Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. З. Рахмонов, Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 763–774

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:41:39

Короткие суммы с нецелой степенью натурального числа

П. З. Рахмонов

Доказана нетривиальная оценка для короткой тригонометрической суммы вида $\sum_{x-y < n \leq x} e(\alpha[n^c])$ при $y \geq \sqrt{2cx} \mathcal{L}^A$, $A \geq 1$ – фиксированное число, $\mathcal{L} = \ln x$ и c – нецелое число с условиями

$$1 < c \leq \log_2 \mathcal{L} - \log_2 \ln \mathcal{L}^{6A}, \quad \|c\| \geq (2^{[c]+1} - 1)(A + 1) \mathcal{L}^{-1} \ln \mathcal{L}.$$

Библиография: 10 названий

DOI: 10.4213/mzm10205

1. Формулировка результатов. Тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа вида

$$S_c(\alpha, x) = \sum_{n \leq x} e(\alpha[n^c])$$

рассматривал Deshouillers [1]. Используя метод Виноградова, он получил оценку для $S_c(\alpha, x)$ при $c > 12$.

Его оценка была существенно уточнена Архиповым и его учениками Житковым и Буриевым [2], [3]:

$$S_c(\alpha, x) \ll x^{1-\rho}, \quad \rho^{-1} = \begin{cases} 2^{[c+2]}, & \text{при } c < 100, \\ 2 \cdot 10^3 c^2, & \text{при } c > 100. \end{cases}$$

Оценки Архипова в точности повторяют оценки Виноградова [4] для сумм Вейля в множестве точек второго класса

$$T_k(\alpha, x) = \sum_{n \leq x} e(\alpha n^k) \ll x^{1-\rho}, \quad \rho^{-1} = 8k^2(\ln k + 1, 5k + 4, 2),$$

Арифметическая особенность последовательностей $[n^c]$ состоит, с одной стороны, в ее более сложном поведении, чем последовательность n^k , а с другой стороны, ее значения равномерно распределены в любой арифметической прогрессии.

В работе, воспользовавшись, в частности, этой особенностью, для короткой тригонометрической суммы с нецелой степенью натурального числа вида

$$S_c(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} e(\alpha[n^c]), \quad y \geq \sqrt{2cx} \mathcal{L}^A, \quad \mathcal{L} = \ln x,$$

$A \geq 1$ – фиксированное число, получена оценка, равномерная по параметру c , удовлетворяющему условиям (1.1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $x \geq x_0 > 0$, A – фиксированное положительное число больше единицы, c – нецелое число с условиями

$$1 < c \leq \log_2 \mathcal{L} - \log_2 \ln \mathcal{L}^{6A}, \quad \|c\| \geq (2^{\lceil c \rceil + 1} - 1)(A + 1)\mathcal{L}^{-1} \ln \mathcal{L}. \quad (1.1)$$

Тогда при $y \geq \sqrt{2cx} \mathcal{L}^{A+\theta}$ и $x^{1-c}y^{-1}\mathcal{L}^A \leq |\alpha| \leq 0.5$ справедлива оценка

$$S_c(\alpha; x, y) \ll y\mathcal{L}^{-A},$$

где $\theta = 0$ при $c \geq 1.1$ и $\theta = 0.5$ при $c < 1.1$.

В работе [5] теорема 1 была доказана в случае, когда параметр c – фиксированное число, $c > 2$ и $\|c\| \geq (2^{\lceil c \rceil + 1} - 1)(A + 2, 5)\mathcal{L}^{-1} \ln \mathcal{L}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x \geq x_0 > 0$, A – фиксированное положительное число больше единицы, c – нецелое число с условиями (1.1). Тогда при $y \geq (x\mathcal{L})^{1/(4-2^{2-\lceil c \rceil})}$ и $|\alpha| \leq x^{1-c}y^{-1}\mathcal{L}^A$ справедлива асимптотическая формула

$$S_c(\alpha; x, y) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \int_{x-y}^x e(\alpha(t^c - 0.5)) dt + O\left(\frac{y|\sin \pi \alpha|}{\mathcal{L}^A}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $x \geq x_0 > 0$, A – фиксированное положительное число больше единицы, c – нецелое число с условиями (1.1). Тогда при $y \geq \sqrt{2cx} \mathcal{L}^A$ и $|\alpha| \leq x^{1-c}y^{-1}\mathcal{L}^A$ справедлива асимптотическая формула

$$S_c(\alpha; x, y) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \int_{x-y}^x e(\alpha(t^c - 0.5)) dt + O\left(\frac{y|\sin \pi \alpha|}{\mathcal{L}^A}\right).$$

2. Известные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть α и u – вещественные числа, M – натуральное число, $M > 2$, $M_0 = \pi(M + 0.5)$. Тогда имеет место формула

$$e(-\alpha\{u\}) = \frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i} \sum_{|h| \leq M} \frac{e(uh)}{\alpha + h} + Q_M(u),$$

$$Q_M(u) \leq 4\sqrt{2} |\sin \pi \alpha| R_{M_0}(u), \quad R_{M_0}(u) = \frac{1}{\sqrt{1 + M_0 \sin^2 \pi u}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [6].

ЛЕММА 2. Пусть задано разложение функции $R_{M_0}(u)$ из леммы 1 в ряд Фурье

$$R_{M_0}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e(nu).$$

Тогда при $M_0 \geq 1$ и $n \geq 0$ справедлива оценка

$$|c_n| = |c_{-n}| \leq \frac{4 + \ln M_0}{\pi M_0} \exp\left(-\frac{n}{M_0}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [7; с. 603].

