28] таким является уравнение (2.24) для смещения. Относительно уравнения (3.2) предполагаем: a – вещественное число; $b(x) \in W_2^{2N}(\Omega)$; $f(x, t, \psi)$ – отображение из $\Omega \times [t_0, \infty) \times L_1(-\omega, 0; L_2(\Omega))$ в $\mathbb{C}$; $f(x, t, \psi) = f(t, \psi)(x)$ как вектор-функция от t , ψ принимает значения в $L_2(\Omega)$ по переменной x и для каждой $\psi \in L_1(-\omega, 0; L_2(\Omega))$ принадлежит $L_{1,\text{loc}}(t_0, \infty; L_2(\Omega))$; $g(x, t, v_1(\cdot), v_2(\cdot))$ – отображение из $\Omega \times [t_0, \infty) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ в $\mathbb{C}$; $g(x, t, v_1, v_2) = g(t, v_1, v_2)(x) \in L_{1,\text{loc}}(t_0, \infty; L_2(\Omega))$ при всех $v_1, v_2 \in L_2(\Omega)$. По третьему аргументу f является функционалом. Например, можно положить $f(x, t, \psi) = \alpha(x, t)\|\psi\|_{L_2}$ или $f(x, t, \psi) = \alpha(x, t)\beta(J(\psi))$, где α, β – некоторые скалярнозначные функции, J – линейный непрерывный функционал в $L_2(\Omega)$. По третьему и четвертому аргументам g также является функционалом. Примеры нелинейных уравнений в частных производных с подобными правыми частями можно найти, например, в [27; с. 55, 61].

Рассматриваем граничные условия

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} \right|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad \left. \frac{\partial^j \mathcal{A}u}{\partial \nu^j} \right|_{x \in \partial\Omega} = 0 \quad \text{для п.в. } t \geq t_0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.3)$$

Здесь $\partial^j / \partial \nu^j$ – производные по внешней нормали ν к поверхности $\partial\Omega$. Задаем начальные условия

$$u(x, t) = u_0(x, t), \quad (\mathcal{A}(x, D_x) + a)u(x, t_0) = y_0(x) \quad \text{для п.в. } t \in [t_0 - \omega, t_0], \quad x \in \Omega, \quad (3.4)$$

и импульсные воздействия в моменты времени $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, $t_0 < t_1 < t_2 < \dots \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \Delta_k[(\mathcal{A}(x, D_x) + a)u(x, t)] &= J_k(x, (\mathcal{A}(x, D_x) + a)u(x, t_k - 0)) \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \\ \Delta_k[w(x, t)] &= w(x, t_k + 0) - w(x, t_k - 0), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $u_0(x, t) = u_0(t)(x) \in L_1(t_0 - \omega, t_0; L_2(\Omega))$, $y_0(x) \in L_2(\Omega)$, $J_k(x, z): \Omega \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Предполагаем, что $J_k(x, z) \in L_2(\Omega)$ при всех $z \in \mathbb{C}$ и выполняются условия Липшица

$$|J_k(x, z_1) - J_k(x, z_2)| \leq M_3^k |z_1 - z_2| \quad \text{для всех } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \text{для п.в. } x \in \Omega \quad (3.6)$$

с константами M_3^k , не зависящими от x . Заметим, что при сделанных предположениях функции $J_k: x \rightarrow J_k(x, w(x))$ являются элементами пространства $L_2(\Omega)$, если $w(x) \in L_2(\Omega)$. Полагаем

$$\mathfrak{J}_k(w)(x): L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad \mathfrak{J}_k(w)(x) = J_k(x, w(x)).$$

В пространстве $X = Y = L_2(\Omega)$ определим операторы

$$\begin{aligned} Aw &= (\mathcal{A}(x, D_x) + a)w(x), & D_A &= W_2^{2N}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^N(\Omega), \\ Bw &= (\mathcal{A}^2(x, D_x) + b(x))w(x), & D_B &= \{w \in D_A : \mathcal{A}(x, D_x)w \in D_A\}. \end{aligned}$$

