Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Андросенко, В. Х. Салихов, Симметризованная версия интеграла Марковеккио в теории диофантовых приближений, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 483–492

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:13:02

Симметризованная версия интеграла Марковеккио в теории диофантовых приближений

В. А. Андросенко, В. Х. Салихов

Рассмотрена новая интегральная конструкция, объединяющая идею симметрии, предложенную Салиховым в 2007 г., и интеграл, введенный Марковеккио в 2009 г. Применение этого метода позволяет, в частности, улучшить оценку меры иррациональности числа $\pi/\sqrt{3}$.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10201

Введение. Одним из направлений теории диофантовых приближений является получение оценок снизу модулей линейных форм с целыми коэффициентами от значений аналитических функций.

Напомним, что *показателем (мерой) иррациональности* $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ называется нижняя грань множества чисел λ , для которых, начиная с некоторого положительного $q \geq q_0(\lambda)$, выполняется неравенство

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| > q^{-\lambda}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

В 2007 г. Салиховым [1] был рассмотрен симметризованный интеграл, с помощью которого он улучшил оценку меры иррациональности числа $\log 3$: $\mu(\log 3) < 5.125 \dots$

Позднее, в работе [2] с помощью комплексного симметризованного интеграла была получена лучшая на данный момент оценка меры иррациональности числа π : $\mu(\pi) \leq 7.606308 \dots$

В 2009 г. Марковеккио [3] был предложен новый подход к построению совместных диофантовых приближений к числу $\log 2$, основанный на использовании двукратных несобственных комплексных интегралов. Групповой метод Рина–Виолы [4], [5], разработанный в связи с оценками показателя иррациональности значений дзета-функции Римана $\zeta(2)$, $\zeta(3)$, позволил получить, в частности, оценку $\mu(\log 2) < 3.57455 \dots$

В 2010 г. Нестеренко [6] предложил более простой способ вывода оценки $\mu(\log 2)$. Доказательство основано на применении однократных комплексных интегралов и не использует групповой метод. В работе [6] также приведен обзор современного

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00171).

состояния теории диофантовых приближений, относящейся к данному исследованию.

В настоящей статье мы предлагаем новый метод, объединяющий интегральную конструкцию Марковеккио и симметризованные интегралы Салихова.

Позже этот метод будет рассмотрен одним из авторов для улучшения оценки меры иррациональности числа $\pi/\sqrt{3}$.

1. Интегральная конструкция. Пусть $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 1$, $x > 0$, $h, j, k, l, m, q \in \mathbb{Z}^+$,

$$h + j + q = k + l + m, \quad l + k - j \geq 0, \quad h + j - k \geq 0, \quad k + m - h \geq 0.$$

Рассмотрим интеграл

$$J \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s^h t^j dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)^{h+j-k+1} (t-x)^{k+m-h+1}}, \quad (1)$$

в котором ветвь корня $\sqrt{s/(s-1)}$ выберем следующим образом. На комплексной плоскости ω проведем разрез $(-\infty; 0)$. Тогда для $\omega = |\omega|e^{i\varphi}$, где $-\pi < \varphi < \pi$, определим $\sqrt{\omega} = \sqrt{|\omega|}e^{i\varphi/2}$. Функция $\sqrt{s/(s-1)}$ аналитична на комплексной плоскости s с разрезом по лучу $(0; +\infty)$, так как равенство $\omega = s/(s-1) = -k$, $k > 0$, равносильно равенству $s = k/(k+1) \in (0; 1)$.

Отметим, что интеграл (1) отличается от интеграла Марковеккио (см. [3; формула (5)]) лишь множителем $\sqrt{s/(s-1)}$ в знаменателе подынтегральной функции. Заметим также, что в работе [3] проведено подробное исследование сходимости интеграла (5). Эти же рассуждения применимы и в нашей ситуации. В частности, в интеграле (1) можно менять порядок интегрирования.

Пусть в интеграле (1) $s = u/(u-1)$. Тогда $u = s/(s-1)$, для $s \in (0; -\infty)$ имеем $u \in (0; 1)$, $ds = -du/(1-u)^2$, $1-s = 1/(1-u)$.

