Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Сосов, Наилучшее приближение в метрике Хаусдорфа выпуклого компакта шаром, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 226–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:51:57

УДК 515.124.4

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В МЕТРИКЕ ХАУСДОРФА ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ

Е. Н. Сосов

Получена оценка сверху для расстояния Хаусдорфа от непустого ограниченного множества до множества всех замкнутых шаров строго выпуклого прямого геодезического пространства X неположительной кривизны. Доказано, что множество всех центров $\chi[M]$ замкнутых шаров, наилучшим образом приближающих в метрике Хаусдорфа выпуклый компакт $M \subset X$, непустое и принадлежит M . Исследованы некоторые другие свойства множества $\chi[M]$.

Библиография: 8 названий.

1. Необходимые определения и постановка задачи. Примем следующие обозначения:

- $\mathbb{R}_+$ – множество всех неотрицательных вещественных чисел;
- $B(X)$ (соответственно $B[X]$) – множество всех непустых ограниченных (соответственно замкнутых) множеств метрического пространства (X, ρ) ;
- $B[x, r]$ (соответственно $S(x, r)$) – замкнутый шар (соответственно сфера) с центром в точке $x \in (X, \rho)$, радиуса $r \geq 0$;
- $BC[X]$ – множество всех замкнутых шаров в (X, ρ) ;
- $D[M]$ – диаметр множества $M \in B(X)$;
- $xy = \rho[x, y]$, $xW = \inf\{xy : y \in W\}$;
- $\overline{M}$ (соответственно $\text{Int}[M]$) – замыкание (соответственно внутренность) множества $M \subset X$;
- $[x, y]$ – сегмент с концами в точках $x, y \in X$ (т.е. непрерывная кривая с концами в точках $x, y \in X$, длина которой равна xy [1, с. 42]);
- $\alpha: B(X) \times B(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\alpha[M, W] = \max\{\beta[M, W]; \beta[W, M]\}$ – псевдометрика Хаусдорфа на множестве $B(X)$, где $\beta[M, W] = \sup\{xW : x \in M\}$ (см. [2, с. 223], [3]);
- $\psi[M, x] = (Mx + xM - x(X \setminus M))/2$, $r[M, x] = (Mx - xM + x(X \setminus M))/2$, где $x \in X$, $M \in B(X)$, $M \neq X$, $Mx = \beta[M, x]$ (ср. с [4]);
- $\chi[M] = \{x \in X : \alpha[B[x, r], M] = \alpha[M, BC[X]] \text{ для некоторого } r \geq 0\}$, где $\alpha[M, BC[X]] = \inf\{\alpha[M, B[y, t]] : y \in X, t \geq 0\}$ [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00308.

Пусть $x_M = M \cap B[x, x_M]$. Множество $M \subset X$ называется *множеством существования*, если для каждого $x \in X$ выполнено $x_M \neq \emptyset$ [5].

Метрическое пространство называется *геодезическим пространством*, если любые его две точки можно соединить сегментом с концами в этих точках [6].

Метрическое пространство называется *конечно-компактным метрическим пространством*, если каждое ограниченное замкнутое множество в этом пространстве компактно [1, с. 18].

В дальнейшем на метрическое пространство (X, ρ) будем налагать некоторые из следующих условий (A)–(C):

- (A) для любых двух различных точек пространства X существует единственный сегмент с концами в этих точках;
- (B) для любых двух различных точек пространства X существует единственная прямая, содержащая эти точки (т.е. непрерывная кривая в пространстве X , изометричная множеству R всех вещественных чисел со стандартной метрикой [1, с. 52]);
- (C) для любых $x, y, p \in X$ выполняется неравенство

$$2\omega[p, x]\omega[p, y] \leq xy,$$

где $\omega[p, x]$ – середина сегмента $[p, x]$ [1, с. 304].

Множество M в пространстве X , удовлетворяющем условию (A), называется *выпуклым* (соответственно *строго выпуклым*), если для любых различных $x, y \in M$ (соответственно $x, y \in \bar{M}$) выполнено $[x, y] \subset M$ (соответственно $[x, y] \setminus \{x, y\} \subset \text{Int}[M]$) [1, с. 153].