Теперь смешанную задачу (3.2)–(3.4) с импульсными воздействиями (3.5) будем интерпретировать как абстрактную задачу (2.1), (1.3) в пространстве $X = Y$ с импульсными воздействиями (1.2). Решение смешанной импульсной задачи (3.2)–(3.5) будем понимать в смысле решения абстрактной импульсной задачи (2.1), (1.2), (1.3). Предполагаем, что коэффициент $a_{0,0}(x)$ при u в дифференциальном выражении

$\mathcal{A}(x, D_x)u$ (3.1) является достаточно большим положительным, так что обратим оператор

$$A_0 w = \mathcal{A}(x, D_x)w(x), \quad D_{A_0} = W_2^{2N}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^N(\Omega) \quad (3.7)$$

с $\mathcal{A}(x, D_x)$ (3.1) [25; гл. V]. Оператор A_0 является самосопряженным; его спектр состоит из счетного множества вещественных собственных чисел конечной кратности $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$ с точкой сгущения на $+\infty$ (в этой последовательности каждое собственное число повторяется с учетом кратности); соответствующие собственные функции $\{e_m(x)\}_{m=1}^\infty$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Пусть в уравнении (3.2) число a является таким, что $-a \in \{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$. Тогда оператор A и уравнение (3.2) являются вырожденными; $\text{Ker } A$ совпадает с собственным подпространством, отвечающим собственному числу $-a$: $\text{Ker } A = \text{Lin}\{e_m \text{ для всех } m: \lambda_m = -a\}$.

Проверим теперь выполнение условий теоремы 1 для смешанной импульсной задачи (3.2)–(3.5). Сначала покажем, что для рассматриваемого пучка дифференциальных операторов $\lambda A + B$ выполнено предположение (H). Введем оператор $B_0 = A_0^2$ с областью определения $D_{B_0} = D_{A_0^2}$ и оператор B_1 умножения на функцию $b(x)$. Нетрудно видеть, что при $\lambda \neq -\lambda_m^2/(a + \lambda_m)$, $\lambda_m \neq -a$ существуют резольвентные операторы

$$\begin{aligned} (\lambda A + B_0)^{-1} w(x) &= \sum_{m=1}^\infty \frac{w_m e_m(x)}{\lambda(\lambda_m + a) + \lambda_m^2}, \\ A(\lambda A + B_0)^{-1} w(x) &= \sum_{m: \lambda_m \neq -a} \frac{(\lambda_m + a) w_m e_m(x)}{\lambda(\lambda_m + a) + \lambda_m^2}, \end{aligned}$$

где w_m – коэффициенты Фурье в разложении в ряд функции $w(x) \in L_2(\Omega)$ по элементам базиса $\{e_m(x)\}_{m=1}^\infty$. С помощью этих представлений устанавливаем существование правой полуплоскости $\text{Re } \lambda \geq C_5$, в которой справедливы оценки

$$\|(\lambda A + B_0)^{-1}\| \leq C_6, \quad \|A(\lambda A + B_0)^{-1}\| \leq \frac{C_7}{1 + |\lambda|} \quad (3.8)$$

с некоторыми положительными константами C_6, C_7 . Пусть

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |b(x)| = b_0 < \frac{1}{C_6}. \quad (3.9)$$

Тогда в полуплоскости $\text{Re } \lambda \geq C_5$ существует обратный оператор

$$\begin{aligned} (\lambda A + B)^{-1} &= (\lambda A + B_0)^{-1} [E + B_1(\lambda A + B_0)^{-1}]^{-1} \\ &= (\lambda A + B_0)^{-1} \sum_{j=0}^\infty (-1)^j [B_1(\lambda A + B_0)^{-1}]^j \in \mathcal{L}(L_2(\Omega)), \end{aligned}$$