Определим

$$J \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t^j}{(t-x)^{k+m-h+1}} J_s dt, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} J_s &\equiv - \int_0^1 \frac{\left(\frac{u}{u-1}\right)^h (1-u)^{l+k-j+1} (u-1)^{h+j-k+1} \left(\frac{du}{(1-u)^2}\right)}{\sqrt{u} (u-t(u-1))^{h+j-k+1}} \\ &\equiv (-1)^{j-k} \int_0^1 \frac{u^h (1-u)^l du}{\sqrt{u} (t + (1-t)u)^{h+j-k+1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Положим в интеграле (3) $u = z^2$ ($\sqrt{u} = z$, $z \in [0; 1]$, $du = 2z dz$):

$$J_s \equiv 2(-1)^{j-k} \int_0^1 \frac{z^{2h} (1-z)^l (1+z)^l dz}{(t + (1-t)z^2)^{h+j-k+1}}. \quad (4)$$

Из (2) и (4) имеем

$$J \equiv 2(-1)^{j-k} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t^j dt}{(t-x)^{k+m-h+1}} \int_0^1 \frac{z^{2h} (1-z)^l (1+z)^l dz}{(t + (1-t)z^2)^{h+j-k+1}}, \quad (5)$$

Проведем в интеграле (5) интегрирование по t . В полуплоскости $\operatorname{Re} t > 0$ находится единственная особая точка $t = x$, так как $t + (1 - t)z^2 = 0$, откуда $t = z^2/(z^2 - 1) \in (-\infty; 0]$. По теореме Коши о вычетах с учетом направления интегрирования по мнимой оси имеем

$$J = 2(-1)^{j-k+1} \operatorname{Re} s_{t=x} \frac{u_1(t)u_2(t)}{(t-x)^{k+m-h+1}},$$

где

$$u_1(t) = t^j, \quad u_2(t) = \int_0^1 \frac{z^{2h}(1-z)^l(1+z)^l dz}{(t+(1-t)z^2)^{h+j-k+1}}.$$

Обозначим

$$D_r(u(t)) = \frac{1}{r!} \frac{d^r u(t)}{dt^r} \Big|_{t=x}.$$

По теореме Лейбница

$$\operatorname{Re} s_{t=x} \frac{u_1(t)u_2(t)}{(t-x)^{k+m-h+1}} = D_{k+m-h}(u_1(t)u_2(t)) = \sum_{\substack{l_1+l_2=k+m-h \\ l_1, l_2 \geq 0, l_1 \leq j}} D_{l_1}(u_1(t))D_{l_2}(u_2(t)),$$

а тогда

$$J = 2(-1)^{j-k+1} \sum_{\substack{l_1+l_2=k+m-h \\ l_1, l_2 \geq 0, l_1 \leq j}} \frac{j(j-1) \cdots (j-l_1+1)}{l_1!} x^{j-l_1} (-1)^{l_2} \times \frac{(h+j-k+1) \cdots (h+j-k+l_2)}{l_2!} \int_0^1 \frac{z^{2h}(1-z)^{l+l_2}(1+z)^{l+l_2} dz}{(x+(1-x)z^2)^{h+j-k+l_2+1}}. \quad (6)$$

Покажем, что все интегралы в (6) представимы в виде

$$Q\alpha + R, \quad (7)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} & \text{в случае } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{a} \log \frac{a+1}{a-1} & \text{в случае } x > 1, \end{cases}$$

$a = \sqrt{x/(x-1)}$, $a > 1$, $Q, R \in \mathbb{Q}$.

Произвольный интеграл в (6) удобно представить в виде

$$\int_0^1 \frac{z^{2h}(1-z^2)^{l+l_2} dz}{(X+z^2)^{h+j-k+l_2+1}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{h+j-k+l_2+1}}, \quad X = \frac{x}{1-x} \in \mathbb{Q}.$$

Далее, разлагая подынтегральную функцию в сумму простейших дробей по переменной z^2 , получим

$$\frac{z^{2h}(1-z^2)^{l+l_2}}{(X+z^2)^{h+j-k+l_2+1}} = P + \sum_{\nu=1}^{h+j-k+l_2+1} \frac{\gamma_\nu}{(X+z^2)^\nu},$$

где $P \in \mathbb{Q}[z^2]$, все $\gamma_\nu \in \mathbb{Q}$.

