Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. Х. Рахмонов, Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 3, 445–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:20:07

Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми

З. Х. Рахмонов

Доказана асимптотическая формула для количества представления достаточно большого натурального числа N в виде суммы двух простых чисел p_1 , p_2 и куба натурального числа m , с условиями $|p_i - N/3| \leq H$, $|m^3 - N/3| \leq H$, $H \geq N^{5/6} \mathcal{L}^{10}$.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10204

1. Постановка задачи. Формулировка результатов. Estermann [1] доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^2 = N, \quad (1.1)$$

где p_1, p_2 – простые числа, m – натуральное число. В работе [2] эта задача исследована с более жесткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, и выведена асимптотическая формула для числа решений (1.1) с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^2 - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{3/4} \mathcal{L}^3, \quad \mathcal{L} = \ln N.$$

В этой работе асимптотическая формула выводится уже для более редкой последовательности с почти равными слагаемыми, т.е. когда в уравнении (1.1) квадрат натурального m заменяется на его куб.

ТЕОРЕМА 1. Пусть N – достаточно большое натуральное число, $I(N, H)$ – число представлений N суммой двух простых чисел p_1, p_2 и куба натурального m с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^3 - \frac{N}{3} \right| \leq H$$

$\rho(N, p)$ – число решений сравнения $k^3 \equiv N \pmod{p}$. Тогда при $H \geq N^{5/6} \mathcal{L}^{10}$, $\mathcal{L} = \ln N$ справедлива асимптотическая формула

$$I(N, H) = \frac{3\mathfrak{S}H^2}{\sqrt[3]{3N}\mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt{N}\mathcal{L}^3}\right), \quad \mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N, p)}{(p-1)^2}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Существует такое N_0 , что каждое натуральное число $N > N_0$ представимо в виде суммой двух простых чисел p_1, p_2 и куба натурального m с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq N^{5/6} \mathcal{L}^{10}, \quad i = 1, 2, \quad \left| m - \sqrt[3]{\frac{N}{3}} \right| \leq \frac{N^{1/6} \mathcal{L}^{10}}{\sqrt[3]{3}} - \frac{\mathcal{L}^{20}}{9\sqrt[3]{3}} + 1.$$

Доказательство теоремы 1 опирается на оценки коротких тригонометрических сумм Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^3), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \tau,$$

полученные в теоремах 2 и 3.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\tau \geq 12xy$. Тогда при $\{3\lambda x^2\} \leq 1/(2q)$ имеет место формула

$$T(\alpha, x, y) = \frac{S(a, q)}{q} T(\lambda; x, y) + O(q^{1/2+\varepsilon}),$$

а при $\{3\lambda x^2\} > 1/(2q)$ имеет место оценка

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{2/3} \ln q + \min(yq^{-1/3}, |\lambda|^{-1/2} x^{-1/2} q^{-1/3}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\tau \geq 12xy$, $|\lambda| \leq 1/(6qx^2)$. Тогда имеет место соотношение

$$T(\alpha, x, y) = \frac{y}{q} S(a, q) \gamma(\lambda; x, y) + O(q^{1/2+\varepsilon}),$$

где

$$\gamma(\lambda; x, y) = \int_{-0.5}^{0.5} e\left(\lambda \left(x - \frac{y}{2} + yt\right)^3\right) dt.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\tau \geq 12xy$, $1/6qx^2 < |\lambda| \leq 1/q\tau$, тогда имеет место оценка

$$T(\alpha, x, y) \ll q^{2/3} \ln q + \min(yq^{-1/3}, x^{1/2} q^{1/6}).$$

Вон [3] воспользовавшись оценкой Хуа Ло-кена (лемма 5) для сумм Г. Вейля вида

$$T(\alpha, x) = \sum_{m \leq x} e(\alpha m^n), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

методом Ван дер Корпута доказал, что

$$T(\alpha, x) = \frac{x}{q} \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^n}{q}\right) \int_0^1 e(\lambda t^n) dt + O(q^{1/2+\varepsilon}).$$

Следствие 2.1 является обобщением этой оценки при $n = 3$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $x > x_0$, $y \leq x$, α – действительное число,

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^3), \quad \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}, \quad (a, q) = 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \ll y(q^{-1/8} + y^{-1/8} \ln^{1/8} q + y^{-3/8} q^{1/8} \ln^{1/8} q)(\ln y)^{3/8}.$$

2. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $f(u)$ – действительная функция, $f''(u) > 0$ в интервале $[a, b]$, $\alpha, \beta, \varepsilon$ произвольные числа с условиями $\alpha \leq f'(a) \leq f'(b) \leq \beta$ и $0 < \varepsilon \leq 1$. Тогда

$$\sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = \sum_{\alpha - \varepsilon < h \leq \beta + \varepsilon} \int_a^b e(f(u) - hu) du + O(\varepsilon^{-1} + \ln(\beta - \alpha + 2)),$$

где постоянная в знаке O является абсолютной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [4; с. 204].