В утверждении (iv) леммы 2 будет доказано, что из условий (B), (C) следует строгая выпуклость каждого замкнутого шара пространства X . Отметим также, что G -пространство Буземана, удовлетворяющее условию (B), называется *прямым G -пространством Буземана* [1, с. 56], а условие (C) является глобальным условием неположительности кривизны для G -пространства Буземана [1, с. 304]. Это дает основание называть метрическое пространство, удовлетворяющее условиям (B), (C), *строго выпуклым прямым геодезическим пространством неположительной кривизны*. Простыми примерами таких пространств являются строго выпуклое банахово пространство и пространство Лобачевского (возможно бесконечномерное).

Постановка задачи. Получить оценку сверху для расстояния Хаусдорфа от непустого ограниченного множества до множества всех замкнутых шаров строго выпуклого прямого геодезического пространства X неположительной кривизны. Доказать, что множество всех центров $\chi[M]$ замкнутых шаров, наилучшим образом приближающих в метрике Хаусдорфа выпуклый компакт $M \subset X$, непустое и лежит в множестве M . Исследовать некоторые другие свойства множества $\chi[M]$.

Таким образом, задача состоит в распространении некоторых результатов Дудова и Златорунской [4], [7] на случай строго выпуклого прямого геодезического пространства неположительной кривизны. Полученные основные результаты содержатся в теоремах 1–3.

2. Вспомогательные результаты. Установим некоторые простые свойства вышеперечисленных понятий.

ЛЕММА 1. (i) Для любых $M, W \in B(X)$ выполнены оценки

$$|\beta[M, BC[X]] - \beta[W, BC[X]]| \leq \alpha[M, W], \quad |\alpha[M, BC[X]] - \alpha[W, BC[X]]| \leq \alpha[M, W]$$

(см. [2, с. 219], ср. с теоремой 2.1 из [4]), где

$$\beta[M, BC[X]] = \inf \{ \beta[M, V] : V \in BC[X] \}.$$

(ii) Для любых $M \in B(X)$, $M \neq X$, $x, y \in X$ выполнены оценки

$$|\psi[M, x] - \psi[M, y]| \leq \frac{3xy}{2}, \quad |r[M, x] - r[M, y]| \leq \frac{3xy}{2}.$$

(iii) Для любых $M \in B(X)$, $M \neq X$, $x \in M$ выполнена оценка $\psi[M, x] \leq D[M]/2$.

(iv) Для любых $M \in B(X)$, $x \in X \setminus M$ выполнена оценка $r[M, x] \leq D[M]/2$.

(v) Для любых $M \in B(X)$, $M \neq X$, $x \in X$

$$\psi[M, x] = \inf \{ \max[r + xM - x(X \setminus M), Mx - r] : r \geq 0 \},$$

где $\inf$ достигается при $r = r[M, x]$ (ср. с леммой 3.4 из [4]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Из неравенства треугольника для функции β следует

$$\begin{aligned} \beta[M, BC[X]] &= \inf \{ \beta[M, V] : V \in BC[X] \} \\ &\leq \inf \{ \beta[M, W] + \beta[W, V] : V \in BC[X] \} \leq \alpha[M, W] + \beta[W, BC[X]]. \end{aligned}$$

Неравенство $\beta[W, BC[X]] \leq \alpha[M, W] + \beta[M, BC[X]]$ доказывается аналогично.

(ii) Из неравенства треугольника для функции β и неравенства из [2, с. 219] следует

$$|\psi[M, x] - \psi[M, y]| \leq \frac{1}{2}(|Mx - My| + |xM - yM| + |y(X \setminus M) - x(X \setminus M)|) \leq \frac{3xy}{2}.$$

Для второго неравенства доказательство аналогично.