ЛЕММА 3. Пусть $k \geq 2$, $K = 2^{k-1}$, функция $f(t)$ имеет k -ю производную на $[a, b]$, причем при всех $t \in [a, b]$ имеет место

$$0 < \lambda_k \leq f^{(k)}(t) \leq \eta \lambda_k \quad \text{или} \quad 0 < \lambda_k \leq -f^{(k)}(t) \leq \eta \lambda_k.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\left| \sum_{a < n \leq b} e(f(n)) \right| \ll (b-a) \lambda_k^{1/(2K-2)} \eta^{2/K} + (b-a)^{1-2/K} \lambda_k^{-1/(2K-2)},$$

где постоянная в знаке $\ll$ абсолютная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [8; с. 27].

ЛЕММА 4. Пусть $f(u)$ на интервале (a, b) – вещественная дифференцируемая функция, причем внутри интервала ее производная $f'(u)$ монотонна и знакопостоянна и при постоянной δ с условием $0 < \delta < 1$ удовлетворяет неравенству $|f'(u)| \leq \delta$. Тогда имеем

$$\sum_{a < n \leq b} e(f(n)) = \int_a^b e(f(u)) du + \theta \left(3 + \frac{2\delta}{1-\delta} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [9].

ЛЕММА 5. Пусть действительная функция $f(u)$ и монотонная функция $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ монотонна, $|f'(u)| \geq m > 0$ и $|g(u)| \leq M$. Тогда справедлива оценка

$$\int_a^b g(u) e(f(u)) du \ll \frac{M}{m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10].

3. Вспомогательные леммы.

ЛЕММА 6. Для величины

$$\binom{c}{k} = \frac{c(c-1)\dots(c-k+1)}{k!}$$

при нецелом $c > 1$ и натуральном k справедливы оценки

$$1 < \binom{c}{k} < 2^c \quad \text{при} \quad k < c,$$

$$\frac{\{c\}}{k} < \binom{c}{k} < 1 \quad \text{при} \quad k = [c] + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение $[c] = b > 1$, $\{c\} = \beta$. Тогда $0 < \beta < 1$, $c = b + \beta$.

Оценка сверху. Рассмотрим сначала случай $k \leq b$. Согласно определению имеем

$$\binom{c}{k} = \frac{(b+\beta)(b+\beta-1)\dots(b+\beta-k+1)}{k!} < \frac{(b+1)b\dots(b+2-k)}{k!} = \binom{b+1}{k}.$$

Из соотношений

$$\sum_{k=0}^{b+1} \binom{b+1}{k} = 2^{b+1}, \quad \binom{b+1}{k} = \binom{b+1}{b+1-k}$$

при $k \neq b+1-k$ или $2k \neq b+1$ получаем, что

$$\binom{b+1}{k} = \frac{1}{2} \left(\binom{b+1}{k} + \binom{b+1}{b+1-k} \right) < \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{b+1} \binom{b+1}{k} = \frac{1}{2} \cdot 2^{b+1} = 2^b < 2^c.$$

Пусть теперь $2k = b+1$. Имеем

$$\binom{b+1}{k} = \binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} = 2^k \cdot \prod_{r=2}^k \frac{2r-1}{r} = 2^{2k-1} \cdot \prod_{r=2}^k \left(1 - \frac{1}{2r}\right) < 2^{2k-1} < 2^b < 2^c.$$

В случае $k = b+1$ имеем

$$\binom{c}{k} = \binom{b+\beta}{b+1} = \frac{(b+\beta)(b+\beta-1)\dots(b+\beta-b)}{(b+1)(b+1-1)\dots(b+1-b)} = \prod_{j=0}^b \frac{b+\beta-j}{b+1-j} < 1.$$

Оценка снизу. При $k \leq b$ имеем

$$\binom{c}{k} = \binom{b+\beta}{k} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{b+\beta-j}{k-j} \geq \prod_{j=0}^{k-1} \frac{b-j+\beta}{b-j} = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{\beta}{b-j}\right) \geq 1.$$

При $k = b+1$ найдем

$$\binom{c}{k} = \binom{b+\beta}{b+1} = \prod_{j=0}^b \frac{b+\beta-j}{b+1-j} = \frac{\beta}{b+1} \prod_{j=0}^{b-1} \frac{b+\beta-j}{b-j} \geq \frac{\beta}{b+1} = \frac{\{c\}}{k}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $x \geq x_0 > 0$, $10 \leq y \leq 10^{-9}x$, $M > 2$ – натуральное число, α – вещественное число с условием $0 < |\alpha| \leq 0.5$, $c > 1$ – нецелое число, $k = [c] + 1$,

$$W_1(h) = \sum_{x-y < n \leq x} e((\alpha+h)n^c), \quad \mathfrak{x} = \binom{c}{k} k!.$$

Тогда справедлива оценка

$$W_1 = \sum_{1 \leq |h| \leq M} \frac{W_1(h)}{\alpha+h} \ll 2^k y ((\mathfrak{x} M x^{c-k})^{1/(2^k-2)} + y^{-1/2^{k-2}} (\mathfrak{x} x^{c-k})^{-1/(2^k-2)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $|h| \leq M$ оценим сумму $W_1(h)$. Производная порядка k функции $f(t) = (h+\alpha)t^c$ на отрезке $[x-y, x]$ непрерывна, сохраняет знак и удовлетворяет неравенствам

$$\binom{c}{k} k! |h+\alpha| x^{c-k} \leq |f^{(k)}(t)| \leq \binom{c}{k} k! |h+\alpha| (x-y)^{c-k}.$$