Достаточно показать, что все интегралы

$$\int_0^1 \frac{dz}{(X+z^2)^\nu} \in \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\alpha.$$

При $\nu = 1$ в случае $X > 0$ имеем

$$\int_0^1 \frac{dz}{X+z^2} = \frac{1}{\sqrt{X}} \arctan \frac{1}{\sqrt{X}} = \alpha,$$

в случае $X < 0$ имеем $X = -a^2$, аналогично

$$\int_0^1 \frac{dz}{z^2 - a^2} = -\frac{1}{2a} \log \frac{a+1}{a-1} = -\frac{1}{2}\alpha.$$

Остается заметить, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dz}{(X+z^2)^{\nu+1}} &= \frac{1}{X} \left(\int_0^1 \frac{dz}{(X+z^2)^\nu} - \int_0^1 \frac{z^2 dz}{(X+z^2)^{\nu+1}} \right) \\ &= \frac{1}{X} \left(\int_0^1 \frac{dz}{(X+z^2)^\nu} + \frac{1}{2\nu(X+1)^\nu} - \frac{1}{2\nu} \int_0^1 \frac{dz}{(X+z^2)^\nu} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл J представляет собой линейную форму от 1 и α с рациональными коэффициентами.

2. Преобразования в интеграле J .

ЛЕММА 1. Пусть дан интеграл

$$J = J(a, b, c) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx}{(A+Bx)^c},$$

в котором $a, b, c > 0$, $A+Bx \neq 0$ при всех $x \in [0; 1]$. Тогда справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} J &= (A+B)^{b-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} \int_0^1 \frac{x^{a+b-c-1}(1-x)^{c-1} dx}{(A+Bx)^b} \\ &= (A+B)^{b-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} J(a+b-c, c, b). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы 1 рассмотрим формулу Эйлера для гипергеометрической функции Гаусса

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{x^{b-1}(1-x)^{c-b-1} dx}{(1-zx)^a}$$

и формулу Куммера

$$F(a, b, c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-b, c-a, c; z)$$

(см. [7; формула (10), с. 72; формула (23), с. 76]). С одной стороны,

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx}{(A+Bx)^c} = \frac{1}{A^c} \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx}{(1+(B/A)x)^c} = \frac{1}{A^c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} F\left(c, a, a+b; -\frac{B}{A}\right).$$

С другой стороны, по формуле Куммера

$$\begin{aligned} F\left(c, a, a+b; -\frac{B}{A}\right) &= \left(1 + \frac{B}{A}\right)^{b-c} F\left(b, a+b-c, a+b; -\frac{B}{A}\right) \\ &= \left(1 + \frac{B}{A}\right)^{b-c} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)} \int_0^1 \frac{x^{a+b-c-1}(1-x)^{c-1} dx}{(1+(B/A)x)^b}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx}{(A+Bx)^c} \\ &= \frac{1}{A^c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \left(1 + \frac{B}{A}\right)^{b-c} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)} \int_0^1 \frac{x^{a+b-c-1}(1-x)^{c-1} dx}{(1+(B/A)x)^b} \\ &= (A+B)^{b-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)} \int_0^1 \frac{x^{a+b-c-1}(1-x)^{c-1} dx}{(A+Bx)^b} \\ &= (A+B)^{b-c} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)} J(a+b-c, c, b). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Применим лемму 1 к интегралу в (3). Имеем

$$\int_0^1 \frac{u^{h-1/2}(1-u)^l du}{(t+(1-t)u)^{h+j-k+1}} = \frac{\Gamma(h+1/2)\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+k-j+1/2)\Gamma(h+j-k+1)} J_1,$$

где

$$J_1 = \int_0^1 \frac{u^{l+k-j-1/2}(1-u)^{h+j-k} du}{(t+(1-t)u)^{l+1}}.$$

Условия леммы 1 выполняются при всех $t \in (-i\infty; 0) \cup (0; i\infty)$.

В интеграле J_1 сделаем обратную замену

$$u = \frac{s}{s-1}, \quad du = -\frac{ds}{(1-s)^2}, \quad 1-u = \frac{1}{1-s}, \quad t+(1-t)u = \frac{s-t}{s-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_1 &= (-1)^{k-j} \int_0^{-\infty} \frac{s^{l+k-j} (1-s)^{l+1} \frac{1}{(1-s)^{h+j-k}} \frac{ds}{(1-s)^2}}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (s-t)^{l+1}} \\ &= (-1)^{k-j} \int_0^{-\infty} \frac{s^{l+k-j} ds}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{h+1} (s-t)^{l+1}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (2), (3) и (8) получаем

$$J \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s^{l+k-j} t^j dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{h+1} (s-t)^{l+1} (t-x)^{k+m-h+1}} \cdot \Lambda, \quad (9)$$

где

$$\Lambda = \frac{\Gamma(h+1/2)l!}{\Gamma(l+k-j+1/2)(h+j-k)!}.$$

Проведем в интеграле J замену $t = xs_1/t_1$, $s = s_1$. Здесь $dt ds = -(xs_1/t_1^2) ds_1 dt_1$.

