Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Ощепкова, О. М. Пенкин, Д. В. Савастеев, Лемма о нормальной производной для лапласиана на полиэдральном множестве, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 1, 116–125

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 09:51:29

Лемма о нормальной производной для лапласиана на полиэдральном множестве

С. Н. Ощепкова, О. М. Пенкин, Д. В. Савастеев

Рассматривается аналог леммы Олейник–Хопфа о нормальной производной для оператора Лапласа на полиэдральном множестве.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10203

Лемма о нормальной производной Э. Хопфа и ее дальнейшее обобщение – лемма Олейник–Хопфа о производной по внутреннему направлению – сыграли фундаментальную роль при доказательстве сильного принципа максимума для достаточно широкого класса эллиптических уравнений второго порядка. В последнее время внимание специалистов все больше привлекают так называемые эллиптические уравнения на стратифицированных множествах. Вопрос о сильном принципе максимума для таких уравнений в общей постановке остается открытым. В связи с этим обобщение леммы Олейник–Хопфа на эллиптические уравнения на стратифицированных множествах представляется весьма актуальным. К настоящему моменту такое обобщение было получено лишь в случае двумерных стратифицированных множеств. Распространение результата на многомерный случай наталкивалось на серьезные препятствия, связанные со сложной геометрией стратифицированного множества, затрудняющие построение барьеров, играющих ключевую роль в доказательстве. В данной работе нам удалось снять ограничение на размерность стратифицированных множеств, но пришлось сузить их класс, ограничившись теми из них, которые состоят из выпуклых многогранников. Локально такие стратифицированные множества устроены как полиэдры, а это позволяет воспользоваться барицентрическими координатами, которые помогают преодолеть геометрические сложности при построении барьеров.

1. Некоторые обозначения и вспомогательные конструкции. Пусть

$$\Omega = |K| = \bigcup_{\sigma_k \in K} \sigma_k \subset \mathbb{R}^n$$

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (госконтракт 14.А18.21.0357).

– полиэдр, соответствующий симплициальному комплексу K . В обозначении симплекса σ_{kj} первый индекс k означает его размерность, а второй j его номер при автономной нумерации симплексов данной размерности. Мы будем пользоваться терминологией из [2], но для удобства при $k \neq 0$ под σ_{kj} будем понимать открытые симплексы (в [2] они замкнуты), т.е. множества вида

$$\{\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_{k+1} A_{k+1} : \alpha_i > 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_{k+1} = 1\},$$

где A_i – все вершины симплекса. При этом стандартные требования на пересечения симплексов будем предъявлять к их замыканиям.

Будем говорить, что два симплекса σ_{mi} и σ_{kj} примыкают друг к другу, если один из них входит в границу другого. Если при этом $m > k$, то будем писать $\sigma_{mi} \succeq \sigma_{kj}$.

Рис. 1. Вырезание окрестности

Следующая конструкция важна для построения локальных барьеров, играющих ключевую роль в доказательстве основного утверждения этой работы. Она определяет множество, на котором строится барьер. При описании этой конструкции симплекс σ_{kj} удобно обозначать через $S(A_1, \dots, A_{k+1})$, где $\{A_1, \dots, A_{k+1}\}$ – полный набор его вершин. Пусть $\sigma_{k+1i} = S(A_1, \dots, A_{k+1}, B)$ – некоторый из примыкающих к σ_{kj} симплексов, если таковые имеются, а $S(A_1, \dots, A_{k+1}, B, C_l)$, $l = 1, \dots, p$, – все $(k+2)$ -мерные симплексы, примыкающие к σ_{k+1i} . Пусть $X_0 \in \sigma_{kj}$. Возьмем точки $\{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{k+1}\} \in S(A_1, \dots, A_{k+1})$ так, чтобы они находились в общем положении, и натянутый на них симплекс содержал бы X_0 . Возьмем также точку $\tilde{B} \in S(A_1, \dots, A_{k+1}, B)$ и точки $\tilde{C}_i$, лежащие в $S(A_1, \dots, A_{k+1}, B, C_i)$. Напомним, что мы определяем симплексы как открытые множества, поэтому эти точки будут внутренними для соответствующих симплексов. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} S(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{k+1}) &\subset S(A_1, \dots, A_{k+1}), \\ S(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{k+1}, \tilde{B}) &\subset S(A_1, \dots, A_{k+1}, B), \end{aligned}$$