(iii) Свойство следует из неравенств

$$\psi[M, x] = \frac{1}{2}(Mx - x(X \setminus M)) \leq \frac{Mx}{2} \leq \frac{D[M]}{2}.$$

(iv) Пусть $x \in X \setminus M$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $z, y \in M$ такие, что $Mx \leq zx + \varepsilon$, $xy \leq xM + \varepsilon$. Утверждение следует теперь из неравенств

$$r[M, x] = \frac{1}{2}(Mx - xM) \leq \frac{1}{2}(zx - xy) \leq \frac{zy}{2} \leq \frac{D[M]}{2}.$$

(v) Неравенство

$$\psi[M, x] \geq \inf \{ \max[r + xM - x(X \setminus M), Mx - r] : r \geq 0 \}$$

получается, если положить $r = r[M, x]$. Если $r + xM - x(X \setminus M) \geq Mx - r$, то $r \geq r[M, x]$. Следовательно,

$$\max[r + xM - x(X \setminus M), Mx - r] = r + xM - x(X \setminus M) \geq \psi[M, x].$$

Если $r + xM - x(X \setminus M) \leq Mx - r$, то $r \leq r[M, x]$. Следовательно,

$$\max[r + xM - x(X \setminus M), Mx - r] = Mx - r \geq \psi[M, x].$$

Таким образом, получено неравенство

$$\psi[M, x] \leq \inf \{ \max[r + xM - x(X \setminus M), Mx - r] : r \geq 0 \}.$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть пространство (X, ρ) удовлетворяет условию (В). Тогда имеют место следующие утверждения:

- (i) для любых $M \in B(X)$, $x \in X$ выполнено $r[M, x] \leq D[M]/2$;
- (ii) пространство $(BC[X], \alpha)$ изометрично пространству $(X \times \mathbb{R}_+, \rho + d)$, где d – стандартная метрика на $\mathbb{R}_+$;
- (iii) для любых $x, y \in X$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$, $r = (r_1 + r_2)/2$ выполнено

$$\alpha[B[x, r_1], B[\omega[x, y], r]] = \alpha[B[y, r_2], B[\omega[x, y], r]] = \frac{1}{2}\alpha[B[x, r_1], B[y, r_2]];$$

- (iv) если, кроме того, пространство (X, ρ) удовлетворяет условию (С), то каждый замкнутый шар пространства X является строго выпуклым множеством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) В силу утверждения (iv) леммы 1 достаточно рассмотреть случай, когда $x \in M$. Если $M = \{x\}$, то доказательство очевидно. Если $M \neq \{x\}$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется точка $u \in M \setminus \{x\}$ такая, что $ux \geq Mx - \varepsilon$. Пусть $P[u, x]$ – полупрямая с началом в точке u , содержащая точку x , и точка $y \in \overline{M} \cap P[u, x]$ такова, что $yu = D[\overline{M} \cap P[u, x]]$. Тогда

$$r[M, x] = \frac{1}{2}(Mx + x(X \setminus M)) \leq \frac{1}{2}(ux + xy - \varepsilon) = \frac{1}{2}(uy - \varepsilon) \leq \frac{1}{2}|D[M] - \varepsilon|.$$

Таким образом, второе утверждение верно в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$.

- (ii) Определим отображение $f: (BC[X], \alpha) \rightarrow (X \times \mathbb{R}_+, \rho + d)$ формулой

$$f[B[x, r]] = (x; r).$$

Тогда для любых $x, y \in X$, $r, R \in \mathbb{R}_+$

$$(\rho + d)[f[B[x, r]], f[B[y, R]]] = xy + |r - R| = \alpha[B[x, r], B[y, R]].$$

Следовательно, f – изометрия.

- (iii) Докажем одно из равенств непосредственным вычислением:

$$\alpha[B[x, r_1], B[\omega[x, y], r]] = x\omega[x, y] + |r_1 - r| = \frac{1}{2}(xy + |r_1 - r_2|) = \frac{1}{2}\alpha[B[x, r_1], B[y, r_2]].$$

(iv) Пусть $B[p, r]$ – произвольный замкнутый шар в пространстве X и $x, y \in B[p, r]$. Рассмотрим функцию $f = pz[t]$, где $z = z[t]$ – параметризация сегмента $[x, y]$ длиной дуги. Из неравенств

$$|pz[t] - pz[t_1]| \leq z[t]z[t_1] = |t - t_1|$$

для любых $t, t_1 \in [0, xy]$ следует, что функция f непрерывна. Кроме того, из условия (С) и неравенства треугольника для любых $t, t_1 \in [0, xy]$ получим

$$\begin{aligned} f\left[\frac{t+t_1}{2}\right] &= p\omega[z[t], z[t_1]] \leq p\omega[p, z[t]] + \omega[p, z[t]]\omega[z[t], z[t_1]] \\ &\leq \frac{1}{2}(pz[t] + pz[t_1]) = \frac{1}{2}(f[t] + f[t_1]). \end{aligned}$$