Очевидно, что путь интегрирования по t_1 при каждом фиксированном $s_1 = s = -k$, $k \in (0; \infty)$, — прямая $(-i\infty; i\infty)$, проходящая сверху вниз. Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds_1 \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_1^h \frac{x^j s_1^j}{t_1^j} \frac{xs_1}{t_1^2} dt_1}{\sqrt{\frac{s_1}{s_1-1}} (1-s_1)^{l+k-j+1} \left(s_1 - \frac{xs_1}{t_1}\right)^{h+j-k+1} \left(\frac{xs_1}{t_1} - x\right)^{k+m-h+1}} \\ &= x^{j+h-k-m} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s^k t^m dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)^{k+m-h+1} (t-x)^{h+j-k+1}} \\ &= x^{l-q} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} ds \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s^k t^m dt}{\sqrt{\frac{s}{s-1}} (1-s)^{l+k-j+1} (s-t)^{k+m-h+1} (t-x)^{h+j-k+1}}. \quad (10) \end{aligned}$$

Это преобразование полностью совпадает с проведенным в работе [3; с. 154].

3. Группа преобразований. Обозначим

$$\begin{aligned} \omega_1 &= h, & \omega_2 &= j, & \omega_3 &= k, & \omega_4 &= m, & \omega_5 &= l, & \omega_6 &= q, \\ \omega_7 &= h+j-k, & \omega_8 &= k+m-h, & \omega_9 &= l+k-j, \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_6 &= \omega_3 + \omega_4 + \omega_5. \end{aligned}$$

Стандартным путем (см., например, [3]–[5]) получим соответствующую группу преобразований, порожденную двумя элементами g_1 и g_2 , связанными с преобразованиями (9) и (10) интеграла (1).

Рассмотрим первое преобразование g_1 (см. (9)):

$$\begin{aligned} g_1(\omega_1) &= \omega_9 = \omega_5 + \omega_3 - \omega_2, & g_1(\omega_2) &= \omega_2, \\ g_1(\omega_7) &= g_1(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) = g_1(\omega_1) + g_1(\omega_2) - g_1(\omega_3) \\ &= \omega_5 + \omega_3 - \omega_2 + \omega_2 - g_1(\omega_3) = \omega_5. \end{aligned}$$

Откуда

$$g_1(\omega_3) = \omega_3.$$

Далее,

$$g_1(\omega_9) = g_1(\omega_5 + \omega_3 - \omega_2) = g_1(\omega_5) + g_1(\omega_3) - g_1(\omega_2) = g_1(\omega_5) + \omega_3 - \omega_2 = \omega_1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g_1(\omega_5) &= \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = \omega_7, \\ g_1(\omega_8) &= g_1(\omega_3 + \omega_4 - \omega_1) = g_1(\omega_3) + g_1(\omega_4) - g_1(\omega_1) \\ &= \omega_3 + g_1(\omega_4) - \omega_5 - \omega_3 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 - \omega_1. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} g_1(\omega_4) &= \omega_5 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_2 = \omega_6, \\ g_1(\omega_6) &= g_1(\omega_5 + \omega_3 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_2) = g_1(\omega_5) + g_1(\omega_3) + g_1(\omega_4) - g_1(\omega_1) - g_1(\omega_2) \\ &= \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_3 + \omega_6 - \omega_5 - \omega_3 + \omega_2 - \omega_2 = \omega_4. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$J(h, j, k, m, l, q; x) = \frac{\Gamma(h + 1/2)l!}{\Gamma(l + k - j + 1/2)(h + j - k)!} J(l + k - j, j, k, q, h + j - k, m; x)$$