ЛЕММА 2. Пусть $(a, q) = 1$, q – натуральное число, b – произвольное целое число. Тогда имеем

$$S_b(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^n + bk}{q}\right) \ll q^{1/2+\varepsilon}(b, q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [5].

ЛЕММА 3. Пусть действительная функция $f(u)$ и монотонная функция $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ монотонна, $|f'(u)| \geq m > 0$ и $|g(u)| \leq M$. Тогда справедлива оценка:

$$\int_a^b g(u) e(f(u)) du \ll \frac{M}{m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [6].

ЛЕММА 4. Пусть при $a \leq u \leq b$ вещественная функция $f(u)$ имеет производную n -го порядка ($n > 1$), причем при некотором $A > 0$ выполняется неравенство $A \leq |f^{(n)}(u)|$. Тогда справедлива оценка

$$\int_a^b e(f(u)) du \leq \min(b - a, 6nA^{-1/n}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [6].

ЛЕММА 5. Пусть $(a, q) = 1$, q – натуральное число. Тогда имеем

$$S_b(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^3 + bk}{q}\right) \leq 6, 1q^{2/3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [6].

ЛЕММА 6. Пусть $x \geq x_0$, $h \leq x^{3/16} \exp(-(\ln x)^{0,76})$, $y \geq hx^{5/8} \exp(\ln x)^{0,76}$, $\tau \geq y^2/xh$, $q \leq h$, $b \geq 224$ – произвольное фиксированное положительное число

$$F(q, x) = \begin{cases} \exp(-\ln^4 \ln x), & \text{если } q \leq (\ln x)^b, \\ (\ln x)^{b+3}, & \text{если } q > (\ln x)^b. \end{cases}$$

Тогда справедливо равенство

$$S(\alpha; x, y) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin \pi \lambda y}{\pi \lambda} e\left(\lambda \left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O\left(\frac{y}{q^{1/2}} F(q, x)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. [7].

3. Доказательства теоремы 2. Пользуясь ортогональным свойством полной линейной рациональной тригонометрической суммы, находим

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{k=0}^{q-1} e\left(\frac{ak^3}{q}\right) \sum_{\substack{x-y < m \leq x \\ m \equiv k \pmod{q}}} e(\lambda m^3) = \frac{1}{q} \sum_{b=0}^{q-1} T_b(\lambda; x, y) S_b(a, q), \quad (3.1)$$

где

$$T_b(\lambda; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e\left(\lambda m^3 - \frac{bm}{q}\right), \quad S_b(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^3 + bk}{q}\right),$$

и

$$R(\alpha; x, y) = \frac{1}{q} \sum_{b=1}^{q-1} T_b(\lambda; x, y) S_b(a, q). \quad (3.2)$$

Рассмотрим только случай $\lambda \geq 0$. Случай $\lambda < 0$ сведем к $\lambda \geq 0$, положив $\lambda = -\mu$ и давая $T(\alpha; x, y)$ форму

$$\overline{T(\alpha; x, y)} = \frac{1}{q} \sum_{b=0}^{q-1} T_{q-b}(\mu; x, y) S_{q-b}(q-a, q) = \frac{1}{q} \sum_{b=0}^{q-1} T_b(\mu; x, y) S_b(q-a, q).$$

Имея в виду, что $3\lambda x^2 - \{3\lambda x^2\}$ – целое число, представим $T_b(\lambda; x, y)$ в виде

$$T_b(\lambda; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(f(m, b)), \quad f(u, b) = \lambda u^3 - (3\lambda x^2 - \{3\lambda x^2\})u - \frac{bu}{q}.$$

Пользуясь монотонностью $f'(u, b)$ и условием $\tau \geq 12xy$, имеем

$$f'(u, b) \geq f'(x-y, b) = (-6xy + 3y^2)\lambda + \{3\lambda x^2\} - \frac{b}{q} \geq \frac{-6xy}{q\tau} - \frac{b}{q} \geq -1 + \frac{1}{2q},$$

$$f'(u, b) \leq f'(x, b) = \{3\lambda x^2\} - \frac{b}{q} < 1.$$

Поэтому применяя к сумме $T_b(\lambda; x, y)$ формулу суммирования Пуассона (лемма 1) при $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\varepsilon = 0, 5$, получим

