Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Моцевитин, Об образе декартового прозведения канторовых τ -множеств при гладком отображении, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 948–950

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1020>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:59:28

ОБ ОБРАЗе ДЕКАРТОВОГО ПРОЗВЕДЕНИЯ КАНТОРОВЫХ τ -МНОЖЕСТВ ПРИ ГЛАДКОМ ОТОБРАЖЕНИИ

Н. Г. Мошевитин

Мы будем пользоваться следующим определением τ -множества на вещественной прямой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ — некоторый отрезок. Множество $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}$ называется τ -множеством ($\tau \geq 0$), если оно может быть получено из отрезка $\mathcal{I}$ последовательным выкидыванием счетного (или конечного) набора интервалов $\Delta_\nu \subset \mathcal{I}$, $\nu = 1, 2, \dots$, так, что каждый раз интервал Δ_ν выкидывается из некоторого отрезка $M_\nu \subset \mathcal{I}$, разбивая его таким образом, что

$$M_\nu = N_1 \sqcup \Delta_\nu \sqcup N_2 \quad \text{и} \quad \min\{|N_1|, |N_2|\} \geq \tau |\Delta_\nu|$$

(через $|\cdot|$ здесь и в дальнейшем обозначается длина отрезка или интервала).

Пусть

$$\mathcal{F}_j = \mathcal{I}_j \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu^j, \quad j = 1, \dots, d,$$

суть τ_j -множества. Положим $I_j = |\mathcal{I}_j|$ и $\mathcal{J} = \mathcal{I}_1 \times \dots \times \mathcal{I}_d$.

Рассмотрим теперь вещественнозначную функцию $G(x_1, \dots, x_d): \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ класса $G \in C^1(\mathcal{J})$ и определим величины

$$\alpha_j = \min_{\mathcal{J}} \left| \frac{\partial G}{\partial x_j} \right|, \quad \omega_j = \max_{\mathcal{J}} \left| \frac{\partial G}{\partial x_j} \right|, \quad \lambda_j = \frac{\omega_j}{\alpha_j}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Всюду в этой работе мы будем предполагать, что выполнено условие $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, d$, т.е. мы будем требовать “монотонность” функции G .

Для неотрицательных чисел $\tau_1, \dots, \tau_d \geq 0$ будем рассматривать соотношение

$$\frac{\tau_1}{\lambda_1 + \tau_1} + \dots + \frac{\tau_d}{\lambda_d + \tau_d} \geq 1. \quad (1)$$

Нам понадобятся также следующие ниже соотношения, включающие в себя помимо величин τ_j положительные величины I_j . Пусть $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)$ — произвольная перестановка чисел $1, \dots, d$, а s — некоторое натуральное число между 1 и $d - 1$. Нужные нам соотношения имеют вид

$$\sum_{j=1}^s I_{\sigma_j} \geq I_{\sigma_d} \left[\frac{\omega_{\sigma_d}}{1 + 2\tau_{\sigma_d}} - (\omega_{\sigma_d} + \alpha_{\sigma_d} \tau_{\sigma_d}) \sum_{j=s+1}^{d-1} \frac{\tau_{\sigma_j}}{\lambda_{\sigma_j} + \tau_{\sigma_j}} \right] \quad (2)$$

(в случае $s = d - 1$ формально $\sum_{j=d}^{d-1} = 0$).