или

$$J(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6; x) = \frac{\Gamma(\omega_1 + 1/2)(\omega_5)!}{\Gamma(\omega_9 + 1/2)(\omega_7)!} J(\omega_9, \omega_2, \omega_3, \omega_6, \omega_7, \omega_4; x).$$

Получили преобразование

$$g_1: (\omega_1, \omega_9)(\omega_4, \omega_6)(\omega_5, \omega_7).$$

Из второго преобразования g_2 (см. (10)) следует, что

$$J(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6; x) = x^{\omega_5 - \omega_6} J(\omega_3, \omega_4, \omega_1, \omega_2, \omega_6, \omega_5; x).$$

Поэтому

$$g_2: (\omega_1, \omega_3)(\omega_2, \omega_4)(\omega_5, \omega_6)(\omega_7, \omega_8).$$

Покажем, что функция

$$\Phi(\bar{\omega}) = x^{\omega_3 - \omega_2} \frac{J(\bar{\omega})}{\Gamma(\omega_1 + 1/2)\Gamma(\omega_3 + 1/2)(\omega_2)!(\omega_4)!(\omega_5)!(\omega_6)!}$$

является инвариантной функцией относительно группы $G = \langle g_1, g_2 \rangle$.

Если функция $\Phi(\bar{\omega})$ инвариантна относительно преобразования g_1 , то

$$\frac{\Phi(g_1(\bar{\omega}))}{\Phi(\bar{\omega})} = 1.$$

Действительно,

$$\Phi(g_1(\bar{\omega})) = x^{\omega_3 - \omega_2} \frac{J(g_1(\bar{\omega}))}{\Gamma(\omega_9 + 1/2)\Gamma(\omega_3 + 1/2)(\omega_2)!(\omega_4)!(\omega_7)!(\omega_6)!}.$$

Тогда

$$\frac{\Phi(g_1(\bar{\omega}))}{\Phi(\bar{\omega})} = \frac{x^{\omega_3 - \omega_2} J(g_1(\bar{\omega}))\Gamma(\omega_1 + 1/2)\Gamma(\omega_3 + 1/2)(\omega_2)!(\omega_4)!(\omega_5)!(\omega_6)!}{x^{\omega_3 - \omega_2} J(\bar{\omega})\Gamma(\omega_9 + 1/2)\Gamma(\omega_3 + 1/2)(\omega_2)!(\omega_4)!(\omega_7)!(\omega_6)!} = 1,$$

так как ввиду равенства (9)

$$J(\bar{\omega}) = \frac{\Gamma(\omega_1 + 1/2)(\omega_5)!}{\Gamma(\omega_9 + 1/2)(\omega_7)!} J(g_1(\bar{\omega})).$$

Аналогично покажем, что функция $\Phi(\bar{\omega})$ инвариантна относительно преобразования g_2 . Так как

$$\Phi(g_2(\bar{\omega})) = x^{\omega_1 - \omega_4} \frac{J(g_2(\bar{\omega}))}{\Gamma(\omega_3 + 1/2)(\omega_4)! \Gamma(\omega_1 + 1/2)(\omega_2)! (\omega_6)! (\omega_5)!},$$

то

$$\frac{\Phi(g_2(\bar{\omega}))}{\Phi(\bar{\omega})} = \frac{x^{\omega_1 - \omega_4} J(g_2(\bar{\omega})) \Gamma(\omega_1 + 1/2) \Gamma(\omega_3 + 1/2) (\omega_2)! (\omega_4)! (\omega_5)! (\omega_6)!}{x^{\omega_3 - \omega_2} J(\bar{\omega}) \Gamma(\omega_3 + 1/2) (\omega_4)! \Gamma(\omega_1 + 1/2) (\omega_2)! (\omega_6)! (\omega_5)!} = 1.$$

Так как из равенства (10) $J(\bar{\omega}) = x^{\omega_1 - \omega_4 - \omega_3 + \omega_2} J(g_2(\bar{\omega})) = x^{\omega_5 - \omega_6} J(g_2(\bar{\omega}))$, то функция $\Phi(\bar{\omega})$ инвариантна относительно группы $G = \langle g_1, g_2 \rangle$.