Следовательно, функция f выпуклая и $[x, y] \subset B[p, r]$. Таким образом, каждый замкнутый шар пространства X является выпуклым множеством (это свойство нетрудно также получить, используя доказательства теорем 36.4–36.6 из [1, с. 304–307]). Докажем строгую выпуклость замкнутого шара $B[p, r]$ методом от противного. Пусть этот шар не является строго выпуклым множеством. Тогда найдутся попарно различные точки x, y, z такие, что $px = py = pz = r$ и $z \in [x, y]$. Выберем на прямой $L[p, z]$, содержащей точки p, z , точку u , удовлетворяющую условиям: $u \neq z$ и $p \in [z, u]$. Тогда из условия (В) и неравенства треугольника следует, что $uz = up + r > \max[ux, uy]$. Следовательно, замкнутый шар $B[u, \max[ux, uy]]$ невыпуклый. Получили противоречие (ср. с теоремой 36.7 из [1, с. 307]). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Пусть метрическое пространство X удовлетворяет условиям (А), (С). Тогда имеют место следующие утверждения:

- (i) для любых $x, y \in X$, $M \in B(X)$ выполнено $2M\omega[x, y] \leq Mx + My$;
- (ii) если $Mx = My + xy$, то $2M\omega[x, y] = Mx + My$ (ср. с теоремой 2.3 из [4]);
- (iii) если, кроме того, M выпукло, то $2\omega[x, y]M \leq xM + yM$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $z \in M$ такое, что

$$z\omega[x, y] \geq M\omega[x, y] - \varepsilon.$$

Кроме того, из условия (С) следует, что

$$2z\omega[x, y] \leq xz + yz \leq Mx + My.$$

Тогда

$$2M\omega[x, y] - 2\varepsilon \leq Mx + My.$$

Осталось использовать произвольность $\varepsilon > 0$.

(ii) Используем рассуждение от противного. Пусть свойство неверно. Тогда в силу доказанного неравенства в (i)

$$2M\omega[x, y] < Mx + My.$$

Из условия следует, что $Mx + My = 2Mx - xy$. Следовательно,

$$xy < 2Mx - 2M\omega[x, y] \leq 2x\omega[x, y] = xy.$$

Получили противоречие.

(iii) Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $u, v \in M$ такие, что $xu \leq xM + \varepsilon$, $yv \leq yM + \varepsilon$. Тогда из условия (С) следует, что

$$2\omega[x, y]\omega[u, v] \leq 2\omega[x, y]\omega[u, y] + 2\omega[u, y]\omega[u, v] \leq xu + yv \leq xM + yM + 2\varepsilon.$$

Но множество M выпуклое, поэтому $\omega[u, v] \in M$ и

$$2\omega[x, y]M \leq 2\omega[x, y]\omega[u, v] \leq xM + yM + 2\varepsilon.$$

Осталось использовать произвольность $\varepsilon > 0$. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть пространство X удовлетворяет условию (В), $M \in B[X]$, $\psi[M, x^*] = \inf\{\psi[M, x] : x \in X\}$. Тогда верны следующие свойства.

(i) Если $x^* \in X \setminus M$ и $y \in x_M^*$, то найдется точка $z \in X$ такая, что

$$S(x^*, Mx^*) \cap S(y, My) = \{z\}$$

(ср. с леммой 4.1 из [4]). Если, кроме того, существуют точки $u, v \in X$ такие, что $Mx^* = ux^*$, $My = vy$, то $x^* \in [y, z]$ и $u = v = z$.

(ii) Если множество M выпуклое, $y \in x_M^*$ и существуют точки $u, v \in X$ такие, что $Mx^* = ux^*$, $My = vy$, то $x^* = y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ср. с доказательством теоремы 4.2 из [4]).