а

$$S(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{k+1}, \tilde{B}, \tilde{C}_{i_1}, \dots, \tilde{C}_{i_s}) \subset S(A_1, \dots, A_{k+1}, B, C_{i_1}, \dots, C_{i_s}),$$

если только соответствующий $S(A_1, \dots, A_{k+1}, B, C_{i_1}, \dots, C_{i_s})$ принадлежит исходному симплицияльному комплексу. Обозначим через P_0 объединение симплекса $S(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{k+1}, \tilde{B})$ и всех примыкающих к нему симплексов вида

$$S(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{k+1}, \tilde{B}, \tilde{C}_{i_1}, \dots, \tilde{C}_{i_s}).$$

Рисунок 1 иллюстрирует суть построения.

Всюду далее мы будем пользоваться топологией на Ω , индуцированной на него стандартной топологией $\mathbb{R}^n$. Такая топология обладает метрикой, которая является сужением на Ω метрики $\mathbb{R}^n$. В силу этого очевидно, что множество P_0 является открытым в Ω , поскольку, как следует из построения, оно с каждой точкой содержит близкие к ней.

Положим $P = \overline{P_0}$. Множество P можно рассматривать как новый полиэдр, составленный из симплексов, содержащихся в P_0 , а также всех их граничных симплексов. Этот полиэдр мы будем называть *локальным полиэдром* точки X_0 .

2. Постановка задачи. Представим Ω в виде пары $(\Omega_0, \partial\Omega_0)$, где Ω_0 – произвольное связное, открытое, плотное в Ω подмножество, являющееся объединением некоторых симплексов комплекса K . Тогда $\partial\Omega_0 = \Omega \setminus \Omega_0$ оказывается границей Ω_0 в Ω ; напомним, что мы пользуемся топологией, индуцированной на Ω его вложением в $\mathbb{R}^n$. Например, можно положить $\Omega_0 = \Omega$, $\partial\Omega_0 = \emptyset$. Этот случай не представляет особого интереса, поэтому далее $\partial\Omega_0$ мы будем считать непустым. Легко видеть, что такое разбиение всегда существует.

Пусть функция $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что ее сужение на каждый симплекс из Ω_0 имеет вторую производную $u_{hh}(X)$, непрерывную по X , при фиксированном касательном направлении h . Кроме того, предполагается, что для любых σ_{kj} , σ_{k+1i} из Ω_0 таких, что $\sigma_{k+1i} \supseteq \sigma_{kj}$, и любого $X \in \sigma_{kj}$ существует нормальная производная $\partial u / \partial \nu_i$ по направлению ν_i внутрь симплекса σ_{k+1i} . Такой класс функций мы будем обозначать $C_\sigma^2(\Omega_0)$. Нетрудно заметить, что функция из этого класса не обязана быть непрерывной в целом на Ω_0 ; при переходе с симплекса на симплекс она может претерпевать разрыв.

Для функций класса $C_\sigma^2(\Omega_0)$ на полиэдральном множестве можно определить оператор, который, как мы увидим далее, является аналогом оператора Лапласа. А именно,

$$(\Delta u)(X) = (\Delta_k u)(X) + \sum_{\sigma_{k+1i} \supseteq \sigma_{kj}} \frac{\partial u}{\partial \nu_i}(X), \quad X \in \sigma_{kj}.$$

Здесь $\Delta_k u$ означает классический k -мерный оператор Лапласа на σ_{kj} . При фиксации в касательном пространстве к σ_{kj} полного набора взаимно ортогональных направлений он оказывается суммой вторых производных по этим направлениям. Поэтому слагаемое $(\Delta_k u)(X)$ в этом разложении мы будем называть классической частью. Вторую часть суммы, входящую в определение нового оператора Лапласа, будем, при необходимости, называть неклассической его частью. Заметим, что если к симплексу σ_{kj} не примыкают симплексы большей размерности – такие симплексы мы называем свободными, – то вторая сумма пуста, а потому формально полагается

равной нулю. На таком симплексе оператор Лапласа просто совпадает с классическим. И напротив, если X является нульмерным симплексом, то для лапласиана в этой точке классическая часть полагается равной нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Важно понимать, что описанный лапласиан определяется не только полиэдром, но и его представлением в виде симплицеального комплекса, хотя для простоты мы употребляем выражения “лапласиан на полиэдре”.