Полагая

$$\lambda_k = \mathfrak{x}|h + \alpha|x^{c-k}, \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(c, k) = \binom{c}{k} k!,$$

$$\eta = \frac{(x-y)^{c-k}}{x^{c-k}}, \quad 1 < \eta < 1 + 10^{-8} = c_1,$$

сумму $W_1(h)$ оценим, применяя лемму 3. Имеем

$$|W_1(h)| \ll y((\mathfrak{x}x^{c-k})^{1/(2K-2)}|h + \alpha|^{1/(2K-2)} + y^{-2/K}(\mathfrak{x}x^{c-k})^{-1/(2K-2)}|h + \alpha|^{-1/(2K-2)}). \quad (3.1)$$

Переходя в сумме W_1 к оценкам и подставляя найденную оценку (3.1) для $W_1(h)$, $h \neq 0$, найдем

$$\begin{aligned} W_1 &\ll y \sum_{1 \leq |h| \leq M} ((\mathfrak{x}x^{c-k})^{1/(2K-2)}|h + \alpha|^{1/(2K-2)-1} \\ &\quad + y^{-2/K}(\mathfrak{x}x^{c-k})^{-1/(2K-2)}|h + \alpha|^{-1/(2K-2)-1}) \\ &\leq 2y((\mathfrak{x}x^{c-k})^{1/(2K-2)}Y_1 + y^{-2/K}(\mathfrak{x}x^{c-k})^{-1/(2K-2)}Y_2), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$Y_1 = \sum_{1 \leq h \leq M} (h - \alpha)^{1/(2K-2)-1}, \quad Y_2 = \sum_{1 \leq h \leq M} (h - \alpha)^{-1/(2K-2)-1}.$$

В Y_1 и Y_2 сумму по h заменяя интегралом и воспользовавшись условиями $k \geq 2$, $K = 2^{k-1}$, получим

$$\begin{aligned} |Y_1| &\leq (1 - \alpha)^{1/(2K-2)-1} + \int_1^M (h - \alpha)^{1/(2K-2)-1} dh \leq (2K - 2)M^{1/(2K-2)} \\ &\leq 2^k M^{1/(2K-2)}, \\ |Y_2| &\leq (1 - \alpha)^{-1/(2K-2)-1} + \int_1^M (h - \alpha)^{-1/(2K-2)-1} dh \leq 2^k \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Подставляя оценки Y_1 и Y_2 в правую часть (3.2), получим утверждение леммы.

ЛЕММА 8. Пусть $x \geq x_0 > 0$, $10 \leq y \leq 10^{-9}x$, A – фиксированное положительное число больше единицы, $M > 2$ – натуральное число, $M_0 = \pi(M + 0.5)$, $M_1 = M_0 \ln(\mathcal{L}^A \ln M)$, $c > 1$ – нецелое число, $k = [c] + 1$,

$$W_2 = \sum_{x-y < n \leq x} \frac{1}{\sqrt{1 + M_0 \sin^2 \pi n^c}}, \quad \mathfrak{x} = \binom{c}{k} k!.$$

Тогда справедлива оценка

$$W_2 \ll \frac{y}{\mathcal{L}^A} + \frac{yM_1 \ln M}{M} ((\mathfrak{x}x^{c-k}M_1)^{1/(2K-2)} + y^{-2/K}(\mathfrak{x}x^{c-k}M_1)^{-1/(2K-2)} + M_1^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись для функции $R_{M_0}(n^c)$ леммой 2, найдем

$$W_2 = \sum_{x-y < n \leq x} \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h e(hn^c) = W_3 + W_4,$$

$$W_3 = \sum_{|h| \leq M_0 \ln x} c_h W_3(h), \quad W_3(h) = \sum_{x-y < n \leq x} e(hn^c),$$

$$W_4 = \sum_{x-y < n \leq x} \sum_{|h| > M_0 \ln x} c_h e(hn^c).$$

Пользуясь оценкой коэффициентов Фурье

$$|c_h| = |c_{-h}| \leq \frac{4 + \ln M_0}{\pi M_0} \exp\left(-\frac{h}{M_0}\right),$$

оценим W_4 . Имеем

$$W_4 \leq \sum_{x-y < n \leq x} \sum_{|h| > M_1} |c_h| \ll \frac{y \ln M_0}{M_0} \sum_{h > M_1} \exp\left(-\frac{h}{M_0}\right)$$

$$= \frac{y \ln M_0}{M_0 \mathcal{L}^A \ln M} \cdot \frac{\exp(\{M_1\}/M_0)}{\exp(1/M_0) - 1} \leq \frac{y}{M_0 \mathcal{L}^A} \cdot \frac{1}{\exp(1/M_0) - 1} \ll \frac{y}{\mathcal{L}^A}.$$

Переходим к оценке W_3 . Имеем

$$|W_3| \ll \frac{\ln M_0}{M_0} \sum_{1 \leq h \leq M_1} |W_3(h)| + \frac{y \ln M_0}{M_0}. \quad (3.3)$$

Производная порядка k функции $f(t) = ht^c$ на отрезке $[x-y, x]$ непрерывна, сохраняет знак и удовлетворяет неравенствам

$$\binom{c}{k} k! h x^{c-k} \leq |f^{(k)}(t)| \leq \binom{c}{k} k! h (x-y)^{c-k}.$$