Группа $G = \langle g_1, g_2 \rangle$ состоит из 12 элементов, а именно

$$\begin{aligned} g^{(1)} &= e, \\ g^{(2)} &\equiv \tau = g_1 g_2 = (\omega_1, \omega_3, \omega_9)(\omega_2, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_5, \omega_4), \\ g^{(3)} &= \tau^2 = (\omega_1, \omega_9, \omega_3)(\omega_2, \omega_7, \omega_5)(\omega_4, \omega_6, \omega_8), \\ g^{(4)} &= \tau^3 = (\omega_2, \omega_8)(\omega_4, \omega_7)(\omega_5, \omega_6), \\ g^{(5)} &= \tau^4 = (\omega_1, \omega_3, \omega_9)(\omega_2, \omega_5, \omega_7)(\omega_4, \omega_8, \omega_6), \\ g^{(6)} &= \tau^5 = (\omega_1, \omega_9, \omega_3)(\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_8, \omega_7, \omega_6), \\ g^{(7)} &= g_2 = (\omega_1, \omega_3)(\omega_2, \omega_4)(\omega_5, \omega_6)(\omega_7, \omega_8), \\ g^{(8)} &= g_2 \tau = (\omega_2, \omega_5)(\omega_3, \omega_9)(\omega_6, \omega_8), \\ g^{(9)} &= g_2 \tau^2 = (\omega_1, \omega_9)(\omega_2, \omega_8)(\omega_4, \omega_5)(\omega_6, \omega_7), \\ g^{(10)} &= g_2 \tau^3 = (\omega_1, \omega_3)(\omega_2, \omega_7)(\omega_4, \omega_8), \\ g^{(11)} &= g_2 \tau^4 = (\omega_2, \omega_6)(\omega_3, \omega_9)(\omega_4, \omega_7)(\omega_5, \omega_8), \\ g^{(12)} &= g_2 \tau^5 = g_1 = (\omega_1, \omega_9)(\omega_4, \omega_6)(\omega_5, \omega_7). \end{aligned}$$

Для более точной оценки знаменателя коэффициентов линейной формы (7) рассмотрим 5 преобразований $g^{(3)}$, $g^{(5)}$, $g^{(8)}$, $g^{(10)}$, $g^{(12)}$ из выписанных 12 (см. аналогичный момент в работе [3; с. 171–173]).

Имеем

$$\begin{aligned} J(h, j, k, m, l, q; x) &= \frac{\Gamma(k + 1/2)m!!}{\Gamma(l + k - j + 1/2)(h + j - k)!(k + m - h)!} \\ &\quad \times J(l + k - j, h + j - k, h, q, j, k + m - h; x) \\ &= \frac{\Gamma(h + 1/2)j!q!}{\Gamma(l + k - j + 1/2)(h + j - k)!(k + m - h)!} \\ &\quad \times J(k, l, l + k - j, k + m - h, h + j - k, m; x) \\ &= \frac{\Gamma(k + 1/2)q!}{\Gamma(l + k - j + 1/2)(k + m - h)!} J(h, l, l + k - j, m, j, k + m - h; x) \\ &= \frac{j!m!}{(h + j - k)!(k + m - h)!} J(k, h + j - k, h, k + m - h, l, q; x) \\ &= \frac{\Gamma(h + 1/2)l!}{\Gamma(l + k - j + 1/2)(h + j - k)!} J(l + k - j, j, k, q, h + j - k, m; x). \end{aligned}$$

Так как для $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(\beta + 1/2)} = \frac{\beta!(2\alpha)!}{\alpha!(2\beta)!} 2^{2(\beta-\alpha)},$$

то тогда

$$\begin{aligned} J(h, j, k, m, l, q; x) &= \frac{(2k)!(l+k-j)!m!!2^{2l-2j}}{(2l+2k-2j)!k!(h+j-k)!(k+m-h)!} \\ &\quad \times J(l+k-j, h+j-k, h, q, j, k+m-h; x) \\ &= \frac{(2h)!(l+k-j)!j!q!}{(2l+2k-2j)!h!(h+j-k)!(k+m-h)!} \\ &\quad \times 2^{2q-2m} J(k, l, l+k-j, k+m-h, h+j-k, m; x) \\ &= \frac{(2k)!(l+k-j)!q!}{(2l+2k-2j)!k!(k+m-h)!} 2^{2l-2j} J(h, l, l+k-j, m, j, k+m-h; x) \\ &= \frac{j!m!}{(h+j-k)!(k+m-h)!} J(k, h+j-k, h, k+m-h, l, q; x) \\ &= \frac{(2h)!(l+k-j)!l!}{(2l+2k-2j)!h!(h+j-k)!} 2^{2q-2m} J(l+k-j, j, k, q, h+j-k, m; x). \end{aligned}$$

Дальнейшие рассмотрения во многом аналогичны работе [3]. Поэтому ограничимся краткой схемой и формулировками окончательных результатов.