$$T_b(\lambda; x, y) = I(-1, b) + I(0, b) + I(1, b) + O(1), \quad (3.3)$$

где

$$I(h, b) = \int_{x-y}^x e(f_h(u, b)) du, \quad f_h(u, b) = f(u, b) - hu.$$

Функция

$$f'_h(u, b) = 3\lambda(u^2 - x^2) + \{3\lambda x^2\} - \frac{b}{q} - h$$

в отрезке $u \in [x-y, x]$ является неубывающей функцией. Поэтому имеет место неравенство

$$f'_h(x-y, b) \leq f'_h(u, b) \leq f'_h(x, b),$$

которое представим в виде

$$\{3\lambda x^2\} - \frac{b}{q} - h - \eta < f'_h(u, b) \leq \{3\lambda x^2\} - \frac{b}{q} - h, \quad (3.4)$$

где

$$\eta = f'_h(x, b) - f'_h(x - y, b) = 6\lambda xy - 3\lambda y^2 \leq 6\lambda xy \leq \frac{6xy}{q\tau} \leq \frac{1}{2q}.$$

Далее подставляя (3.3) в (3.1) и (3.2), найдем

$$T(\alpha; x, y) = T_{-1} + T_0 + T_1 + O\left(\frac{1}{q} \sum_{b=0}^{q-1} |S_b(a, q)|\right), \quad T_h = \frac{1}{q} \sum_{b=0}^{q-1} I(h, b) S_b(a, q), \quad (3.5)$$

$$R(\alpha; x, y) = R_{-1} + R_0 + R_1 + O\left(\frac{1}{q} \sum_{b=1}^{q-1} |S_b(a, q)|\right), \quad R_h = \frac{1}{q} \sum_{b=1}^{q-1} I(h, b) S_b(a, q). \quad (3.6)$$

Пользуясь для суммы $S_b(a, q)$ оценкой Хуа Ло-кена (лемма 2), оценим остаточный член:

$$\frac{1}{q} \sum_{b=0}^{q-1} |S_b(a, q)| \ll q^{-1/2+\varepsilon} \sum_{b=1}^q (b, q) = q^{-1/2+\varepsilon} \sum_{\delta \setminus q} \delta \sum_{\substack{b=1 \\ (b, q)=\delta}}^q 1 \ll q^{1/2+2\varepsilon}.$$

Оценим каждую сумму T_h и R_h отдельно.

Оценка T_1 и R_1 . Полагая $h = 1$ в (3.4), получим

$$f'_1(u, b) \leq \{3\lambda x^2\} - \frac{b}{q} - 1 \leq -\frac{b}{q} < 0, \quad |f'_1(u, b)| = -f'_1(u, b) \geq \frac{b}{q}.$$

Пользуясь леммой 3 об оценке интеграла по величине первой производной, найдем

$$|I(1, b)| = \left| \int_{x-y}^x e(f_1(u, b)) du \right| \ll \frac{q}{b}.$$

Отсюда и из оценки Хуа Ло-кена для суммы $S_b(a, q)$ (лемма 2), имеем

$$R_1 = \frac{1}{q} \sum_{b=1}^{q-1} I(1, b) S_b(a, q) \ll \sum_{b=1}^{q-1} \frac{|S_b(a, q)|}{b} \ll q^{1/2+\varepsilon} \sum_{b=1}^{q-1} \frac{(b, q)}{b} \ll q^{1/2+2\varepsilon}.$$

В случае $b = 0$, воспользовавшись неравенством

$$f''_1(u, q) \geq 6\lambda(x - y) \gg \lambda x,$$

оценивая интеграл $I(1, 0)$, пользуясь леммой 4, найдем

$$|I(1, 0)| \ll \min(y, \lambda^{-1/2} x^{-1/2}).$$

Отсюда и из леммы 5 с учетом оценки R_1 , получим

$$T_1 \leq |R_1| + \frac{|I(1, 0)| |S(a, q)|}{q} \ll q^{1/2+2\varepsilon} + \min(yq^{-1/3}, \lambda^{-1/2} x^{-1/2} q^{-1/3}).$$

Оценка T_{-1} и R_{-1} . Полагая $h = -1$ в (3.4), имеем

$$f'_{-1}(u, b) > \{3\lambda x^2\} + \frac{q-b}{q} - \eta \geq \frac{q-b}{q}.$$

Интеграл $I(-1, b)$ также оценим, пользуясь леммой 3. Имеем

$$|I(-1, b)| = \left| \int_{x-y}^x e(f_{-1}(u, b)) du \right| \ll \frac{q}{q-b}.$$