(i) Из условия леммы 4 и неравенства треугольника для функции β получим

$$\begin{aligned} My &\leq Mx^* + x^*y, \\ 2\psi[M, x^*] &= Mx^* + x^*M \leq My + yM - y(X \setminus M) = My. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$My = Mx^* + x^*y \quad \text{и} \quad S(x^*, Mx^*) \cap S(y, My) \neq \emptyset.$$

Предположим, что $u, v \in S(x^*, Mx^*) \cap S(y, My)$, $u \neq v$ и точка u принадлежит пересечению прямой $L[x^*, y]$ со сферой $S(y, My)$. Тогда точки y, v являются концами двух различных сегментов $[y, v]$ и $[y, x^*] \cup [x^*, v]$. Получили противоречие с условием (В). Равенства $u = v = z$ следуют теперь из доказанной единственности точки z . Кроме того, $zy = vy = My = Mx^* + x^*y = ux^* + x^*y = zx^* + x^*y$. Следовательно, $x^* \in [y, z]$.

(ii) Если предположить, что $x^* \in X \setminus M$, то из предыдущего пункта получим, что $x^* \in [y, z]$. Но множество M выпуклое, поэтому $[y, z] \subset M$. Получили противоречие. Лемма 4 доказана.

3. Основные результаты. В следующей теореме 1 обобщаются леммы 3.1, 3.3 из [4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть пространство X удовлетворяет условию (А). Тогда для любых $r \geq 0$, $x \in X$, $M \in B(X)$, $M \neq X$ верны следующие свойства:

- (i) $\beta[M, B[x, r]] = \max[0, Mx - r]$;
- (ii) $\beta[B[x, r], M] \leq \max[0, r + xM - x(X \setminus M)]$;
- (iii) $\alpha[B[x, r], M] \leq \max[r + xM - x(X \setminus M), Mx - r]$;
- (iv) $\alpha[M, BC[X]] \leq \inf\{\psi[M, x] : x \in X\}$;
- (v) если $\alpha[B[x, r], M] = \alpha[M, BC[X]]$, то найдется $r_0 \geq 0$ такое, что

$$\begin{aligned} r[M, x] &\leq r_0 \leq r, \\ \alpha[B[x, r_0], M] &= Mx - r_0 = \beta[B[x, r_0], M] = \alpha[M, BC[X]]; \end{aligned}$$

- (vi) множество $\chi[M]$ замкнуто и ограничено; если, кроме того, пространство X конечно-компактно, то это множество компактно.

Если пространство X удовлетворяет условиям (В), (С) и M – выпуклое ограниченное множество существования в X , то для любых $r \geq 0$, $x \in X \setminus M$ выполнены условия:

- (vii) $\beta[B[x, r], M] = r + xM$;
- (viii) $\alpha[B[x, r], M] = \max[r + xM, Mx - r]$;
- (ix) $\psi[M, x] = \inf\{\alpha[B[x, r], M] : r \geq 0\}$, $\inf\{\alpha[B[y, r], M] : y \in X \setminus M, r \geq 0\} = \inf\{\psi[M, y] : y \in X \setminus M\}$;
- (x) если $\tau \geq 0$, $\alpha[B[x, r], M] \leq \alpha[M, BC[X]] + \tau$, то

$$\alpha[B[x_M, r[M, x_M]], M] \leq \alpha[M, BC[X]] + \tau,$$

где $r[M, x_M] = Mx_M/2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно заметить, что если множество M является замкнутым шаром, то правая часть в неравенстве (iv) равна нулю и это неравенство становится равенством.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из леммы 3.4, теоремы 1.1 и утверждения в начале § 4 из [4] следует, что для выпуклого компакта M из пространства $\mathbb{R}^n$ с произвольной нормой в (iv) имеет место равенство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

(i) Из неравенства треугольника для функции β получим

$$\beta[M, B[x, r]] \geq Mx - \beta[B[x, r], x] \geq Mx - r.$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $y \in M$ такое, что

$$\beta[M, B[x, r]] - \varepsilon \leq yB[x, r] = \max[0, xy - r] \leq \max[0, Mx - r].$$

Осталось использовать произвольность $\varepsilon > 0$.

(ii) Для любых $r \geq 0$, $x \in X \setminus M$, $M \in B(X)$ из неравенства треугольника для функции β получим

$$\beta[B[x, r], M] \leq \beta[B[x, r], x] + xM \leq r + xM.$$

Пусть теперь $r \geq 0$, $x \in M$, $M \in B(X)$ произвольны. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $z \in B[x, r]$ такое, что $zM \geq \beta[B[x, r], M] - \varepsilon$. Кроме того, найдется $u \in [z, x]$ такое, что $zu = z(\overline{M} \cap [z, x])$. Тогда

$$\beta[B[x, r], M] - \varepsilon \leq zM \leq zu = zx - xu \leq \max[0, r - x(X \setminus M)].$$

Осталось использовать произвольность $\varepsilon > 0$.