Полагая

$$\lambda_k = \mathfrak{a} h x^{c-k}, \quad \mathfrak{a} = \binom{c}{k} k!,$$

$$\eta = \frac{(x-y)^{c-k}}{x^{c-k}}, \quad 1 < \eta \leq \frac{1}{1-10^{-9}} < 1 + 10^{-8} = c_1,$$

применим к сумме $W_3(h)$ лемму 3. Имеем

$$|W_3(h)| \ll y \left((\mathfrak{a} x^{c-k})^{1/(2K-2)} h^{1/(2K-2)} + y^{-2/K} (\mathfrak{a} x^{c-k})^{-1/(2K-2)} h^{-1/(2K-2)} \right).$$

Суммируя эту оценку по всем h , $1 \leq h \leq M_1$, затем подставляя ее в (3.3), найдем

$$W_3 \ll \frac{y M_1 \ln M_0}{M_0} \left((\mathfrak{a} x^{c-k} M_1)^{1/(2K-2)} + y^{-2/K} (\mathfrak{a} x^{c-k} M_1)^{-1/(2K-2)} + M_1^{-1} \right).$$

4. Доказательство теоремы 1. Введем обозначения: $M = \mathcal{L}^A \ln \mathcal{L}$, $k = [c] + 1$ и не ограничивая общности будем считать, что $\alpha > 0$, $y \leq 10^{-9}x$. В лемме 1, полагая $u = n^c$, найдем

$$S_c(\alpha; x, y) = \frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i} \sum_{|h| \leq M} \frac{1}{\alpha + h} \sum_{x-y < n \leq x} e((\alpha + h)n^c) + \sum_{x-y < n \leq x} e(\alpha n^c) Q_M(n^c).$$

Переходя к оценкам, найдем

$$|S_c(\alpha; x, y)| \ll \sin \pi \alpha (|W_1| + |W_2|) + \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} |W_1(0)| \ll |W_1| + |W_2| + |W_1(0)|, \quad (4.1)$$

$$W_1 = \sum_{1 \leq |h| \leq M} \frac{W_1(h)}{\alpha + h}, \quad W_1(h) = \sum_{x-y < n \leq x} e((\alpha + h)n^c),$$

$$W_2 = \sum_{x-y < n \leq x} R_{M_0}(n^c).$$

Для оценки суммы W_2 , воспользовавшись леммой 8, имея в виду, что $\ln M \asymp \ln \mathcal{L}$ и $M_1 = M_0 \ln(\mathcal{L}^A \ln M) \asymp \mathcal{L}^A \ln^2 \mathcal{L}$, имеем

$$W_2 \ll y \ln^2 \mathcal{L} ((\mathfrak{A} x^{c-k} \mathcal{L}^A \ln^2 \mathcal{L})^{1/(2K-2)} + y^{-2/K} l (\mathfrak{A} x^{c-k} \mathcal{L}^A \ln^2 \mathcal{L})^{-1/(2K-2)}) + \frac{y}{\mathcal{L}^A}. \quad (4.2)$$

Для суммы W_1 все условия леммы 7 выполняются. Поэтому

$$|W_1| \ll 2^k y ((\mathfrak{A} M x^{c-k})^{1/(2K-2)} + y^{-2/K} (\mathfrak{A} x^{c-k})^{-1/(2K-2)}). \quad (4.3)$$

Оценка $W_1(0)$. Полуинтервал $\mathcal{E} = (x^{1-c} y^{-1} \mathcal{L}^A, 0.5]$ в случае $c > 2$ разобьем на множества $\mathcal{E}_r$, $r = 1, \dots, [c]$ и:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= (x^{1-c} y^{-1} \mathcal{L}^A, (2c)^{-1} x^{1-c}], \\ \mathcal{E}_2 &= ((2c)^{-1} x^{1-c}, 2^{-c} x^{2-c} \mathcal{L}^{-2A}], \\ \mathcal{E}_r &= (2^{-c} x^{r-1-c} \mathcal{L}^{-(2^{r-1}-2)A}, 2^{-c} x^{r-c} \mathcal{L}^{-(2^r-2)A}], \quad r = 3, 4, \dots, [c], \\ \mathcal{E}_{[c]+1} &= (2^{-c} x^{[c]-c} \mathcal{L}^{-(2^{[c]}-2)A}, 0.5]. \end{aligned}$$

А в случае $c < 2$ разобьем $\mathcal{E}$ на два множества:

$$\mathcal{E}_1 = (x^{1-c} y^{-1} \mathcal{L}^A, (2c)^{-1} x^{1-c}], \quad \mathcal{E}_{[c]+1} = ((2c)^{-1} x^{[c]-c} \mathcal{L}^{-(2^{[c]}-2)A}, 0.5].$$

Множества $\mathcal{E}_1$ в обоих случаях одинаковы, а $\mathcal{E}_{[c]+1}$ отличаются друг от друга только коэффициентом при нижней границе. $\mathcal{E}_{[c]+1}$ в обоих случаях представим в едином виде

$$\mathcal{E}_{[c]+1} = (\beta_c^{-1} x^{[c]-c} \mathcal{L}^{-(2^{[c]}-2)A}, 0.5],$$

где $\beta_c = 2c$, если $c < 2$ и $\beta_c = 2^c$, если $c > 2$.

