Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Даллакян, О произведениях Бляшке с конечным интегралом типа Дирихле, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 880–884

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:12:39

О произведениях Бляшке с конечным интегралом типа Дирихле

Р. В. Даллакян

Класс функций с конечным интегралом типа Дирихле определяется как множество голоморфных в единичном круге функций f , удовлетворяющих следующему условию:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r)^\alpha |f'(re^{i\theta})|^p r dr d\theta, \quad \alpha > -1, \quad 0 < p < +\infty.$$

Эти классы обычно обозначаются через D_α^p . В этой работе доказывается обратное утверждение к одной теореме Рудина и, тем самым, дается необходимое и достаточное условие принадлежности произведения Бляшке классу D_0^1 .

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10199

Пусть $\mathcal{D}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathcal{C}$. Обозначим через $\text{Hol}(\mathcal{D})$ множество голоморфных в $\mathcal{D}$ функций. Скажем, что $f \in \text{Hol}(\mathcal{D})$ принадлежит классу D_α^p , $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, если

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r)^\alpha |f'(re^{i\theta})|^p r dr d\theta < +\infty.$$

Далее, D_0^2 – обычный класс функций с конечным интегралом Дирихле. При $\alpha + 1 \leq p$ класс D_α^p называется классом функций с *конечным интегралом типа Дирихле*. Особый интерес представляют классы D_{p-1}^p . Виноградов в [1] доказал, что

$$D_{p-1}^p \subset H^p, \quad 0 < p \leq 2, \quad (1)$$

а Литлвуд и Пэли в [2] доказали, что

$$H^p \subset D_{p-1}^p, \quad 2 \leq p < \infty. \quad (2)$$

В (1) и (2) через H^p обозначены известные классы Харди (см., например, [3], [4]).

Через A_α^p , $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$, обозначим множество тех функций f из $\text{Hol}(\mathcal{D})$, для которых

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-r)^\alpha |f(re^{i\theta})|^p r dr d\theta < +\infty.$$

Из определения классов A_α^p и D_α^p , очевидно следует, что

$$f \in D_\alpha^p \iff f' \in A_\alpha^p.$$

Классы A_α^p некоторыми авторами называются *классами Бергмана* (см., например, книгу [5]). Заметим, что эти классы были исследованы и Джрбашьяном, который обозначил их через $H_p(\alpha)$ (см. [6]). В указанной работе получено следующее параметрическое представление функций классов A_α^2 [6; теорема V]: если $f(z) \in A_\alpha^2$, $\alpha > -1$, то функция (см. также [7])

$$h(z) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \int_0^1 (1 - \rho)^{(\alpha-1)/2} f(\rho z) d\rho, \quad |z| < 1,$$

принадлежит классу H^2 и $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{h(t)}{(1 - \bar{t}z)^{(\alpha+3)/2}} |dt|.$$

Пусть $\{a_n\} \subset \mathcal{D}$, и пусть $B(z)$ – произведение Бляшке с нулями в точках a_n :

$$B(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z} \cdot \frac{|a_n|}{a_n}, \quad |z| < 1,$$

где m – количество тех точек a_n , для которых $a_n = 0$.

Рудин в [8] показал, что если последовательность $\{a_n\}$, $\{a_n\} \subset \mathcal{D}$, удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) \ln \frac{1}{1 - |a_n|} < +\infty, \quad (3)$$

то $B(z) \in D_0^1$. В этой же работе доказано, что существует произведение Бляшке $B(z)$, которое не принадлежит классу D_0^1 . В [9] было доказано, что если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию (3), то

$$B(z) \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} D_{p-1}^p.$$

Возникает такой вопрос: если произведение Бляшке с нулями на последовательности $\{a_n\}$ принадлежит классу D_0^1 , то имеет ли место условие (3). В настоящей работе, опираясь на результаты (1), (2) и на вышеуказанную теорему М. М. Джрбашьяна, удалось дать положительный ответ на этот вопрос, а именно, доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. *Для того, чтобы произведение Бляшке $B(z)$ с нулями на последовательности $\{a_n\}$, $\{a_n\} \subset \mathcal{D}$ принадлежало классу D_0^1 , необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) \ln \frac{1}{1 - |a_n|} < +\infty. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность*, как отмечалось выше, доказана в [8].