(iii) Очевидно, что

$$\max[r + xM - x(X \setminus M), Mx - r] \leq \max[\max[0, r + xM - x(X \setminus M)], \max[0, Mx - r]].$$

Предположим, что неравенство строгое. Тогда $r + xM - x(X \setminus M) < 0$ и $Mx - r < 0$. Следовательно, $x \in M$ и $Mx < x(X \setminus M)$. Пусть $z \in X \setminus M$. Тогда найдется $u \in [z, x]$

такое, что $zu = z(\overline{M} \cap [z, x])$. Следовательно, $Mx < xu$. Получили противоречие. Таким образом, равенство установлено. Осталось использовать соотношения из пунктов (i), (ii).

(iv) Неравенство следует из неравенства (iii) и утверждения (v) леммы 1.

(v) Заметим сначала, что функция $g[R] = \beta[B[x, R], M]$ липшицева в силу неравенства

$$|\beta[B[x, r], M] - \beta[B[x, R], M]| \leq |r - R|.$$

Предположим, что $Mx - r > \beta[B[x, r], M]$. Тогда из утверждения (i), липшицевости функции g и равенства $\alpha[B[x, r], M] = \alpha[M, BC[X]]$ следует, что найдется $r_0 > r$ такое, что

$$Mx - r_0 = \beta[B[x, r_0], M] < Mx - r = \alpha[M, BC[X]].$$

Получили противоречие. Предположим теперь, что $Mx - r < \beta[B[x, r], M]$. Тогда найдется $r_0 < r$ такое, что

$$Mx - r_0 = \beta[B[x, r_0], M] \leq \beta[B[x, r], M].$$

Кроме того, из неравенств (ii), (iii) получим

$$\begin{aligned} Mx - r_0 &= \beta[B[x, r_0], M] = \beta[B[x, r], M] = \alpha[M, BC[X]] = \alpha[B[x, r_0], M] \\ &\leq \max[0, r_0 + xM - x(X \setminus M)] \end{aligned}$$

и $r[M, x] \leq r_0$.

(vi) Ограниченность множества $\chi[M]$ следует из предыдущего свойства. Пусть последовательность $(x_n) \subset \chi[M]$, $n = 1, 2, \dots$, сходится к точке $x \in X$. Тогда в силу предыдущего свойства найдется ограниченная последовательность $(r_n) \subset \mathbb{R}_+$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\alpha[B[x_n, r_n], M] = Mx_n - r_n = \beta[B[x_n, r_n], M] = \alpha[M, BC[X]].$$

Из этой последовательности выберем сходящуюся к числу $r \in \mathbb{R}_+$ подпоследовательность $(r_m) \subset \mathbb{R}_+$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда

$$|\alpha[B[x_m, r_m], M] - \alpha[B[x, r], M]| \leq x_m x + |r_m - r| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

В силу непрерывности псевдометрики α получим $\alpha[B[x, r], M] = \alpha[M, BC[X]]$ и $x \in \chi[M]$. Второе утверждение следует из того, что в конечно-компактном метрическом пространстве каждое замкнутое и ограниченное множество компактно [1, с. 18].

(vii) Если пространство X изометрично множеству вещественных чисел со стандартной метрикой, то утверждение (vii), очевидно, верное. Рассмотрим случай, когда такой изометрии нет. Из условий и утверждения (iv) леммы 2 следует, что множество x_M одноточечное. Пусть u — точка из пересечения полупрямой $P[x_M, x]$ с началом в точке x_M , содержащей точку x , со сферой $S(x, r)$ такая, что $x \in [x_M, u]$. Если $u_M = x_M$, то $r + xM = ux_M \leq \beta[B[x, r], M]$. Осталось использовать неравенство (ii). Докажем, что предположение о справедливости неравенства $u_M \neq x_M$ приводит к противоречию. Из этого неравенства и утверждения (iv) леммы 2 следует, что $xu_M > xx_M$. Пусть