Оценка $W_1(0)$ при $\alpha \in \mathcal{E}_1$. Производная функции $f(t) = \alpha t^c$, $t \in [x-y, x]$, монотонна и удовлетворяет неравенству

$$c(1 - 10^{-9})^{c-1} \cdot \frac{\mathcal{L}^A}{y} < f'(t) \leq 0.5.$$

Применяя к сумме $W_1(0)$ сначала лемму 4, а затем лемму 5, найдем

$$W_1(0) = \int_{x-y}^x e(\alpha t^c) dt + O(1) \ll \min \left(y, \frac{1}{\min |f'(t)|} \right) \ll \frac{y}{\mathcal{L}^A}. \quad (4.4)$$

Оценка $W_1(0)$ при $\alpha \in \mathcal{E}_r$, $2 \leq r \leq [c]$. Производная порядка r функции $f(t) = \alpha t^c$ на отрезке $[x - y, x]$ непрерывна, сохраняет знак и удовлетворяет неравенствам

$$\binom{c}{r} r! \alpha (x - y)^{c-r} \leq f^{(r)}(t) \leq \binom{c}{r} r! \alpha x^{c-r}.$$

Полагая

$$\lambda_r = \alpha \alpha (x - y)^{c-r}, \quad \alpha = \binom{c}{r} r!, \quad \eta = \left(1 - \frac{y}{x}\right)^{r-c} \leq (1 - 10^{-9})^{2-c} = c_1,$$

применим к сумме $W_1(0)$, $\alpha \in \mathcal{E}_r$ лемму 3. Имеем

$$W_1(0) \ll y \left((\alpha \alpha (x - y)^{c-r})^{1/(2K-2)} c_1^{2/K} + y^{-2/K} (\alpha \alpha (x - y)^{c-r})^{-1/(2K-2)} \right).$$

Воспользовавшись первым утверждением леммы 6 и формулой Стирлинга, найдем

$$\begin{aligned} \alpha^{1/(2K-2)} &\leq 2^{c/(2^r-2)} \exp\left(\frac{\ln r!}{2^r-2}\right) \\ &= 2^{c/(2^r-2)} \exp\left(\frac{r \ln r - r + \ln \sqrt{2\pi r} + O(r^{-1})}{2^r-2}\right) \ll 2^{c/(2^r-2)}, \\ \alpha^{-1/(2K-2)} &\leq \exp\left(-\frac{\ln r!}{2^r-2}\right) = \exp\left(-\frac{r \ln r - r + \ln \sqrt{2\pi r} + O(r^{-1})}{2^r-2}\right) \ll 1. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства $c_1^{-1} x^{c-r} \leq (x - y)^{c-r} < x^{c-r}$, получим

$$W_1(0) \ll y \left(2^{c/(2^r-2)} (\alpha x^{c-r})^{1/(2K-2)} + y^{-2/K} (\alpha x^{c-r})^{-1/(2K-2)} \right).$$

Далее, воспользовавшись условием $\alpha \in \mathcal{E}_r$, т.е. неравенствами

$$b_r x^{-1} \mathcal{L}^{-(2^{r-1}-2)A} < \alpha x^{c-r} \leq 2^{-c} \mathcal{L}^{-(2^r-2)A},$$

где $b_2 = (2c)^{-1}$ и $b_r = 2^{-c}$, если $3 \leq r \leq [c]$, имеем

$$\begin{aligned} W_1(0) &\ll y \left(2^{c/(2^r-2)} ((2^{-c} \mathcal{L})^{-(2^r-2)A})^{1/(2^r-2)} + y^{-2^{2-r}} (b_r x^{-1} \mathcal{L}^{-(2^{r-1}-2)A})^{-1/(2^r-2)} \right) \\ &= \frac{y}{\ln^A x} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{2cx} \mathcal{L}^A \cdot \Delta}{y} \right)^{2^{2-r}} \right), \quad \Delta = \frac{(b_r^{-1} x \mathcal{L}^{(3 \cdot 2^{r-1}-4)A})^{1/(4-2^{3-r})}}{\sqrt{2cx} \mathcal{L}^A}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\Delta = 1$ при $r = 2$, а при $r > 3$ воспользовавшись условием (1.1), т.е. неравенством

$$2^c \leq \frac{1}{6A} \cdot \frac{\mathcal{L}}{\ln \mathcal{L}}, \quad (4.6)$$

имеем

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{(2^c x \mathcal{L}^{(3 \cdot 2^{r-1}-4)A})^{1/3}}{x^{1/2} \mathcal{L}^A} \leq \frac{2^{c/3} \mathcal{L}^{(2^{c-1}-1/3)A}}{x^{1/6}} < \frac{(\mathcal{L}^{(2^{c-1}-1/3)A})^2}{x^{1/6}} \\ &= \frac{\mathcal{L}^{(2^c-2/3)A}}{x^{1/6}} < \frac{\mathcal{L}^{2^c A}}{x^{1/6}} = \exp\left(2^c A \ln \mathcal{L} - \frac{1}{6} \mathcal{L}\right) \leq 1. \end{aligned}$$

Оценка $W_1(0)$ при $\alpha \in \mathcal{E}_{[c]+1}$. При доказательстве леммы 7 для суммы $W_1(h)$ была получена оценка (3.1) для произвольного $|h| \leq M$. Воспользовавшись этой оценкой при $h = 0$, имеем

$$|W_1(0)| \ll y((\alpha x^{c-k})^{1/(2K-2)} + y^{-2/K}(\alpha x^{c-k})^{-1/(2K-2)}).$$

Далее из условия $\alpha \in \mathcal{E}_{[c]+1}$, т.е. из неравенства $\beta_c^{-1} x^{[c]-c} \mathcal{L}^{-(2^{[c]}-2)A} < \alpha \leq 0.5$, находим

$$|W_1(0)| \ll y(2^{-1/(2^{[c]}+1-2)}(\alpha x^{c-k})^{1/(2K-2)} + \beta_c^{1/(2^{[c]}+1-2)} y^{-2/K}(\alpha x^{[c]-k})^{-1/(2K-2)} \mathcal{L}^{((2^{[c]}-2)A)/(2K-2)}).$$

Пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} \beta_c^{1/(2^{[c]}+1-2)} &= (2c)^{1/2} < 2, & \text{при } c < 2, \\ \beta_c^{1/(2^{[c]}+1-2)} &= 2^{c/(2^{[c]}+1-2)} < 2, & \text{при } c > 2 \end{aligned}$$

получим

$$|W_1(0)| \ll y((\alpha x^{c-k})^{1/(2K-2)} + y^{-2/K}(\alpha x^{[c]-k})^{-1/(2K-2)} \mathcal{L}^{((2^{[c]}-2)A)/(2K-2)}).$$

Отсюда, из (4.4) и (4.5) следует, что для всех $\alpha \in \mathcal{E}$ при $y \geq \sqrt{2cx} \mathcal{L}^A$ для $W_1(0)$, справедлива оценка

$$|W_1(0)| \ll y \left(\frac{1}{\mathcal{L}^A} + (\alpha x^{c-k})^{1/(2K-2)} + y^{-2/K}(\alpha x^{[c]-k})^{-1/(2K-2)} \mathcal{L}^{((2^{[c]}-2)A)/(2K-2)} \right). \quad (4.7)$$

Оценка $S_c(\alpha; x, y)$. Пользуясь леммой 6 и формулой Стирлинга, находим

$$\alpha^{1/(2K-2)} \leq (k!)^{1/(2^k-2)} = \exp\left(\frac{\ln k!}{2^k-2}\right) = \exp\left(\frac{k \ln k - k + O(\ln k)}{2^k-2}\right) \ll 1, \quad (4.8)$$

$$\alpha^{-1/(2K-2)} \leq \left(\frac{1}{(k-1)!}\right)^{1/(2K-2)} \{c\}^{-1/(2K-2)} \ll \{c\}^{-1/(2K-2)}. \quad (4.9)$$

Подставляя оценки для W_2 , W_1 , $W_1(0)$ соответственно из (4.2), (4.3), (4.7) в соотношение (4.1) и воспользовавшись для степеней α оценками (4.8) и (4.9), найдем

$$\begin{aligned} |S_c(\alpha; x, y)| &\ll 2^c y((x^{c-k} \mathcal{L}^A \ln \mathcal{L})^{1/(2K-2)} + y^{-2/K}(\{c\} x^{c-k})^{-1/(2K-2)}) \\ &+ y \ln^2 \mathcal{L}((x^{c-k} \mathcal{L}^A \ln^2 \mathcal{L})^{1/(2K-2)} + y^{-2/K}(\{c\} x^{c-k} \mathcal{L}^A \ln^2 \mathcal{L})^{-1/(2K-2)}) \\ &+ y((x^{c-k})^{1/(2K-2)} + y^{-2/K}(\{c\} x^{[c]-k})^{-1/(2K-2)} \mathcal{L}^{((2^{[c]}-2)A)/(2K-2)}) + \frac{y}{\mathcal{L}^A}. \end{aligned}$$

Правую часть последнего неравенства, имея в виду, что $k = [c] + 1$, $c - k = \{c\} - 1$, $K = 2^{k-1} = 2^{[c]}$, представим в виде

$$|S_c(\alpha; x, y)| \ll y(\Delta_1 + y^{-2^{1-[c]}}(x\{c\}^{-1})^{1/(2^{[c]}+1-2)}\Delta_2) + \frac{y}{\mathcal{L}^A}, \quad (4.10)$$

где

$$\Delta_1 = ((2^c + (\ln \mathcal{L})^{1/(2^{[c]+1}-2)+2}) \mathcal{L}^{A/(2^{[c]+1}-2)} (\ln \mathcal{L})^{1/(2^{[c]+1}-2)} + 1) x^{\{c\}-1/(2^{[c]+1}-2)},$$

$$\Delta_2 = (2^c + \mathcal{L}^{-A/(2^{[c]+1}-2)} (\ln \mathcal{L})^{2-2/(2^{[c]+1})}) x^{-\{c\}/(2^{[c]+1}-2)} + \mathcal{L}^{((2^{[c]}-2)A)/(2^{[c]+1}-2)}.$$

Воспользовавшись соотношением $2^c \ll \mathcal{L}(\ln \mathcal{L})^{-1}$, которое следует из (4.6), имеем

$$\Delta_1 \ll \mathcal{L}^{A/(2^{[c]+1}-2)+1} (\ln \mathcal{L})^{1/(2^{[c]+1}-2)-1} x^{\{c\}-1/(2^{[c]+1}-2)},$$

$$\Delta_2 \ll \mathcal{L}(\ln \mathcal{L})^{-1} x^{-\{c\}/(2^{[c]+1}-2)} + \mathcal{L}^{((2^{[c]}-2)A)/(2^{[c]+1}-2)}.$$

Пользуясь условием $\|c\| \geq \delta = \delta(x, c, A)$, $\delta = (2^{[c]+1} - 1)(A + 1)\mathcal{L}^{-1} \ln \mathcal{L}$, найдем

$$x^{\{c\}-1/(2^{[c]+1}-2)} \leq x^{-\delta/(2^{[c]+1}-2)} = \mathcal{L}^{-A-1-(A+1)/(2^{[c]+1}-2)}, \quad (4.11)$$

$$x^{-\{c\}/(2^{[c]+1}-2)} \leq x^{-\delta/(2^{[c]+1}-2)} = \mathcal{L}^{-A-1-(A+1)/(2^{[c]+1}-2)}. \quad (4.12)$$