Данное нами определение лапласиана может быть мотивировано физическими соображениями. А именно, оказывается, что так определенный оператор может быть записан в виде $\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$, где дивергенция определяется по так называемой стратифицированной мере, а градиент на каждом симплексе определяется, как обычный градиент сужения функции u на этот симплекс, т.е. градиент оказывается набором касательных векторных полей на отдельных симплексах; подробности можно найти в [3].

Теперь у нас все готово для формулировки и доказательства основного утверждения.

3. Основное утверждение. Ввиду некоторых особенностей стратифицированных множеств, частным случаем которых являются полиэдральные множества, и специфики уравнений на них, традиционные доказательства леммы о нормальной производной вроде того, что приведено в книге [6], оказываются неприменимыми. Построение барьера – основного элемента техники доказательства – оказывается громоздкой процедурой, осуществляемой в два шага. В результате барьер оказывается суммой двух функций. Первая из них, как и в классическом случае, возмущает решение неравенства $\Delta u \geq 0$ так, чтобы возмущенная функция $\tilde{u}$ удовлетворяла строгому неравенству $\Delta \tilde{u} > 0$ и при этом сохраняла максимум в той же точке, а вторая служит для того, чтобы функция $\tilde{u}$ имела строгий максимум. При этом оба возмущения удастся согласовать так, чтобы $\tilde{u}$ обладала всеми желаемыми свойствами, предъявляемыми к барьеру.

ТЕОРЕМА 1 (лемма о нормальной производной). Пусть функция

$$u \in C^2_\sigma(\Omega_0) \cap C(\Omega): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

удовлетворяет на Ω_0 неравенству

$$\Delta u \geq 0.$$

Пусть она достигает своего максимума в точке $X_0 \in \sigma_{kj} \subset \partial\Omega_0$, $u(X_0) > u(X)$ при всех $X \in \Omega_0$, и существует производная по нормали к σ_{kj} , направленной внутрь симплекса $\sigma_{k+1i} \subset \Omega_0$, примыкающего к σ_{kj} . Тогда эта нормальная производная меньше нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если к симплексу σ_{k+1i} больше не примыкают никакие другие симплексы, то на нем оператор Δ является классическим лапласианом, а потому требуемое утверждение является в этом случае следствием обычной леммы о нормальной производной (см. [6]).

Пусть теперь к σ_{k+1i} примыкает хотя бы один симплекс. Отправляясь от симплексов σ_{kj} и σ_{k+1i} , строим локальный полиэдр P точки X_0 , как это было описано

в одном из предыдущих пунктов. Так как Ω_0 – открытое множество, то вместе с симплексом σ_{k+1i} , оно содержит и все примыкающие к нему симплексы большей размерности. Поэтому P_0 целиком содержится в Ω_0 .

Будем рассматривать P как самостоятельный полиэдр; сужение на него функции u тоже будем рассматривать как самостоятельную. Тогда на P_0 , как это описано выше, можно определить лапласиан. В силу открытости P_0 в Ω_0 этот лапласиан совпадает с исходным, определенным на Ω_0 , а потому на P_0 выполняется неравенство $\Delta u \geq 0$. Далее, из всех симплексов P_0 границе $\partial\Omega_0$ принадлежит только симплекс $S(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{k+1})$, остальные симплексы P_0 принадлежат Ω_0 . Поэтому $u(X) < u(X_0)$ во всех точках X границы $\partial P_0 = P \setminus P_0$ за исключением, может быть, точек из $S(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{k+1})$.

Для упрощения записи мы до конца доказательства леммы переобозначим симплексы из P буквой σ с соответствующими индексами; $S(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{k+1})$ мы обозначим через σ_{kj} , а $S(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{k+1}, \tilde{B})$ – через σ_{k+1i} .