причем

$$\|(\lambda A + B)^{-1}\| \leq \frac{C_6}{1 - C_6 b_0}, \quad \|A(\lambda A + B)^{-1}\| \leq \frac{C_7}{(1 - C_6 b_0)(1 + |\lambda|)}, \quad \text{Re } \lambda \geq C_5.$$

Таким образом, предположение (H) выполнено.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} D_1 &= \text{Lin}\{(\bar{b}(x) + a^2)e_m(x) \text{ для всех } m: \lambda_m = -a\}^\perp \cap D_B, \\ D_2 &= \text{Ker } A = \text{Lin}\{e_m(x) \text{ для всех } m: \lambda_m = -a\}, \\ Y_1 &= AD_A = \text{Ker } A^\perp, \quad Y_2 = BD_2 = \text{Lin}\{(b(x) + a^2)e_m(x), m: \lambda_m = -a\}, \\ AD &= D_A \cap \text{Ker } A^\perp = W_2^{2N}(\Omega) \cap \dot{W}_2^N(\Omega) \cap \text{Ker } A^\perp. \end{aligned}$$

Пусть P – оператор проектирования на $\text{Ker } A$ ортогонально AD_A . Так как константа C_6 в (3.8) удовлетворяет неравенству $C_6 \geq 1/a^2$, с использованием (3.9) получаем, что существуют обратные операторы $(B_1 + a^2E)^{-1}, (B_1P + a^2E)^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$. Проекторы Q_1, P_1 (1.5) и $Q_2 = E - Q_1, P_2 = E - P_1$ допускают представления

$$\begin{aligned} Q_1 &= a^2(E - P)(B_1P + a^2E)^{-1}, & P_1 &= (B_1 + a^2E)^{-1}Q_1(B_1 + a^2E), \\ Q_2 &= (B_1 + a^2E)P(B_1P + a^2E)^{-1}, & P_2 &= P(B_1P + a^2E)^{-1}(B_1 + a^2E). \end{aligned}$$

Проекторы P_1, P_2 действуют во всем пространстве $L_2(\Omega)$. Введем подпространство $X_1 = P_1L_2(\Omega)$ и сужение A_1 оператора A на P_1D_A , которое отображает $P_1D_A \subset X_1$ на Y_1 ; $A_1^{-1} \in \mathcal{L}(Y_1, X_1)$. Оператор G допускает замкнутое расширение $\bar{G}$ на D_A и существует ограниченный обратный $\bar{G}^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$:

$$\begin{aligned} \bar{G}u(x) &= Au(x) + (B_1 + a^2E)P_2u(x), \\ \bar{G}^{-1}w(x) &= A_1^{-1}Q_1w(x) + (B_1 + a^2E)^{-1}Q_2w(x). \end{aligned}$$

Сужение $\bar{G}^{-1}$ на $AD \dot{+} Y_2$ есть G^{-1} .

Пусть значения функций $f(t, \psi)(x), g(t, v)(x)$ принадлежат $W_2^{2N}(\Omega) \cap \dot{W}_2^N(\Omega)$. Также пусть при $k = 1, 2, \dots$ выполняются условия Липшица

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi_1)(x) - f(t, \psi_2)(x)\|_{L_2} &\leq M_{1,0}^k \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_1}, \\ \|\mathcal{A}(x, D_x)[f(t, \psi_1)(x) - f(t, \psi_2)(x)]\|_{L_2} &\leq M_{1,1}^k \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_1} \end{aligned} \quad (3.10)$$

для всех $\psi_1, \psi_2 \in L_1(-\omega, 0; L_2)$ и для п.в. $t \in [t_{k-1}, t_k]$ с константами $M_{1,0}^k, M_{1,1}^k$, не зависящими от t , и

$$\begin{aligned} |g(x, t, v_1, v_2) - g(x, t, v'_1, v'_2)| &\leq M_{2,0}^k \|v - v'\|_{L_2 \times L_2}, \\ |\mathcal{A}(x, D_x)[g(x, t, v_1, v_2) - g(x, t, v'_1, v'_2)]| &\leq M_{2,1}^k \|v - v'\|_{L_2 \times L_2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