Подставляя эти оценки, соответственно в правую часть выше найденных оценок для Δ_1 и Δ_2 , получим

$$\Delta_1 \ll \mathcal{L}^{-A}, \quad \Delta_2 \ll \mathcal{L}^{((2^{[c]}-2)A)/(2^{[c]+1}-2)}.$$

Отсюда и из (4.10) имеем

$$|S_c(\alpha; x, y)| \ll y(\mathcal{L}^{-A} + y^{-2^{1-[c]}} (x\{c\}^{-1})^{1/(2^{[c]+1}-2)} \cdot \mathcal{L}^{((2^{[c]}-2)A)/(2^{[c]+1}-2)}) + \frac{y}{\mathcal{L}^A}$$

$$= \frac{y}{\mathcal{L}^A} \left(\frac{\Delta}{y} \right)^{2^{1-[c]}} + \frac{2y}{\mathcal{L}^A}, \quad \Delta = \left(\frac{x}{\{c\}} \mathcal{L}^{(3 \cdot 2^{[c]} - 4)A} \right)^{1/(4-2^{2-[c]})}. \quad (4.13)$$

При выводе оценки (4.13) мы использовали соотношение $y \geq \sqrt{2cx} \mathcal{L}^A$. Теперь покажем в зависимости от величины параметра c выполнение следующего неравенства:

$$\Delta < \begin{cases} x^{1/2}, & \text{при } c > 2, \\ \sqrt{2c} x^{1/2} \mathcal{L}^A, & \text{при } 1.1 \leq c < 2, \\ x^{1/2} \mathcal{L}^{A+0.5}, & \text{при } 1 < c < 1.1. \end{cases}$$

При $c > 2$ пользуясь условиями $\{c\} > \delta$ и (4.6), получим

$$\Delta \leq \left(\frac{x}{\delta} \mathcal{L}^{(3 \cdot 2^{[c]} - 4)A} \right)^{1/(4-2^{2-[c]})} = \left(\frac{1}{(2^{[c]+1} - 1)(A + 1)} \cdot \frac{x \mathcal{L}^{(3 \cdot 2^{[c]} - 4)A+1}}{\ln \mathcal{L}} \right)^{1/(4-2^{2-[c]})}$$

$$< (x \mathcal{L}^{2^{[c]} \cdot 3A})^{1/(4-2^{2-[c]})} = (x \exp(2^{[c]} \cdot 3A \ln \mathcal{L}))^{1/(4-2^{2-[c]})}$$

$$\leq \left(x \exp \left(\frac{1}{6A} \cdot \frac{\mathcal{L}}{\ln \mathcal{L}} \cdot 3A \ln \mathcal{L} \right) \right)^{1/(4-2^{2-[c]})} = x^{3/2 \cdot 1/(4-2^{2-[c]})} \leq x^{1/2}.$$

При $1.1 \leq c < 2$ для величины Δ получим

$$\Delta = (x\{c\}^{-1})^{1/2} \mathcal{L}^A \leq (10x)^{1/2} \mathcal{L}^A \ll \sqrt{2c} x^{1/2} \mathcal{L}^A.$$

Если же $1 < c < 1.1$, то имеем

$$\Delta = (x\{c\}^{-1})^{1/2} \mathcal{L}^A \leq (x\delta^{-1})^{1/2} \mathcal{L}^A$$

$$= x^{1/2} \left(3(A + 1) \cdot \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} \right)^{-1/2} \mathcal{L}^A \ll x^{1/2} \mathcal{L}^{A+0.5}.$$

5. Доказательство теоремы 2. Как при доказательстве теоремы 1, будем считать, что $y \leq 10^{-9}x$. Введем обозначения: $M = \mathcal{L}^A \ln \mathcal{L}$, $k = [c] + 1$ и, воспользовавшись леммой 1, найдем

$$S_c(\alpha; x, y) = \frac{1 - e(-\alpha)}{2\pi i \alpha} W_1(0) + O(|\sin \pi \alpha|(|W_1| + |W_2|)), \quad (5.1)$$

$$W_1 = \sum_{1 \leq |h| \leq M} \frac{W_1(h)}{\alpha + h}, \quad W_1(h) = \sum_{x-y < n \leq x} e((\alpha + h)n^c), \quad W_2 = \sum_{x-y < n \leq x} R_{M_0}(n^c).$$

При доказательстве теоремы 1 для сумм W_1 и W_2 были получены оценки (4.2) и (4.3). Для оценки степеней α в (4.2) и (4.3), воспользовавшись неравенствами (4.8) и (4.9), найдем

$$\begin{aligned} |W_1| + |W_2| &\ll 2^c y ((x^{c-k} \mathcal{L}^A \ln \mathcal{L})^{1/(2K-2)} + y^{-2/K} (\{c\} x^{c-k})^{-1/(2K-2)}) + \frac{y}{\mathcal{L}^A} \\ &+ y \ln^2 \mathcal{L} ((x^{c-k} \mathcal{L}^A \ln^2 \mathcal{L})^{1/(2K-2)} + y^{-2/K} (\{c\} x^{c-k} \mathcal{L}^A \ln^2 \mathcal{L})^{-1/(2K-2)}). \end{aligned}$$