Теперь перейдем к построению барьера. Барьер, который мы вводим, является линейной комбинацией двух функций ϕ и ψ , свойства которых мы опишем здесь, а построение отложим до следующего пункта. Итак, пусть

$$\phi, \psi \in C^2_\sigma(P_0) \cap C(P): P \rightarrow \mathbb{R}$$

обладают следующими свойствами.

Свойства функции ϕ :

- 1) $\phi \equiv 0$ на σ_{kj} , а также на таких симплексах из ∂P_0 , для которых точка X_0 является граничной;
- 2) $\Delta\phi \geq \phi_0 > 0$ на P_0 , ϕ_0 – некоторое число;
- 3) $\partial\phi/\partial\nu|_{X=X_0} > 0$, где ν нормаль к σ_{kj} в точке X_0 , направленная внутрь симплекса σ_{k+1i} .

К примеру, на рис. 1 полиэдр P – это пирамида $\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{B}\tilde{C}_1$, P_0 – внутренность пирамиды и внутренность треугольника $\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{B}$. Следовательно, функция ϕ должна обращаться в нуль на отрезке $\tilde{A}_1\tilde{A}_2$ и на треугольнике $\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{C}_1$.

Свойства функции ψ :

- 1) $\psi(X_0) = 0$;
- 2) $\psi(X) < 0$, если $X \neq X_0$;
- 3) $|\Delta\psi|$ ограничен на P_0 ;
- 4) $\partial\psi/\partial\nu|_{X=X_0} = 0$, где ν имеет тот же смысл, что и выше.

Положим $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ и $\tilde{u} = u + \varepsilon(\phi + \varepsilon_1\psi)$; второе слагаемое здесь как раз и есть требуемый барьер. Так как $|\Delta\psi|$ ограничен на P_0 , а $\Delta\phi \geq \phi_0 > 0$, за счет выбора достаточно малого ε_1 можно добиться, чтобы $\Delta\tilde{u} > 0$ при любом $\varepsilon > 0$.

В силу компактности полиэдра P и непрерывности функции $\tilde{u}$ она достигает на нем своего максимума. Покажем, что он достигается в точке X_0 .

Функция $\tilde{u}$ не может достигать своего максимума в P_0 . В самом деле, если $X \in P_0$ – точка максимума, то неклассическая часть $\Delta\tilde{u}$, составленная из нормальных производных, в этой точке неположительна. И тогда согласно неравенству $\Delta\tilde{u} > 0$ классическая часть $\Delta\tilde{u}$ строго положительна в точке X , а значит, в силу непрерывности вторых производных функции $\tilde{u}$, и в близких к ней точках симплекса. Однако,

это невозможно в силу классического сильного принципа максимума. В приведенном рассуждении мы воспользовались тем, что классическая часть оператора Δ обязательно присутствует. Это следует из того, что в P_0 нет нульмерных симплексов.

Таким образом, мы показали, что максимум функции $\tilde{u}$ на P достигается только на границе ∂P_0 .

Далее разобьем границу ∂P_0 на три подмножества: $\partial_1 P_0$, $\partial_2 P_0$ и $\partial_3 P_0$. Первое представляет из себя объединение σ_{kj} и всех симплексов из ∂P_0 , для которых X_0 является граничной точкой. На нем $\phi \equiv 0$, $\psi \leq 0$. Поэтому $\phi + \varepsilon_1 \psi \leq 0$.

Определим множество $\partial_2 P_0$. Обозначим через ψ_0 супремум функции ψ на множестве $\partial P_0 \setminus \partial_1 P_0$. Поскольку $\psi \leq 0$ и обращается в нуль только в точке X_0 компакта P , а описанная часть границы отделена от X_0 на ненулевое расстояние, то число ψ_0 строго меньше нуля. Поскольку функция ϕ обращается в нуль на симплексе σ_{kj} , то в силу ее непрерывности найдется такая окрестность U этого симплекса, на которой ϕ будет меньше $|\varepsilon_1 \psi_0|/2$ (мы напомним, что ε_1 фиксировано). Тогда на пересечении $U \cap (\partial P_0 \setminus \partial_1 P_0)$ — обозначим его через $\partial_2 P_0$ — будет выполняться неравенство $\phi + \varepsilon_1 \psi < 0$. Заметим, что если X_0 — точка нульмерного симплекса, то часть $\partial_2 P_0$ оказывается пустой. При этом дальнейшие рассуждения остаются неизменными.