Поступая аналогично случаю оценки R_1 , получим

$$\begin{aligned} R_{-1} &= \sum_{b=1}^{q-1} \frac{I(-1, b) S_b(a, q)}{q} \ll \sum_{b=1}^{q-1} \frac{|S_b(a, q)|}{q-b} \ll q^{1/2+\varepsilon} \sum_{b=1}^{q-1} \frac{(b, q)}{b} \ll q^{1/2+2\varepsilon}, \\ T_{-1} &\leq |R_{-1}| + \frac{|I(-1, 0)| |S(a, q)|}{q} \ll q^{1/2+2\varepsilon} + \frac{|S_b(a, q)|}{q} \ll q^{1/2+2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Оценка R_0 . Если $\{3\lambda x^2\} \leq 1/(2q)$, то полагая $h = 0$ в (3.4), имеем

$$f'_0(u, b) \leq \{3\lambda x^2\} - \frac{b}{q} \leq \frac{1-2b}{2q} \leq -\frac{b}{2q} < 0.$$

Интеграл $I(0, b)$ также оценим, воспользовавшись леммой 3. Найдем

$$|I(0, b)| = \left| \int_{x-y}^x e(f_0(u, b)) du \right| \ll \frac{q}{b}.$$

Поступая аналогично случаю оценки R_1 , получим

$$R_0 = \sum_{b=1}^{q-1} \frac{I(0, b) S_b(a, q)}{q} \ll \sum_{b=1}^{q-1} \frac{|S_b(a, q)|}{b} \ll q^{1/2+\varepsilon} \sum_{b=1}^{q-1} \frac{(b, q)}{b} \ll q^{1/2+2\varepsilon}.$$

Отсюда и из оценок R_1 и R_{-1} с учетом (3.6) получим первое утверждение теоремы.

Оценка T_0 . При $\{3\lambda x^2\} \geq 1/(2q)$ определим натуральное число r соотношением

$$\frac{r}{2q} \leq \{3\lambda x^2\} < \frac{r+1}{2q}, \quad 1 \leq r \leq 2q-1.$$

Отсюда, из неравенств (3.4) при $h = 0$ и условия $\eta \leq 1/(2q)$ найдем

$$f'_0(u, b) > \{3\lambda x^2\} - \frac{b}{q} - \eta \geq \frac{r-2b-1}{2q}, \quad (3.7)$$

$$f'_0(u, b) \leq \{3\lambda x^2\} - \frac{b}{q} < \frac{r-2b+1}{2q}. \quad (3.8)$$

Пусть $r = 2r_1$ четное ($1 \leq r_1 \leq q-1$). Отрезок суммирования $0 \leq b \leq q-1$ в сумме T_0 разобьем на следующие три множества:

$$0 \leq b \leq r_1 - 1, \quad b = r_1, \quad r_1 + 1 \leq b \leq q - 1,$$

соответственно, в первом из которых правая часть неравенства (3.7) больше нуля, а в третьем правая часть неравенства (3.8) меньше нуля, т.е.

$$\begin{aligned} f'_0(u, b) &> \frac{2r_1 - 2b - 1}{2q} = \frac{r_1 - b}{2q} + \frac{r_1 - 1 - b}{2q} \geq \frac{r_1 - b}{2q}, & 0 \leq b \leq r_1 - 1, \\ f'_0(u, b) &< \frac{2r_1 - 2b + 1}{2q} = \frac{r_1 - b}{2q} + \frac{r_1 + 1 - b}{2q} \leq \frac{r_1 - b}{2q}, & r_1 + 1 \leq b \leq q - 1. \end{aligned}$$

Воспользовавшись этими неравенствами, оценивая интеграл $I(0, b)$ по величине первой производной (лемма 3), найдем

$$I(0, b) = \int_{x-y}^x e(f_0(u, b)) du \ll \frac{q}{|r_1 - b|}, \quad b \neq r_1.$$

В случае $b = r_1$, оценивая аналогично случаю оценки интеграла $I(1, 0)$, воспользовавшись леммой 4, найдем

$$|I(0, r_1)| \ll \min(y, \lambda^{-1/2} x^{-1/2}).$$

Воспользовавшись этими оценками и леммой 5, получим

$$\begin{aligned} T_0 &= \sum_{b=0}^{q-1} \frac{I(0, b) S_b(a, q)}{q} \ll q^{-1/3} \left(\sum_{\substack{b=0 \\ b \neq r_1}}^{q-1} \frac{q}{|r_1 - b|} + \min(y, \lambda^{-1/2} x^{-1/2}) \right) \\ &\ll q^{2/3} \ln q + \min(y q^{-1/3}, \lambda^{-1/2} x^{-1/2} q^{-1/3}). \end{aligned}$$