Пусть далее

$$h = h' \cdot n, \quad j = j' \cdot n, \quad k = k' \cdot n, \quad m = m' \cdot n, \quad l = l' \cdot n, \quad q = q' \cdot n,$$

где $h', j', k', m', l', q' \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{N}, n \rightarrow \infty$.

Стандартным образом, например, как у Марковеккио (см. [3; с. 173]) получим для $\omega = \{n/p\}$ неравенства

$$\begin{aligned} &[2k'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [m'\omega] + [l'\omega] - [k'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] \\ &\quad - [(h' + j' - k')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0, \\ &[2h'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [j'\omega] + [q'\omega] - [h'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] \\ &\quad - [(h' + j' - k')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0, \\ &[j'\omega] + [m'\omega] - [(h' + j' - k')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0, \\ &[2k'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [q'\omega] - [k'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] - [(k' + m' - h')\omega] > 0, \\ &[2h'\omega] + [(l' + k' - j')\omega] + [l'\omega] - [h'\omega] - [2(l' + k' - j')\omega] - [(h' + j' - k')\omega] > 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Более подробное исследование знаменателя коэффициентов линейной формы (7) с использованием неравенств (11) будет уместно проводить в частной ситуации, так как этот знаменатель существенно зависит от x .

4. Асимптотика интеграла. Обозначим

$$f(s, t) = \frac{s^{h'} t^{j'}}{(1-s)^{l'+k'-j'} (s-t)^{h'+j'-k'} (t-x)^{k'+m'-h'}}.$$

Точками перевала являются нули функций $f'_s(s, t)$ и $f'_t(s, t)$, отличные от нулей $f(s, t)$. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{f'_s(s, t)}{f(s, t)} &= \frac{h'}{s} + \frac{l' + k' - j'}{1 - s} - \frac{h' + j' - k'}{s - t} = 0, \\ \frac{f'_t(s, t)}{f(s, t)} &= \frac{j'}{t} + \frac{h' + j' - k'}{s - t} - \frac{k' + m' - h'}{t - x} = 0,\end{aligned}$$

или

$$\begin{cases} q'l's^3 - [l'(m' - h') + q'(j' - k') + x(m' - q')(j' - l')]s^2 \\ \quad - [(k' - j')(m' - h') + xh'(l' - j') + xk'(q' - m')]s - xh'k' = 0, \\ t = \frac{s(l's + k' - j')}{h' + (q' - m')s}. \end{cases} \quad (12)$$

Асимптотики интеграла и коэффициентов линейной формы (7) основаны на уравнениях (12) и будут с помощью метода перевала подробно рассмотрены в следующей статье Андросенко при получении новой оценки меры иррациональности числа $\pi/\sqrt{3}$: $\mu(\pi/\sqrt{3}) \leq 4.23046 \dots$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Х. Салихов, “О мере иррациональности $\log 3$ ”, *Докл. РАН*, **417**:6 (2007), 753–755.
- [2] В. Х. Салихов, “О мере иррациональности числа π ”, *Матем. заметки*, **88**:4 (2010), 583–593.
- [3] R. Marcovecchio, “The Rhin–Viola method for $\log 2$ ”, *Acta Arith.*, **139**:2 (2009), 147–184.
- [4] G. Rhin, C. Viola, “On a permutation group related to $\zeta(2)$ ”, *Acta Arith.*, **77**:1 (1996), 23–56.
- [5] G. Rhin, C. Viola, “The group structure for $\zeta(3)$ ”, *Acta Arith.*, **97**:3 (2001), 269–293.
- [6] Ю. В. Нестеренко, “О показателе иррациональности числа $\ln 2$ ”, *Матем. заметки*, **88**:4 (2010), 549–564.
- [7] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1973.

В. А. Андросенко

Брянский государственный технический
университет

E-mail: a_v_a010@rambler.ru

Поступило

01.11.2012

Исправленный вариант

01.02.2013

В. Х. Салихов

Брянский государственный технический
университет

E-mail: svdh@rambler.ru