для всех $v = (v_1, v_2), v' = (v'_1, v'_2) \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, и для п.в. $t \in [t_{k-1}, t_k], x \in \Omega$ с константами $M_{2,0}^k, M_{2,1}^k$, не зависящими от x, t . Справедливо представление

$$\begin{aligned} BG^{-1}Q_1w(x) &= B_1\bar{G}^{-1}Q_1w(x) - aQ_1w(x) + a^2\bar{G}^{-1} \\ &\quad + (E - P)\mathcal{A}(x, D_x) \left[w(x) - \sum_{\lambda_m = -a} w_m(B_1P + a^2E)^{-1}B_1e_m(x) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $BG^{-1}Q_1f(t, \psi)$ и $BG^{-1}Q_1g(t, v_1, v_2)$ при п.в. $t \in [t_{k-1}, t_k]$ удовлетворяют условиям Липшица (2.4), (2.5) из теоремы 1.

Норма оператора $G^{-1}Q_2$ оценивается

$$\|G^{-1}Q_2\| \leq \frac{1}{a^2 - b_0}.$$

Поэтому условие (2.6) теоремы 1 будет выполнено, если константы Липшица $M_{2,0}^k$ в (3.11) оцениваются как

$$M_{2,0}^k < a^2 - b_0. \quad (3.12)$$

Теперь из теоремы 1 вытекает следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть выполняются следующие ограничения: коэффициенты сильно эллиптического дифференциального выражения (3.1) удовлетворяют условиям гладкости $a_{\alpha,\beta}(x) \in C^{|\alpha|+2N}(\Omega)$; $a_{\alpha,\beta}(x) = a_{\beta,\alpha}(x)$; вещественнозначная функция $a_{0,0}(x)$ является достаточно большой положительной, так что обратим оператор A_0 (3.7), (3.1); точка $-a$ принадлежит спектру оператора A_0 ; функция $b(x) \in W_2^{2N}(\Omega)$ удовлетворяет оценке (3.9) с константой C_6 из (3.8). Относительно функций

$$f(x, t, \psi): \Omega \times [t_0, \infty) \times L_1(-\omega, 0; L_2(\Omega)) \rightarrow \mathbb{C},$$

$$g(x, t, v_1(\cdot), v_2(\cdot)): \Omega \times [t_0, \infty) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$$

предполагаем: значения функций $f(t, \psi)(x)$, $g(t, v_1, v_2)(x)$ принадлежат множеству $D_A \cap \text{Ker } A^\perp$; при фиксированных аргументах $\psi \in L_1(-\omega, 0; L_2(\Omega))$ и $v_1, v_2 \in L_2(\Omega)$ по аргументу t функции

$$f(t, \psi)(x), \quad g(t, v_1, v_2)(x), \quad \mathcal{A}(x, D_x)f(t, \psi)(x), \quad \mathcal{A}(x, D_x)g(t, v_1, v_2)(x)$$