ТЕОРЕМА. Пусть параметры $\tau_1, \dots, \tau_d$ удовлетворяют условию (1) и, кроме того, выполнены “начальные условия” (2). Тогда для образа множества $\mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_d$ при отображении G выполнено $G(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d) = G(\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_d)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $s = 2$ и $G(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ условие (1) можно переписать в виде $\tau_1 \tau_2 \geq 1$, так что наша теорема в двумерном случае повторяет результат Ньюхауса [1]–[3], являющийся обобщением классического результата Холла [4]; с другой стороны, в этом случае она усиливает частный результат автора из [5]. Интересные двумерные результаты получены Вильямсом в [6]. Многомерный частный случай нашей теоремы имеется у Главки в [7]. Особо отметим совсем недавние работы Астелса [8], в которой получен аналогичный нашему результат для функции $G(x_1, \dots, x_d) = x_1 + \dots + x_d$ (если в нашей теореме положить $G(x_1, \dots, x_d) = x_1 + \dots + x_d$, то $\alpha_j = \omega_j = \lambda_j = 1$ для всех j и наша теорема превращается в утверждение 2 теоремы 2.3 из [8]). Отметим также работы [9], [10] и книгу [11]. Обзор родственных задач и обширную библиографию можно найти в [12].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-09-0357.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В качестве пояснения в случае $G(x_1, \dots, x_d) = x_1 + \dots + x_d$ приведем несколько примеров, когда выполняются “начальные условия” (2):

- а) $I_1 = I_2 = \dots = I_d$, а τ_j – произвольные положительные числа;
 б) $I_j \geq \kappa_{j,k} I_k$, $j, k = 1, \dots, d$, где $\kappa_{j,k} = \frac{\tau_j}{1 + \tau_j} \cdot \frac{1 + \tau_k}{1 + 2\tau_k} \in (0; 1)$ и, кроме того, величины τ_j удовлетворяют (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. По-видимому, для $G(x_1, \dots, x_d) = x_1 + \dots + x_d$ начальные условия (2) являются неулучшаемыми в случае, когда τ_j удовлетворяют равенству

$$\frac{\tau_1}{1 + \tau_1} + \dots + \frac{\tau_d}{1 + \tau_d} = 1. \quad (3)$$

Вероятно, что при наличии в (1) строгого неравенства, утверждение нашей теоремы останется выполненным, если заменить “начальные условия” (2) на некоторые более слабые требования.

Доказательство теоремы проводится с помощью неэффетивной конструкции, использовавшейся автором в [5], [13], и некоторых геометрических соображений.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ. Предполагая противное, получаем, что в d -мерном пространстве (отнесенном к декартовым координатам $x_1, \dots, x_d$) при некотором $\gamma \in [\min_{\mathcal{J}} G, \max_{\mathcal{J}} G]$ компактная $(d - 1)$ -мерная поверхность $\Sigma = \mathcal{J} \cap \{(x_1, \dots, x_d) : G(x_1, \dots, x_d) = \gamma\}$ полностью покрывается открытыми множествами вида

$$\mathbb{R}_1 \times \dots \times \mathbb{R}_{j-1} \times \Delta^j \times \mathbb{R}_{j+1} \times \dots \times \mathbb{R}_d, \quad (4)$$

где $\mathbb{R}_k$ – прямая, соответствующая k -му координатному направлению, а Δ^j – один из интервалов, выкидываемых из $\mathcal{J}_j$ для получения $\mathcal{F}_j$. Из этого покрытия выделяется неприводимое конечное подпокрытие. Каждому направлению j ставится в соответствие свой вес

$$\varphi_j = \omega_j + \alpha_j \tau_j, \quad j = 1, \dots, d, \quad (5)$$

и из покрытия выделяется полоса (4), для которой значение $\varphi_\nu \Delta^\nu$ минимально. Если в конечном неприводимом покрытии встечаются полосы всех направлений, то, по аналогии с [5] используя теорему Лагранжа о приращениях и оценивая максимум и минимум соответствующих частных производных, имеем

$$|\Delta^\nu| \omega_\nu > \tau_1 \alpha_1 |\Delta^1| + \dots + \tau_{\nu-1} \alpha_{\nu-1} |\Delta^{\nu-1}| + \tau_{\nu+1} \alpha_{\nu+1} |\Delta^{\nu+1}| + \dots + \tau_d \alpha_d |\Delta^d|. \quad (6)$$

(Здесь $|\Delta^\nu|$ – ширина той полосы, на которой достигается минимум, а $|\Delta^j|$, $j \neq \nu$, определяют минимальные ширины полос j -го направления, участвующих в рассматриваемом конечном покрытии поверхности Σ .) Из минимальности имеем $|\Delta^\nu| \varphi_\nu \leq |\Delta^j| \varphi_j$ и с учетом определения весов (5) получаем

$$\frac{\tau_1}{\lambda_1 + \tau_1} + \dots + \frac{\tau_d}{\lambda_d + \tau_d} < 1,$$

что противоречит условию (1). (Выбор весов (5) мы поясним ниже.)