Пусть теперь $r = 2r_1 + 1$ нечетное ($0 \leq r_1 \leq q - 1$). Отрезок суммирования $0 \leq b \leq q - 1$ в сумме R_0 разобьем на следующие три множества:

$$0 \leq b \leq r_1 - 1, \quad b = r_1, r_1 + 1, \quad r_1 + 2 \leq b \leq q - 1,$$

соответственно в первом из которых правая часть неравенства (3.7) больше нуля, а в третьем правая часть неравенства (3.8) меньше нуля, т.е.

$$\begin{aligned} f'_0(u, b) &> \frac{2r_1 + 1 - 2b - 1}{2q} = \frac{r_1 - b}{q}, & 0 \leq b \leq r_1 - 1, \\ f'_0(u, b) &< \frac{2r_1 + 1 - 2b + 1}{2q} = \frac{r_1 - b}{2q} + \frac{r_1 + 2 - b}{2q} \leq \frac{r_1 - b}{2q}, & r_1 + 2 \leq b \leq q - 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I(0, b) = \int_{x-y}^x e(f_0(u, b)) du \ll \frac{q}{|r_1 - b|}, \quad b \neq r_1 - 1, r_1.$$

В случае $b = r_1 - 1, r_1$, поступая аналогично предыдущему случаю оценки $I(0, r_1)$, найдем

$$|I(0, b)| \ll \min(y, \lambda^{-1/2} x^{-1/2}), \quad b = r_1, r_1 + 1.$$

Из этих оценок для $I(0, b)$ и леммы 5 получим

$$\begin{aligned} T_0 &\leq \frac{1}{q} \sum_{b=0}^{q-1} |I(0, b)| |S_b(a, q)| \ll q^{-1/3} \left(\sum_{\substack{b=0 \\ b \neq r_1, r_1+1}}^{q-1} \frac{q}{|r_1 - b|} + \min(y, \lambda^{-1/2} x^{-1/2}) \right) \\ &\ll q^{2/3} \ln q + \min(y q^{-1/3}, \lambda^{-1/2} x^{-1/2} q^{-1/3}). \end{aligned}$$

Подставляя оценки для T_1, T_{-1} и T_0 в (3.5), получим второе утверждение теоремы.

4. Доказательства теоремы 3. Воспользовавшись методом Вейля, найдем

$$|T(\alpha; x, y)|^4 \leq 16y \sum_{0 < k \leq y} \sum_{0 < r \leq y-k} \left| \sum_{0 < m \leq y-k-r} e(6\alpha krm) \right| + 24y^3 + 2(y+1)^2.$$

Применяя к внутренней сумме лемму 4 из [8; с. 94], имеем

$$\begin{aligned} |T(\alpha; x, y)|^4 &\ll y \sum_{0 < k \leq y} \sum_{0 < r \leq y} \min\left(y, \frac{1}{\|6\alpha kr\|}\right) + y^3 \\ &\ll y \sum_{0 < n \leq 6y^2} \tau(n) \min\left(y, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^3. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши, затем лемму 5 из [8; с. 94], получим

$$|T(\alpha; x, y)|^8 \ll y^5 \ln^3 y \sum_{0 < n \leq 24y^2} \min\left(y, \frac{1}{\|\alpha n\|}\right) + y^6 \ll y^8 \left(\frac{1}{q} + \frac{\ln q}{y} + \frac{q \ln q}{y^3}\right) \ln^3 y.$$

5. Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности, будем считать, что $H = N^{5/6} \mathcal{L}^{10}$. Пусть $\tau = 12HN^{-1/3}$, $\varkappa\tau = 1$. Имеем

$$I(N, H) = \int_{-\varkappa}^{1-\varkappa} S_1^2(\alpha; N, H) T_1(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\alpha,$$

где

$$S_1(\alpha; N, H) = \sum_{|p-N/3| \leq H} e(\alpha p), \quad T_1(\alpha; N, H) = \sum_{|n^3-N/3| \leq H} e(\alpha n^3).$$

При $|p - N/3| \leq H$, пользуясь формулой Лагранжа о конечных приращениях, легко показать, что $\ln p = \ln N/3 + O(H/N)$. Поэтому

$$S_1(\alpha; N, H) = \ln^{-1} \frac{N}{3} S\left(\alpha; \frac{N}{3} + H, 2H\right) + O\left(\frac{H^2}{N}\right). \quad (5.1)$$

Воспользовавшись соотношением

$$\sqrt[3]{\frac{N}{3}} \pm H = N_1 \pm H_1 + O(H^2 N^{-5/3}), \quad N_1 = \sqrt[3]{\frac{N}{3}}, \quad H_1 = \frac{H}{\sqrt[3]{3N^2}},$$