Через $\partial_3 P_0$ мы обозначим оставшуюся часть границы.

Теперь у нас все готово для того, чтобы показать, что функция $\tilde{u}$ достигает своего максимума в точке X_0 , в которой своего максимума достигает u . В самом деле, так как максимум функции u может достигаться только в точках симплекса σ_{kj} , а $\partial_3 P_0$ находится на ненулевом расстоянии от этого симплекса, то на ней $u(X) \leq u(X_0) - \delta$ при некотором $\delta > 0$. Тогда при достаточно малом ε имеем

$$\tilde{u}(X) = u(X) + \varepsilon(\phi + \varepsilon_1 \psi) \leq u(X) + \delta \leq u(X_0) = \tilde{u}(X_0)$$

для любого $X \in \partial_3 P_0$.

Далее, на $\partial_1 P_0 \cup \partial_2 P_0$ имеем

$$\tilde{u}(X) = u(X) + \varepsilon(\phi + \varepsilon_1 \psi) \leq u(X) \leq u(X_0) = \tilde{u}(X_0).$$

Итак мы получили, что максимум $\tilde{u}$ достигается в точке X_0 . Значит в этой точке $\partial \tilde{u} / \partial \nu \leq 0$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} - \varepsilon \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) < 0,$$

что и требовалось доказать.

4. Построение барьерной функции. Теперь обратимся к построению вспомогательных функций ϕ и ψ с описанными в предыдущем пункте свойствами. Особенно просто обстоит дело с функцией ψ . В качестве таковой можно взять, например,

$$\psi(x) = -|x - X|^2.$$

Нетрудно заметить, что все свойства, упомянутые выше, выполнены. Поэтому сразу перейдем к построению функции ϕ . Это удобно делать с использованием барицентрических координат. Их использование позволяет обойти трудности геометрического характера, с которыми мы неминуемо бы столкнулись, даже если бы вместо

симплексов рассматривали произвольные многогранники, не говоря уже о переходе от симплексов к многообразиям, как это сделано, например, в [3] при рассмотрении других вопросов. Это основная причина, по которой мы в этой статье ограничились полиэдральными множествами (см., однако, замечания в последнем пункте).

Напомним, что функцию ϕ мы строим на локальном полиэдре P . Для начала введем вспомогательную функцию b . Для произвольной точки X из P полагаем $b(X)$ равным барицентрической координате, соответствующей вершине $\tilde{B}$, если таковая вообще участвует в перечне вершин симплекса, содержащего X . В противном случае полагаем $b(X)$ равной нулю. Заметим, что во втором случае точка X , как следует из построения полиэдра P , принадлежит границе некоторого симплекса, вершиной которого является $\tilde{B}$. Таким образом функция $b(X)$ определена на всем полиэдре, и она очевидным образом непрерывна.

Определяем теперь функцию ϕ следующим образом:

$$\phi(x) = e^{\alpha b(x)} - 1,$$

где α – некоторый числовой параметр, который будет определен позже.

Поскольку функция b непрерывна на P и бесконечно дифференцируема внутри каждого симплекса, функция ϕ принадлежит $C^2_\sigma(P_0) \cap C(P)$. Проверим, выполняются ли для функции ϕ свойства (1)–(3).

Пусть σ_{ml} – такой симплекс из границы ∂P_0 , что точка X_0 либо принадлежит σ_{ml} , либо является для него граничной. Тогда среди вершин симплекса σ_{ml} есть все точки $\{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{k+1}\}$. Это значит, что среди вершин σ_{ml} нет точки $\tilde{B}$, в противном случае симплекс не входил бы в границу ∂P_0 . Следовательно, на таком симплексе $b \equiv 0$, и условие (1) выполнено.

Переходя к проверке свойства (2), напомним сначала, что градиент функции $u: P \rightarrow \mathbb{R}$ определяется в каждом симплексе как обычный градиент сужения функции на этот симплекс. В силу этого производная b'_h по направлению вектора $\vec{h}$, как обычно, вычисляется в каждом симплексе по формуле $(\nabla b(x), \vec{h})$. Из свойств барицентрических координат следует, что градиент функции b постоянен в каждом симплексе полиэдра P . Причем в симплексах, не содержащих $\tilde{B}$ в качестве вершины, он равен нулю, в остальных симплексах он отличен от нуля.