Если же в конечном покрытии не встречаются полосы некоторых направлений, то для этих направлений j в (6) слагаемое $\tau_j \alpha_j |\Delta^j|$ надо заменить на I_j . Как легко видеть, теперь получаем противоречие с (2). (В последнем рассуждении мы используем то, что $I_\nu \geq (1 + 2\tau_\nu) |\Delta^\nu|$.) Теорема доказана.

Поясним, почему мы выбираем веса по формулам (5). Положим $t_j = \alpha_j \tau_j / \varphi_j$. Для получения противоречия надо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{cases} t_1 \leq \frac{\tau_1}{\lambda_1} (t_2 + \dots + t_d), \\ \dots \dots \dots \\ t_d \leq \frac{\tau_d}{\lambda_d} (t_1 + \dots + t_{d-1}). \end{cases} \quad (7)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть τ_j удовлетворяют (1). Тогда для весов, определенных в (5), условия (7) выполнены.

Покажем, как доказывать утверждение. Пересечение ортанта $\{(t_1, \dots, t_d) : t_j \geq 0, j = 1, \dots, d\}$ с гиперплоскостью π , задаваемой уравнением $t_1 + \dots + t_d = 1$, есть правильный симплекс $\mathcal{A}$. Множество всех векторов $(t_1, \dots, t_d)$, лежащих в гиперплоскости π и удовлетворяющих (7), есть некоторый другой правильный симплекс $\mathcal{B}$, гомотетичный симплексу $\mathcal{A}$. Из того, что все τ_j неотрицательны, следует, что центр гомотетии W правильных симплексов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ лежит в их пересечении: $W \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Остается заметить, что с точностью до пропорциональности W имеет координаты $\tau_1/(\lambda_1 + \tau_1), \dots, \tau_d/(\lambda_d + \tau_d)$ и, стало быть, величины $t_1 = \tau_1/(\lambda_1 + \tau_1), \dots, t_d = \tau_d/(\lambda_d + \tau_d)$ всегда будут удовлетворять соотношениям (7).

Отметим, что если выполнено равенство (3), то симплекс $\mathcal{B}$ вырождается в точку и величины t_j можно выбрать только единственным образом. Последнее наблюдение послужило поводом для формулировки замечания 3 в настоящей работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Newhouse S. // Proc. Sympos. Pure Math. 1970. V. 14. P. 191–203.
2. Newhouse S. // Topology. 1974. V. 13. P. 9–18.
3. Newhouse S. // IHES Publ. Math. 1983. V. 50. P. 433–459.
4. Hall M., Jr. // Ann. of Math. (2). 1948. V. 48. P. 966–993.
5. Мошевитин Н. Г. // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 145–146.
6. Williams R. F. // Contemp. Math. 1991. V. 117. P. 163–175.
7. Hlavka J. L. // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 211. P. 123–134.
8. Astels S. // Electronic Research Announcements of the Amer. Math. Soc. 1999. V. 5. P. 108–111; // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. № 1. P. 133–170.
9. Cusick T. W. // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 38. № 2. P. 253–254.
10. Cusick T. W., Lee R. A. // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30. № 2. P. 241–248.
11. Cusick T. W., Flachie M. E. The Markoff and Lagrange Spectra. Math. Surveys Monographs. V. 30. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1989.
12. Shallit J. // L'Enseignement Mathématique. 1992. V. 38. P. 151–187.
13. Мошевитин Н. Г. // УМН. 1999. Т. 54. № 3. С. 169–170.