$z = z[t]$ – параметризация полупрямой $P = P[u_M, x_M]$ длиной дуги. Из доказательства утверждения (iv) леммы 2 следует выпуклость функции $f = xz[t]$. Тогда найдется точка $v = x_P$ такая, что либо $v \in P \setminus [u_M, x_M]$ и $xv < xx_M$, либо $v = x_M$. Рассмотрим первый случай. Тогда $uv \leq xv + xu < xx_M + xu = ux_M$. Кроме того, в силу выпуклости функции $g = uz[t]$ и неравенства (36.8) из [1, с. 307] имеем

$$ux_M \cdot vu_M \leq uu_M \cdot vx_M + uv \cdot x_M u_M < ux_M \cdot vu_M.$$

Получили противоречие. Во втором случае также получаем противоречие, так как из теоремы 4 [8] следует, что существует единственный перпендикуляр к полупрямой P , содержащий точку u (см. также доказательство утверждения (20.10) из [1, с. 158].

(viii) Это следствие утверждения (i) и (vii).

(ix) Это следствие утверждений (v) леммы 1 и (viii).

(x) Воспользуемся равенством (viii). Тогда

$$\alpha[B[x, r], M] = \max[r + xM, Mx - r] \leq \alpha[M, BC[X]] + \tau.$$

Рассмотрим два случая:

1) если $r + xM \geq Mx - r$, то $r \geq (Mx - xM)/2$ и

$$\begin{aligned} \alpha[M, BC[X]] + \tau &\geq r + xM \geq \frac{1}{2}(Mx + xM) = \frac{1}{2}(Mx + xx_M) \\ &\geq \frac{Mx_M}{2} = \alpha[B[x_M, r[M, x_M]], M]; \end{aligned}$$

2) если $r + xM \leq Mx - r$, то $r \leq (Mx - xM)/2$ и

$$\begin{aligned} \alpha[M, BC[X]] + \tau &\geq Mx - r \geq \frac{1}{2}(Mx + xM) = \frac{1}{2}(Mx + xx_M) \\ &\geq \frac{Mx_M}{2} = \alpha[B[x_M, r[M, x_M]], M]. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

Следующие лемма 5 и теорема 2 являются обобщением теоремы 4.3 из [4].

ЛЕММА 5. Пусть пространство X удовлетворяет условиям (B), (C), M – выпуклое ограниченное множество существования в X , $x \in \chi[M]$. Тогда $x_M \in \chi[M]$. Если, кроме того, существуют точки $u, v \in X$ такие, что $Mx = ux$, $Mx_M = vx_M$, то $x \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $x \in M$, доказательство леммы очевидно. Предположим, что $x \in \chi[M] \setminus M$. Тогда из утверждений (v), (vii) теоремы 1 следует, что найдется $r_0 \geq 0$ такое, что

$$r[M, x] \leq r_0 \leq r,$$

$$\alpha[B[x, r_0], M] = Mx - r_0 = \beta[B[x, r_0], M] = \alpha[M, BC[X]] = r_0 + xM.$$

Следовательно, $r_0 = (Mx - xM)/2 = r[M, x]$ и в силу утверждения (iv) теоремы 1

$$\alpha[M, BC[X]] = r[M, x] + xM = \psi[M, x] \leq \psi[M, x_M] = \frac{Mx_M}{2}.$$

Но $2\psi[M, x_M] = Mx_M \leq Mx + xx_M = 2\alpha[M, BC[X]]$, поэтому $x_M \in \chi[M]$. Если, кроме того, существуют точки $u, v \in X$ такие, что $Mx = ux$, $Mx_M = vx_M$, то из леммы 4 получим $x = x_M$. Получили противоречие с нашим предположением. Следовательно, $x \in M$. Лемма 5 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть пространство X удовлетворяет условиям (В), (С) и M – выпуклый компакт в X . Тогда $\chi[M] \neq \emptyset$ и $\chi[M] \subset M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что в пространстве X найдется последовательность замкнутых шаров $(B[x_n, r_n])$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\alpha[B[x_n, r_n], M] \leq \alpha[M, BC[X]] + \frac{1}{n}.$$

В силу (х) теоремы 1 можно считать, что $x_n \in M$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда последовательность (r_n) , $n = 1, 2, \dots$, ограничена и найдутся подпоследовательности $(x_m) \subset (x_n)$, $(r_m) \subset (r_n)$, точка $x \in M$ и число $r \in \mathbb{R}_+$ такие, что $x_m \rightarrow x$, $r_m \rightarrow r$ при $m \rightarrow \infty$. Если теперь учесть непрерывность метрики α и равенства $\alpha[B[x_m, r_m], B[x, r]] = x_m x + |r_m - r|$, $m = 1, 2, \dots$, то получим $\alpha[B[x, r], M] = \alpha[M, BC[X]]$ и $x \in \chi[M]$.