Пусть $\sigma_{ml} \subset P_0$. Тогда после несложных вычислений получим формулу для лапласиана в точке $X \in \sigma_{ml}$:

$$(\Delta\phi)(X) = e^{\alpha b(X)} \left(\alpha^2 \sum_{i=1}^m (\vec{e}_i, \vec{N}_{ml})^2 + \alpha \sum_{\sigma_{m+1s} \supseteq \sigma_{ml}} (\vec{\nu}_s, \vec{N}_{m+1s}) \right),$$

где $\vec{e}_i$, $i = 1, \dots, m$, – ортонормированные базисные векторы касательного пространства симплекса σ_{ml} , ν_s – единичные нормальные векторы по направлениям прилегающих симплексов, а $\vec{N}_{ml}$ и $\vec{N}_{m+1s}$ – градиенты функции b на симплексах σ_{ml} и σ_{m+1s} .

Так как $\vec{N}_{ml}$ лежит в касательном пространстве симплекса σ_{ml} и не является нулевым, то сумма $\sum_i (\vec{e}_i, \vec{N}_{ml})^2$ отлична от нуля. Тогда $\Delta\phi$ при достаточно большом α будет положительно и отделено от нуля на всем симплексе. Выбирая α максимальным по всем симплексам получим, что условие (2) выполнено на всем P_0 .

Проверим теперь условие (3). Нормаль ν в точке X_0 направлена внутрь симплекса σ_{k+1i} , для которого $\tilde{B}$ является одной из вершин, а значит на этом симплексе градиент функции b равен $\vec{N}_{k+1i}$ и отличен от нуля. Кроме того, из свойств $b(X)$ следует, что $\vec{N}_{k+1i}$ в точке X_0 направлен внутрь симплекса σ_{k+1i} , поэтому

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu}(X_0) = (\vec{\nu}, \vec{N}_{k+1i}) > 0.$$

На этом проверка условий для функции ϕ завершена.

5. Принцип максимума. Напомним, что классический сильный принцип максимума утверждает, что при определенных условиях непостоянное решение эллиптического неравенства в области G достигает глобального максимума только на границе ∂G . Точная формулировка сильного принципа максимума в нашем случае имеет следующий вид.

ТЕОРЕМА 2. Пусть непостоянная функция $u \in C^2_\sigma(\Omega_0) \cap C(\Omega)$ удовлетворяет на Ω_0 неравенству

$$\Delta u \geq 0.$$

Тогда u не может иметь на Ω_0 точек глобального максимумов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, вопреки утверждаемому, что в Ω_0 существует точка глобального максимума функции u . Среди всех точек, в которых u принимает значение максимума, выбираем ту – обозначим ее X_0 , которая лежит в симплексе σ_{kj} максимально возможной размерности. Тогда для всех точек X , лежащих на симплексах большей размерности, выполняется строгое неравенство $u(X) < u(X_0)$. Если таких нет, то требуемое утверждение следует из классического принципа максимума, поскольку рассматриваемый нами лапласиан в этом случае совпадает с обычным.

Далее мы рассматриваем новое множество, составленное из всех симплексов, примыкающих к σ_{kj} и имеющих большую размерность. Вообще говоря, оно может оказаться несвязным. Каждая его компонента связности вместе со своими граничными симплексами является полиэдром. При этом, симплекс σ_{kj} попадает в границу каждого из них. Тогда для каждого такого полиэдра выполняются все условия теоремы 1. Значит все нормальные производные в точке X_0 строго меньше нуля (они существуют в силу того, что $u \in C^2_\sigma(\Omega_0) \cap C(\Omega)$). Т.е. неклассическая часть лапласиана функции u в точке X_0 строго меньше нуля. Если размерность симплекса σ_{kj} больше нуля, то классическая часть оператора – обычный лапласиан – положительна в этой точке. Тогда в силу непрерывности вторых производных функции u в точках $X \in \sigma_{kj}$, близких к X_0 , обычный лапласиан тоже строго больше нуля. Тем самым, мы приходим к противоречию с классическим сильным принципом максимума. Если же $k = 0$, то отрицательность нормальных производных входит в противоречие с неравенством.