Необходимость. Из соотношений (1) и (2) имеем $H^2 = D_1^2$. Но $B(z) \in H^\infty \subset H^2$. Это означает, что $B(z) \in D_1^2$. Значит, $B'(z) \in A_1^2$, следовательно, по вышеупомянутой

теореме Джрбашяна $B'(z)$ допускает представление

$$B'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(e^{i\theta}) d\theta}{(1 - e^{-i\theta}z)^2}, \quad |z| < 1, \quad (5)$$

где функция

$$h(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 B'(\rho z) d\rho, \quad |z| < 1 \quad (6)$$

принадлежит классу H^2 .

Известно, что радиальный предел $B(e^{i\theta})$ функции $B(z)$ существует для всех θ , $\theta \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого множества меры нуль, причем, так как, не умаляя общности, можно предполагать, что $B(0) = 0$, то из (5) получим

$$h(e^{i\theta}) = \frac{2e^{-i\theta}}{\pi} B(e^{i\theta}) \quad (7)$$

Далее, пусть $z = re^{i\varphi} \in \mathcal{D}$, $\gamma = \gamma(\theta) = \arg[B(e^{i\theta})e^{-i\theta}]$, и пусть

$$\alpha = \alpha(r, \varphi - \theta) = \arg[1 - r \cos(\varphi - \theta) + ir \sin(\varphi - \theta)]^2.$$

Так как п.в. $|B(e^{i\theta})| = 1$, то используя (6), из представления (4) будем иметь

$$\begin{aligned} |B'(z)| &= \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^{2\pi} \frac{B(e^{i\theta})e^{-i\theta} d\theta}{(1 - e^{-i\theta}z)^2} \right| \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^{2\pi} \frac{|B(e^{i\theta})e^{-i\theta}|(\cos \gamma + i \sin \gamma)(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{|1 - re^{i(\varphi-\theta)}|^2} d\theta \right| \\ &\geq \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^{2\pi} \frac{\cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha}{|1 - re^{i(\varphi-\theta)}|^2} d\theta \right|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |B'(re^{i\varphi})| r dr d\varphi &\geq \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| \int_0^{2\pi} \frac{\cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha}{|1 - re^{i(\varphi-\theta)}|^2} d\theta \right| r dr d\varphi \\ &\geq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \gamma \cos \alpha}{|1 - re^{i(\varphi-\theta)}|^2} d\varphi d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \gamma \sin \alpha}{|1 - re^{i(\varphi-\theta)}|^2} d\varphi d\theta \right| r dr. \end{aligned}$$

Но так как γ не зависит от φ , то получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |B'(e^{i\varphi})| r dr d\varphi &\geq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \left| \int_0^{2\pi} \cos \gamma \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\varphi}{|1 - re^{i(\varphi-\theta)}|^2} d\theta - \int_0^{2\pi} \sin \gamma \int_0^{2\pi} \frac{\sin \alpha d\varphi}{|1 - re^{i(\varphi-\theta)}|^2} d\theta \right| r dr. \end{aligned} \quad (8)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 1 - \frac{2r^2 \sin^2(\varphi - \theta)}{1 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2}, \\ \sin \alpha &= \frac{2r \sin(\varphi - \theta)[1 - r \cos(\varphi - \theta)]}{1 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2}. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно установить, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\varphi}{|1 - re^{i(\varphi-\theta)}|^2} = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin \alpha d\varphi}{|1 - re^{i(\varphi-\theta)}|^2} = 0.$$

Учитывая эти неравенства, из (7) получаем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 |B'(re^{i\varphi})r dr d\varphi| \geq \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} \cos \gamma(\theta) d\theta \right|. \quad (9)$$

Пусть

$$\gamma_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (10)$$

Известно, что (см., например, теорему Фростмана, [10; с. 55])

$$\gamma(\theta) \leq \gamma_1(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

и что ряд (9) сходится везде на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества E меры нуль. По теореме Егорова (см. [11; с. 97]) для любого $\delta > 0$ существует измеримое множество $E_\delta \subset [0, 2\pi]$ такое, что

- 1) $mE_\delta > 2\pi - \delta$,
- 2) на множестве E_δ ряд (9) сходится равномерно.