Второе утверждение следует из леммы 5. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ (теорем 1, 2). Пусть пространство X удовлетворяет условиям (В), (С) и $x, y \in X$. Тогда $\chi[[x, y]] = \{\omega[x, y]\}$ и $r[M, \omega[x, y]] = xy/4$ – радиус шара наилучшего приближения сегмента $[x, y]$ в метрике α .

Следующая теорема 3 является аналогом теоремы 4.6 из [4].

ТЕОРЕМА 3. Пусть пространство X удовлетворяет условиям (В), (С), (M_n) , $n = 1, 2, \dots$, – последовательность ограниченных выпуклых множеств существования, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к компакт $M \subset X$, и $\chi[M_n] \neq \emptyset$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\beta[\chi[M_n] \cap M_n, \chi[M]] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что в силу условий теоремы 3 и леммы 5

$$\chi[M_n] \cap M_n \neq \emptyset, \quad n = 1, 2, \dots$$

Используем метод доказательства от противного. Пусть теорема 3 неверна. Тогда найдутся константа $c > 0$ и подпоследовательность $(\chi[M_m] \cap M_m) \subset (\chi[M_n] \cap M_n)$ такие, что

$$\beta[\chi[M_m] \cap M_m, \chi[M]] > c.$$

Следовательно, найдутся точки $y_m \in \chi[M_m] \cap M_m$, $m = 1, 2, \dots$, такие, что $y_m \chi[M] > c$. Из условий теоремы 3 следует, что найдутся подпоследовательность $(y_l) \subset (y_m)$ и точка $y \in M$ такие, что $y_l y \rightarrow 0$, $l \rightarrow \infty$. Кроме того, в силу утверждения (v) теоремы 1 найдутся $r_l \geq 0$, $l = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\alpha[B[y_l, r_l], M_l] = M_l y_l - r_l = \beta[B[y_l, r_l], M_l] = \alpha[B[y_l, r_l], BC[M]].$$

Следовательно, последовательность (r_l) ограничена. Выделим подпоследовательность $(r_k) \subset (r_l)$, сходящуюся к числу $r \in \mathbb{R}_+$. Тогда $\alpha[B[y_k, r_k], M_k] \rightarrow \alpha[B[y, r], M]$, $k \rightarrow \infty$, и $\alpha[B[y, r], M] = \alpha[B[y, r], BC[M]]$. Таким образом, $y_k \chi[M] \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Получили противоречие. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Буземан Г. Геометрия геодезических. М.: Физматгиз, 1962.
- [2] Куратовский К. Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
- [3] Лисковец О. А. Некорректные задачи и устойчивость квазирешений // Сиб. матем. ж. 1969. Т. 10. № 2. С. 373–385.
- [4] Дудов С. И., Златорунская И. В. Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Матем. сб. 2000. Т. 191. С. 13–38.
- [5] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // УМН. 1973. Т. 28. № 6. С. 3–66.
- [6] Берестовский В. Н. Пространства Буземана ограниченной сверху кривизны по Александрову // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14. № 5. С. 3–18.
- [7] Дудов С. И., Златорунская И. В. Наилучшее приближение выпуклого компакта шаром произвольной нормы: свойства решения // Теория функций, ее прилож. и смежные вопросы (Казань, 13–18 сентября 1999 г.). Казань: Казанское физ.-матем. общество, 1999. С. 3–66.
- [8] Сосов Е. Н. О выпуклых множествах в специальном метрическом пространстве // Изв. вузов. Сер. матем. 1996. № 6. С. 81–84.

НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева
Казанского государственного университета
E-mail: Evgenii.Sosov@ksu.ru

Поступило
21.02.2003
Исправленный вариант
10.06.2003