находим

$$T_1(\alpha; N, H) = T(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1) + O(H^2 N^{-5/3}). \quad (5.2)$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\varkappa, 1 - \varkappa]$ представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}. \quad (5.3)$$

В этом представлении $0 \leq a \leq q - 1$, причем $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α , для которых $q \leq \mathcal{L}^{20}$ в представлении (5.3), через $\mathfrak{m}$ обозначим

оставшиеся α . Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьем множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{M}, \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\mathcal{L}^2}{H} \right\}, \quad \mathfrak{M}_2 = \left\{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{M}, \frac{\mathcal{L}^2}{H} < \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q\tau} \right\}.$$

Обозначим через $I(\mathfrak{M}_1)$, $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{M})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}$. Будем иметь

$$I(N, H) = I(\mathfrak{M}_1) + I(\mathfrak{M}_2) + I(\mathfrak{m}).$$

В последней формуле первый член, т.е. $I(\mathfrak{M}_1)$ доставляет главный член асимптотической формулы для $I(N, H)$, а $I(\mathfrak{M}_2)$ и $I(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

Вычисление интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$. По определению интеграла $I(\mathfrak{M}_1)$ имеем

$$I(\mathfrak{M}_1) = \sum_{q \leq \mathcal{L}^{20}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a, q), \quad (5.4)$$

где

$$I(a, q) = \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}^2/H} F(\alpha; N, H) e(-\alpha N) d\lambda, \\ F(\alpha; N, H) = S_1^2(\alpha; N, H) T_1(\alpha; N, H), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda.$$

К сумме $S(\alpha; N/3 + H, 2H)$ применим лемму 6, полагая, $x = N/3 + H$, $y = 2H$, $h = HN^{-2/3} = N^{1/6} \mathcal{L}^{10}$, $b = 224$. Все условия этой леммы выполняются:

$$h < N^{3/16} \exp(-(\ln N)^{0,76}), \quad h \left(\frac{N}{3} + H \right)^{5/8} \exp(\ln N)^{0,76} \leq 2N^{5/6} \mathcal{L}^{10} = 2H, \\ \tau > \frac{12H}{\sqrt[3]{N}} \cdot \frac{N}{N + 3H} = \frac{(2H)^2}{(N/3 + H)h}.$$

Согласно этой лемме для $\alpha \in \mathfrak{M}_1$ с учетом формулы (5.1) найдем

$$S_1(\alpha; N, H) = \frac{1}{\ln(N/3)} \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda} e\left(\frac{\lambda N}{3}\right) + O(R_1), \quad R_1 = H \exp(-c \ln^4 \mathcal{L}).$$

Воспользовавшись этим соотношением и имея ввиду, что

$$\left| \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin 2\pi\lambda H}{\pi\lambda} e\left(\frac{\lambda N}{3}\right) \right| \ll \frac{H}{\varphi(q)},$$

найдем

$$S_1^2(\alpha; N, H) - \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2 \ln^2(N/3)} e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) \ll \frac{HR_1}{\varphi(q)\mathcal{L}}.$$

Отсюда с учетом тривиальной оценки суммы $T_1(\alpha; N, H) \leq HN^{-2/3}$, находим

$$F(\alpha; N, H) - \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2 \ln^2(N/3)} e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) T_1(\alpha; N, H) \ll \frac{H^2 R_1}{\varphi(q) \sqrt[3]{N^2} \mathcal{L}}. \quad (5.5)$$

Из неравенств $\mathcal{L}^2 H^{-1} < (q(N_1 + H_1)^2)^{-1}$ и

$$12(N_1 + H_1) \cdot 2H_1 = \frac{24}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{H}{\sqrt[3]{N}} \left(1 + \frac{H}{N}\right) < \frac{24}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{H}{\sqrt[3]{N}} \left(1 + \frac{\sqrt[3]{9} - 2}{2}\right) = \frac{12H}{\sqrt[3]{N}} = \tau$$

следует, что для суммы $T(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)$ при $\alpha \in \mathfrak{M}_1$, выполняется условие следствия 2.1 теоремы 2. Согласно этой лемме, соотношению (5.2) и имея в виду, что $q \leq \mathcal{L}^{20}$ и $H = N^{5/6} \mathcal{L}^{10}$, найдем

$$T_1(\alpha; N, H) - \frac{2S(a, q)H}{q\sqrt[3]{3N^2}} \gamma(\lambda; N_1 + H_1, 2H_1) \ll R_2, \quad R_2 = \mathcal{L}^{20}.$$