Следовательно, можно подобрать N настолько большим, чтобы для любого $\theta \in E_\delta$ выполнялись следующие неравенства:

$$\cos \gamma(\theta) \geq \cos \gamma_1(\theta) \geq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|}. \quad (11)$$

Из (8), используя (10) и (11), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |B'(re^{i\varphi})|r dr d\varphi &\geq \frac{2}{\pi} \left| \int_{E_\delta} \cos \gamma(\theta) d\theta + \int_{2\pi \setminus E_\delta} \cos \gamma(\theta) d\theta \right| \\ &\geq \frac{2}{\pi} \left(\int_{E_\delta} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1 - |a_n|}{|e^{i\theta} - a_n|} d\theta - \delta \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |B'(re^{i\varphi})|r dr d\varphi &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=N}^{\infty} (1 - |a_n|) \int_{E_\delta} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - a_n|} - \frac{2\delta}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=N}^{\infty} (1 - |a_n|) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - a_n|} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=N}^{\infty} (1 - |a_n|) \int_{[0, 2\pi] \setminus E_\delta} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - a_n|} - \frac{2\delta}{\pi}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |B'(re^{i\varphi})|r dr d\varphi \\ \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=N(\delta)}^{\infty} (1 - |a_n|) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - a_n|} - \frac{2}{\pi} \int_{[0, 2\pi] \setminus E_{\delta_0}} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - a_n|} \sum_{n=N(\delta)}^{\infty} (1 - |a_n|) - \frac{2\delta}{\pi}, \end{aligned}$$

где $0 < \delta < \delta_0$. Так как $\sum(1 - |a_n|) < +\infty$, то из последнего неравенства следует, что δ можно подобрать настолько маленьким, чтобы имело место следующее неравенство:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 |B'(re^{i\varphi})| r dr d\varphi \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=N(\delta)}^{\infty} (1 - |a_n|) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - a_n|} - \delta. \quad (12)$$

Но как известно (см. [6; с. 8]), если $|a_n| \rightarrow 1$, то

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} - a_n|} = \ln \frac{1}{1 - |a_n|}.$$

Следовательно, из (12) получаем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 |B'(re^{i\varphi})| r dr d\varphi \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=N(\delta)}^{\infty} (1 - |a_n|) \ln \frac{1}{1 - |a_n|} - \delta.$$

Этим и завершается доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Если $B(z)$ – произведение Бляшке такое, что $B(z) \in D_0^1$, то

$$B(z) \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} D_{p-1}^p.$$

Справедливость этого утверждения следует из доказанной теоремы и из вышеуказанного результата работы [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Виноградов, “Умножение и деление в пространстве аналитических функций с производной, суммируемой по площади, и близких к нему пространствах”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 23, Зап. научн. сем. ПОМИ, **222**, ПОМИ, СПб., 1995, 45–77.
- [2] J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley, “Theorems on Fourier series and power series. II”, *Proc. London Math. Soc.*, **42** (1936), 52–89.
- [3] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Pure Appl. Math, **38**, Acad. Press, New-York, 1970.
- [4] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [5] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Grad. Texts in Math., **199**, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [6] М. М. Джрбашян, “К проблеме представимости аналитических функций”, *Сообщ. ин-та матем. и мех. АН Арм. ССР*, 1948, № 2, 3–55.
- [7] A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian, *Topics in the Theory of A_α^p Spaces*, Teubner-Texte Math., B. G. Teubner, Leipzig, 1988.
- [8] W. Rudin, “The radial variation of analytic functions”, *Duke Math. J.*, **22**:2 (1955), 235–242.
- [9] D. Girela, J. A. Palaez, D. Vukotic, “Integrability of the derivative of a Blaschke product”, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **50**:3 (2007), 673–697.
- [10] Э. Коллингвуд, А. Ловатер, *Теория предельных множеств*, Библиотека сборника “Математика”, Мир, М., 1971.
- [11] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.

Р. В. Даллакян

Государственный инженерный университет Армении

E-mail: dallakyan57@mail.ru

Поступило

16.11.2012