6. Заключительные замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вместо оператора Лапласа можно рассмотреть более общий оператор с переменными коэффициентами.

А именно, положим в точке $X \in \sigma_{ml}$

$$(Mu)(X) = \sum_{q,r=1}^m a^{qr}(X) D_{qr} u(X) + \sum_{q=1}^m a^q(X) D_q u(x) + \sum_{\sigma_{m+1s} \supseteq \sigma_{ml}} p(X) \frac{\partial u}{\partial \nu_s}(X). \quad (6.1)$$

Здесь D_{qr} и D_q – дифференциальные операторы, определенные выбором ортонормированных касательных направлений на каждом симплексе; a^{qr} , a^q и p – непрерывные внутри каждого симплекса функции. При этом, как обычно, предполагается, что матрица $a^{qr}(X)$ положительно определена в каждой точке, а также $\Lambda(X)/\lambda(X) < \infty$ и $a^q(X)/\lambda(X) < \infty$, где $\Lambda(X)$ и $\lambda(X)$ – максимальное и минимальное собственные значения матрицы $a^{qr}(X)$ (см., например, [8]). Также предполагается, что $p(X)/\lambda(X) < \infty$. В этом случае выполняются оба утверждения данной работы.

В самом деле, доказательство теоремы 1 для оператора M , в том числе и построение функции ϕ , остается неизменным. Отличие составляет только проверка условия (2). Проведя несложные вычисления, получим в точке $X \in \sigma_{ml}$

$$\begin{aligned} (M\phi)(X) &= e^{\alpha b(X)} \left(\alpha^2 \sum_{q,r=1}^m a^{qr}(X) (\vec{e}_q, \vec{N}_{ml}) (\vec{e}_r, \vec{N}_{ml}) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \sum_{q=1}^m a^q(X) (\vec{e}_q, \vec{N}_{ml}) + \alpha \sum_{\sigma_{m+1s} \supseteq \sigma_{ml}} p(X) (\vec{\nu}_s, \vec{N}_{m+1s}) \right) \\ &\geq e^{\alpha b(X)} \left(\alpha^2 \lambda(X) \sum_{q=1}^m (\vec{e}_q, \vec{N}_{ml})^2 \right. \\ &\quad \left. + \alpha \sum_{q=1}^m a^q(X) (\vec{e}_q, \vec{N}_{ml}) + \alpha \sum_{\sigma_{m+1s} \supseteq \sigma_{ml}} p(X) (\vec{\nu}_s, \vec{N}_{m+1s}) \right). \quad (6.2) \end{aligned}$$

Благодаря ограничениям на коэффициенты, получим при достаточно большом α , что $(M\phi)(X) > 0$.

Данное утверждение является обобщением результата, полученного нами в [7].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть u – непостоянное решение уравнения $Lu = Mu + au \geq 0$ на Ω_0 , где $a \leq 0$ – непрерывная внутри каждого симплекса функция. Тогда функция u не может иметь в Ω_0 положительных максимумов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Гаврилов, О. М. Пенкин, “Аналог леммы о нормальной производной для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве”, *Дифференц. уравнения*, **36:2** (2000), 226–232.
- [2] Л. С. Понтрягин, *Основы комбинаторной топологии*, Наука, М., 1986.
- [3] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2005.
- [4] О. А. Олейник, “О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа”, *Матем. сб.*, **30:3** (1952), 695–702.

- [5] E. Hopf, “A remark on linear elliptic differential equation of second order”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 791–793.
- [6] Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1966.
- [7] С. Н. Ощепкова, О. М. Пенкин, Д. В. Савастеев, “Сильный принцип максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве”, *Матем. заметки*, **92:2** (2012), 276–290.
- [8] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

С. Н. Ощепкова

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет

E-mail: oshepkova@bsu.edu.ru

Поступило

13.11.2012

О. М. Пенкин

Белгородский государственный национальный
исследовательский университет

E-mail: penkin@bsu.edu.ru

Д. В. Савастеев

Воронежский государственный университет

E-mail: savasteev@gmail.com