Отсюда и из (5.5) имеем

$$\begin{aligned} F(\alpha; N, H) - \frac{2H}{\sqrt[3]{3N^2} \ln^2(N/3)} \frac{\mu^2(q)S(a, q)}{q\varphi^2(q)} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2} \gamma(\lambda; N_1 + H_1, 2H_1) e\left(\frac{2\lambda N}{3}\right) \\ \ll \frac{H^2 R_1}{\varphi(q)\sqrt[3]{N^2} \mathcal{L}} + \left| \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2 \ln^2(N/3)} \right| R_2 \ll \frac{H^2 R_1}{\varphi(q)\sqrt[3]{N^2} \mathcal{L}} + \frac{H^2 R_2}{\varphi^2(q) \mathcal{L}^2}. \end{aligned}$$

Подставляя значение $F(\alpha; N, H)$ в (5.4), найдем

$$I(a, q) - \frac{2H}{\sqrt[3]{3N^2} \ln^2(N/3)} \frac{\mu^2(q)S(a, q)}{q\varphi^2(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) \cdot J(H) \ll \frac{H\mathcal{L}R_1}{\varphi(q)\sqrt[3]{N^2}} + \frac{HR_2}{\varphi^2(q)},$$

где

$$\begin{aligned} J(H) &= \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}^2/H} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2} \gamma(\lambda; N_1 + H_1, 2H_1) e\left(-\frac{\lambda N}{3}\right) d\lambda \\ &= \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}^2/H} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{(\pi\lambda)^2} \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda \left(\sqrt[3]{\frac{N}{3}} + \frac{2Ht}{\sqrt[3]{3N^2}}\right)^3\right) e\left(-\frac{\lambda N}{3}\right) dt d\lambda \\ &= \frac{4H}{\pi} \int_0^{2\pi\mathcal{L}^2} \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H^2 \mathcal{L}^4}{N}\right) = \frac{3H}{2} + O\left(\frac{H}{\mathcal{L}^6}\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I(a, q) &= \frac{3H^2}{\sqrt[3]{3N^2} \ln^2(N/3)} \frac{\mu^2(q)S(a, q)}{q\varphi^2(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) + R_3(a, q), \\ R_3(a, q) &\ll \frac{H\mathcal{L}R_1}{\varphi(q)\sqrt[3]{N^2}} + \frac{HR_2}{\varphi^2(q)} + \frac{H^2}{\varphi^2(q)\sqrt[3]{N^2} \mathcal{L}^8} \ll \frac{H^2}{\varphi^2(q)\sqrt[3]{N^2} \mathcal{L}^8}. \end{aligned}$$

Подставляя правую часть этого равенства в (5.4), получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{3H^2 G(N)}{\sqrt[3]{3N^2} \ln^2(N/3)} + R_3, \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} G(N) &= \sum_{q \leq \mathcal{L}^5} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} S(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right), \\ R_3 &\ll \sum_{q \leq \mathcal{L}^5} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} R_3(a, q) \ll \frac{H^2}{\sqrt[3]{N^2} \mathcal{L}^8} \sum_{q \leq \mathcal{L}^5} \frac{1}{\varphi(q)} \ll \frac{H^2}{\sqrt[3]{N^2} \mathcal{L}^7}. \end{aligned}$$

Заменяя сумму $G(N)$ в (5.6) близким к ней бесконечным рядом, общий член которого является мультипликативной функцией, найдем

$$G(N) = \mathfrak{S}(N) + O(\mathcal{L}^{-2}), \quad \mathfrak{S}(N) = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N, p) - 1}{(p-1)^2} \right).$$

Следовательно,

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{3\mathfrak{S}(N)H^2}{\sqrt[3]{3N^2}\mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{\sqrt[3]{N^2}\mathcal{L}^3}\right).$$

Оценка $I(\mathfrak{M}_2)$. Возможны случаи:

$$\frac{\mathcal{L}^2}{H} < |\lambda| \leq \frac{1}{6q(N_1 + H_1)^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{6q(N_1 + H_1)^2} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}.$$

Случай 1. Из неравенства $\tau > 12(N_1 + H_1) \cdot 2H_1$ и условия рассматриваемого случая следует, что для суммы $T(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)$ выполняется условие следствия 2.1 теоремы 2. Согласно этому следствию имеем

$$T(\alpha, N_1 + H_1, 2H_1) = \frac{2S(a, q)H_1}{q} \int_{-0,5}^{0,5} e(f(u)) du + O(q^{1/2+\varepsilon}),$$