принадлежат $L_{1,\text{loc}}(t_0, \infty; L_2(\Omega))$; при $k = 1, 2, \dots$ справедливы условия Липшица (3.10), (3.11) с константами $M_{1,0}^k, M_{1,1}^k, M_{2,0}^k, M_{2,1}^k$, не зависящими от x, t и удовлетворяющими неравенствам (3.12). Также пусть функция $u_0(x, t)$ из начальных условий (3.4) принадлежит классу $u_0(t)(x) \in L_1(t_0 - \omega, t_0; L_2(\Omega))$; $y_0(x) \in D_A \cap \text{Ker } A^\perp$; функции $J_k(x, z)$ из импульсных условий (3.5) принадлежат классу $L_2(\Omega)$ при всех $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяют условиям Липшица (3.6) с константами M_3^k , не зависящими от x , и являются такими, что $J_k(x, w(x)) \in D_A \cap \text{Ker } A^\perp$ для любой функции $w(x) \in D_A \cap \text{Ker } A^\perp$. Тогда существует единственное решение $u(x, t)$ смешанной задачи (3.2)–(3.4) с импульсными воздействиями (3.5).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.
- [2] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматулина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991.
- [3] A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **91**, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1997.
- [4] А. Д. Мышкис, “Смешанные функционально-дифференциальные уравнения”, *Новые проблемы теории функционально-дифференциальных уравнений*, СМФН, **4**, МАИ, М., 2003, 5–120.
- [5] В. В. Власов, Д. А. Медведев, “Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории”, *Функционально-дифференциальные уравнения*, СМФН, **30**, РУДН, М., 2008, 3–173.

- [6] F. Kappel, K. P. Zhang, "On neutral functional differential equations with nonatomic difference operator", *J. Math. Anal. Appl.*, **113**:2 (1986), 311–343.
- [7] E. M. Fernández Berdaguer, "Solutions for a class of neutral differential equations with nonatomic D-operator", *Appl. Math. Optim.*, **14** (1986), 95–105.
- [8] A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko, "Time-domain descriptor models for circuits with multiconductor transmission lines and lumped elements", *Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*, Proceedings of 5-th IEEE International Conference (September 6–10, 2010, Sevastopol, Ukraine), 2010, 102–104.
- [9] J. H. Lightbourne III, S. M. Rankin III, "A partial functional differential equation of Sobolev type", *J. Math. Anal. Appl.*, **93**:2 (1983), 328–337.
- [10] С. Л. Соболев, "Задача Коши для частного случая систем, не принадлежащих типу Ковалевской", *Докл. АН СССР*, **82**:2 (1952), 205–208.
- [11] А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликков, М. Ю. Юркин, "Об устойчивости волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью", *Функц. анализ и его прил.*, **32**:2 (1998), 36–55.
- [12] Л. А. Бекларян, "О квазибегущих волнах", *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 21–68.
- [13] А. Д. Мышкис, "Системы с последствием и релаксацией", *ПММ*, **58**:6 (1994), 141–144.
- [14] A. Anokhin, L. Berezansky, E. Braverman, "Exponential stability of linear delay impulsive differential equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **193**:3 (1995), 923–941.
- [15] G. F. Webb, "Functional differential equations and nonlinear semigroups in L^p -spaces", *J. Differential Equations*, **20**:1 (1976), 71–89.
- [16] L. A. Vlasenko, "An optimal control problem for Sobolev retarded systems", *Funct. Differ. Equ.*, **17**:3–4 (2010), 401–412.
- [17] Р. О. Гринив, С. Ю. Доброхотов, А. А. Шкаликков, "Операторная модель задачи о колебаниях жидкости на упругом основании", *Матем. заметки*, **68**:1 (2000), 66–81.
- [18] Л. А. Власенко, А. Д. Мышкис, А. Г. Руткас, "Об одном классе дифференциальных уравнений параболического типа с импульсными воздействиями", *Дифференц. уравнения*, **44**:2 (2008), 222–231.
- [19] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967.
- [20] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
- [21] А. Г. Руткас, "Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ ", *Дифференц. уравнения*, **11**:11 (1975), 1996–2010.
- [22] A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko, "Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations", *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **55**:1–2 (2003), 125–139.
- [23] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.
- [24] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Appl. Math. Sci., **44**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [25] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
- [26] Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров, *Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн)*, Наука, М., 1982.
- [27] Д. Хенри, *Геометрическая теория полуминейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.

Л. А. Власенко

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина
E-mail: lara@rutrus.com

Поступило

25.12.2012

А. Г. Руткас

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина
E-mail: anatoly@rutrus.com