Правую часть последнего неравенства, имея в виду, что $k = [c] + 1$, $c - k = \{c\} - 1$, $K = 2^{k-1} = 2^{[c]}$, представим в виде

$$|W_1| + |W_2| \ll y(\Delta_1 + y^{-2^{1-[c]}} (x\{c\}^{-1})^{1/(2^{[c]+1}-2)} \Delta_2) + \frac{y}{\mathcal{L}^A}, \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (2^c + (\ln^2 \mathcal{L})^{1/(2^{[c]+1}-2)+2}) \mathcal{L}^{A/(2^{[c]+1}-2)} (\ln \mathcal{L})^{1/(2^{[c]+1}-2)} \cdot x^{\{c\}-1/(2^{[c]+1}-2)}, \\ \Delta_2 &= (2^c + \mathcal{L}^{-A/(2^{[c]+1}-2)} (\ln \mathcal{L})^{2-2/(2^{[c]+1})}) x^{-\{c\}/(2^{[c]+1}-2)}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношением $2^c \ll \mathcal{L}(\ln \mathcal{L})^{-1}$, которое следует из (1.1), затем неравенствами (4.11) и (4.12), находим

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\ll \mathcal{L}^{A/(2^{[c]+1}-2)+1} (\ln \mathcal{L})^{1/(2^{[c]+1}-2)-1} \cdot \mathcal{L}^{-A-1-(A+1)/(2^{[c]+1}-2)} \ll \mathcal{L}^{-A}, \\ \Delta_2 &\ll \mathcal{L}(\ln \mathcal{L})^{-1} \cdot \mathcal{L}^{-A-1-(A+1)/(2^{[c]+1}-2)} \ll \mathcal{L}^{-A}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (5.2), получим

$$\begin{aligned} |W_1| + |W_2| &\ll \frac{y}{\mathcal{L}^A} \left(1 + y^{-2^{1-[c]}} \left(\frac{x}{\{c\}} \right)^{1/(2^{[c]+1}-2)} \right) + \frac{y}{\mathcal{L}^A} \\ &= \frac{y}{\mathcal{L}^A} \left(\frac{\Delta}{y} \right)^{2^{1-[c]}} + \frac{2y}{\mathcal{L}^A}, \quad \Delta = \left(\frac{x}{\{c\}} \right)^{1/(4-2^{2-[c]})}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Пользуясь условием $\|c\| \geq \delta$, $\delta = (2^{[c]+1} - 1)(A + 1)\mathcal{L}^{-1} \ln \mathcal{L}$, найдем

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \left(\frac{x}{\delta} \right)^{1/(4-2^{2-[c]})} = \left(x \left((2^{[c]+1} - 1)(A + 1) \cdot \frac{\ln \mathcal{L}}{\mathcal{L}} \right)^{-1} \right)^{1/(4-2^{2-[c]})} \\ &= ((2^{[c]+1} - 1)(A + 1))^{-1/(4-2^{2-[c]})} \left(\frac{x \mathcal{L}}{\ln \mathcal{L}} \right)^{1/(4-2^{2-[c]})} < (x \mathcal{L})^{1/(4-2^{2-[c]})}. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду (5.3) при

$$y \geq (x\mathcal{L})^{1/(4-2^{2-[c]})}$$

справедлива оценка

$$|W_1| + |W_2| \ll \frac{y}{\mathcal{L}^A}. \quad (5.4)$$

Вычисление $W_1(0)$. При $|\alpha| \leq x^{1-c}y^{-1}\mathcal{L}^A$ производная функции $f(t) = \alpha t^c$ на интервале $(x-y, x)$ монотонна, знакопостоянна и удовлетворяет неравенству

$$f'(t) \leq \alpha c x^{c-1} \leq \frac{\mathcal{L}^A}{x^{c-1}y} \cdot c x^{c-1} = \frac{c\mathcal{L}^A}{y} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому, применяя к сумме $W_1(0)$ лемму 4, найдем

$$W_1(0) = \sum_{x-y < n \leq x} e(\alpha n^c) = \int_{x-y}^x e(\alpha t^c) dt + O(1).$$

Отсюда и из (5.4) ввиду (5.1), следует утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. M. Deshouillers, “Problème de Waring avec exposants non entiers”, *Bull. Soc. Math. France*, **101** (1973), 285–295.
- [2] Г. И. Архипов, А. Н. Житков, “О проблеме Варинга с нецелым показателем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48:6** (1984), 1138–1150.
- [3] К. Буриев, “Об исключительном множестве в проблеме Харди–Литлвуда для нецелых степеней”, *Матем. заметки*, **46:4** (1989), 127–128.
- [4] И. М. Виноградов, А. А. Карацуба, “Метод тригонометрических сумм в теории чисел”, *Алгебра, математическая логика, теория чисел, топология*, Тр. МИАН СССР, **168**, 1984, 4–30.
- [5] П. З. Рахмонов, “Короткие тригонометрические суммы с нецелой степенью натурального числа”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012, № 6, 51–55.
- [6] О. В. Попов, “Арифметические приложения оценок сумм Г. Вейля от многочленов растущей степени”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4:2** (1998), 595–640.
- [7] Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков, *Лекции по математическому анализу*, Дрофа, М., 2003.
- [8] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983.
- [9] И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел*, Наука, М., 1980.
- [10] Г. И. Архипов, А. А. Карацуба, В. Н. Чубариков, *Теория кратных тригонометрических сумм*, Наука, М., 1987.

П. З. Рахмонов

Московский государственный университет им.

М. В. Ломоносова

E-mail: parviz.msu@gmail.com

Поступило

03.09.2012