где $f(u) = \lambda(N_1 + 2H_1u)^3$. Производная $f'(u)$ является монотонной функцией и удовлетворяет неравенству

$$|f'(u)| \geq 6|\lambda|(H_1N_1^2 - 2N_1H_1^2) = 2|\lambda|H \left(1 - \frac{2H}{N} \right) > |\lambda|H \geq \mathcal{L}^2.$$

Переходя к оценкам и воспользовавшись для оценки интеграла леммой 3, найдем

$$|T(\alpha, N_1 + H_1, 2H_1)| \ll \frac{H_1}{\min |f'(u)|} + q^{1/2+\varepsilon} \ll \frac{H}{N^{2/3}\mathcal{L}^2} + \mathcal{L}^{11} \ll \frac{H}{N^{2/3}\mathcal{L}^2}. \quad (5.7)$$

Случай 2. Согласно следствию 2.2 при $x = N_1 + H_1$, $y = 2H_1$ имеем

$$\begin{aligned} T(\alpha, N_1 + H_1, 2H_1) &\ll q^{2/3} \ln q + (N_1 + H_1)^{1/2} q^{1/6} \ll \mathcal{L}^7 + N^{1/6} \mathcal{L}^{10/3} \\ &\ll \frac{H}{\sqrt[3]{N^2}\mathcal{L}^2} \cdot \frac{N^{5/6}\mathcal{L}^{16/3}}{H} \leq \frac{H}{\sqrt[3]{N^2}\mathcal{L}^2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (5.7) с учетом соотношения (5.2) для всех $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, получим

$$|T_1(\alpha; N, H)| \ll \frac{H}{\sqrt[3]{N^2}\mathcal{L}^2} + H^2 N^{-5/3} \ll \frac{H}{\sqrt[3]{N^2}\mathcal{L}^2}.$$

Поэтому

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T_1(\alpha, N, H)| \int_0^1 |S_1(\alpha; N, H)|^2 d\alpha \ll \frac{H^2}{\sqrt[3]{N^2}\mathcal{L}^3}.$$

Оценка интеграла $I(\mathbf{m})$. Пользуясь для суммы $T(\alpha; N_1 + H_1, 2H_1)$ теоремой 3 и условием $\mathcal{L}^{20} < q \leq \tau = HN^{1/3}$, находим

$$\begin{aligned} T(\alpha; N_1, +H_1, 2H_1) &\ll H_1(q^{-1/8} + H_1^{-1/8} \ln^{1/8} q + H_1^{-3/8} q^{1/8} \ln^{1/8} q) \mathcal{L}^{3/8} \\ &\ll \frac{H}{\sqrt[3]{N^2}} \left(\mathcal{L}^{-5/2} + \left(\frac{H}{\sqrt[3]{N^2}} \right)^{-1/8} + \left(\frac{H}{\sqrt[3]{N^2}} \right)^{-3/8} \left(\frac{H}{\sqrt[3]{N}} \right)^{1/8} \right) \mathcal{L}^{3/8} \\ &= \frac{H}{\sqrt[3]{N^2}} (\mathcal{L}^{-5/2} + N^{-1/48} \mathcal{L}^{-5/4} + \mathcal{L}^{-5/2}) (\ln N)^{1/2} \ll \frac{H}{\sqrt[3]{N^2} \mathcal{L}^2}. \end{aligned}$$

С учетом (5.2) такую же оценку получим и для $T_1(\alpha, N, H)$. Следовательно,

$$I(\mathbf{m}) \ll \max_{\alpha \in \mathbf{m}} |T_1(\alpha, N, H)| \int_0^1 |S_1(\alpha; N, H)|^2 d\alpha \ll \frac{H^2}{\sqrt[3]{N^2} \ln^3 N}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Estermann, “Proof that every large integer is the sum two primes and a square”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **42**:1 (1937), 501–516.
- [2] З. Х. Рахмонов, “Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми”, *Матем. заметки*, **74**:4 (2003), 564–572.
- [3] R. C. Vaughan, “Some remarks on Weyl sums”, *Topics in Classical Number Theory*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **34**, North-Holland, Amsterdam, 1984, 1585–1602.
- [4] H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **53**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [5] L. K. Hua, “On an exponential sum”, *J. Chinese Math. Soc.*, **2** (1940), 301–312.
- [6] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков, *Теория кратных тригонометрических сумм*, Наука, М., 1987.
- [7] З. Х. Рахмонов, “Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами”, *Докл. АН Республики Таджикистан*, **43**:3 (2000), 27–40.
- [8] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, 2-ое изд., Наука, М., 1983.

З. Х. Рахмонов

Институт математики

АН Республики Таджикистан, г. Душанбе

E-mail: zarull0_r@mail.ru

Поступило

11.10.2012