Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Паньженский, Автоморфизмы многообразий
Римана–Картана, *Матем. заметки*, 2015, том 98, вы-
пуск 4, 544–556

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:38:38

Автоморфизмы многообразий Римана–Картана

В. И. Паньженский

Доказано, что максимальная размерность группы Ли автоморфизмов n -мерного многообразия (пространства) Римана–Картана $(M^n, g, \tilde{\nabla})$ равна

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1,$$

если $n > 4$ и если связность $\tilde{\nabla}$ полусимметрическая при $n \geq 2$. Если $n = 3$, то максимальная размерность группы равна 6. Исследованы трехмерные пространства Римана–Картана $(M^3, g, \tilde{\nabla})$ с группой автоморфизмов максимальной размерности: введены понятия кручения s и кривизны $\tilde{k}$; установлено, что s и $\tilde{k}$ являются характерными константами пространства и $\tilde{k} = k - s^2$, где k – секционная кривизна риманова пространства (M^3, g) ; дана геометрическая интерпретация кручения. Для пространств Римана–Картана с кососимметрической связностью введено понятие кручения в данной точке в данном трехмерном направлении.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10208

1. Введение

Как известно, с созданием общей теории относительности впервые было геометризовано гравитационное поле. Геометрия пространства-времени в ОТО является геометрией четырехмерного псевдориманова многообразия лоренцевой сигнатуры. Затем была поставлена задача геометризации единой теории гравитации и электромагнетизма. Именно в рамках решения этой задачи возникли новые неримановы геометрии. Первую такую геометрию предложил Г. Вейль в 1918 г. Другой вариант геометризации гравитации и электромагнетизма был предложен Э. Картаном в 1922 г. (см., например, обзор [1]). В геометрии Картана связность Леви–Чивита заменяется метрической связностью с кручением. В результате пространственно-временное многообразие наделяется и кривизной, и кручением. В дальнейшем этот подход привел к созданию теории Эйнштейна–Картана. В этой теории предполагается, что связность Картана является полусимметрической, а след ее тензора кручения с точностью до размерного множителя отождествляется с векторным потенциалом электромагнитного поля. Многочисленные варианты геометризации физических теорий, объединяющих различные виды взаимодействий, с необходимостью приводят к учету кручения; при этом в качестве модельных используются

многомерные пространства и с положительно определенной метрикой (например, в квантовой теории поля [2], [3]).

В настоящей работе мы исследуем автоморфизмы многообразий Римана–Картана с положительно определенной метрикой, хотя теорема 1 и теорема 3 об оценке размерности группы Ли автоморфизмов справедливы и для многообразий Римана–Картана со знакопеременной метрикой. В доказательстве этих теорем достаточно учесть несколько более сложное строение алгебры Ли псевдоортогональной группы. В отличие от классической методики Егорова оценки размерности группы движений в пространствах аффинной связности [4], где исследуются условия интегрируемости уравнений инвариантности связности, мы оцениваем размерности группы изотропий как подгруппы ортогональной группы, оставляющей инвариантным тензор кручения. Автоморфизмы четырехмерных многообразий Римана–Картана лоренцевой сигнатуры исследованы в работе [5].

2. Многообразие Римана–Картана и их автоморфизмы

2.1. Пусть M – гладкое n -мерное, $n \geq 2$, многообразие, g – риманова метрика на M , $\tilde{\nabla}$ – метрическая связность с кручением. Метрика g и связность $\tilde{\nabla}$ задают на M структуру Римана–Картана. Многообразие M , наделенное структурой Римана–Картана, называется *многообразием (пространством) Римана–Картана* [1]. Связность $\tilde{\nabla}$ можно представить в виде $\tilde{\nabla} = \hat{\nabla} + \tilde{S}/2$, где $\hat{\nabla}$ – сопутствующая симметрическая связность, $\tilde{S}$ – тензор кручения связности $\tilde{\nabla}$. С другой стороны $\tilde{\nabla} = \nabla + \tilde{T}$, где ∇ – связность Леви–Чивита метрики g , а $\tilde{T}$ – тензор деформации связности ∇ . Ковариантный тензор деформации $T(X, Y, Z) = g(\tilde{T}(X, Y), Z)$ кососимметричен по последней паре аргументов, что немедленно следует из ковариантного постоянства метрического тензора g в связности $\tilde{\nabla}$. Таким образом, структура Римана–Картана однозначно определяется заданием пары тензорных полей (g, T) – метрического тензора и тензора деформации, первый из которых симметричен по своим аргументам, а второй кососимметричен по последней паре аргументов. Отметим также, что тензор деформации однозначно определяется тензором кручения и наоборот, а симметрическая часть $\hat{\nabla}$ связности $\tilde{\nabla}$ совпадает со связностью Леви–Чивита ∇ тогда и только тогда, когда тензор T кососимметричен по своим аргументам [6; гл. VII, § 1]. В этом случае $T = S/2$, где S – ковариантный тензор кручения: $S(X, Y, Z) = g(\tilde{S}(X, Y), Z)$, а связность $\tilde{\nabla}$ называется *кососимметрической*. Если

$$S(X, Y, Z) = g(X, Z)\Theta(Y) - g(Y, Z)\Theta(X), \quad \text{где } \Theta = \frac{1}{n-1} \text{trace } \tilde{S},$$

то связность $\tilde{\nabla}$ называется *полусимметрической*.

2.2. Диффеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M$ называется *автоморфизмом структуры Римана–Картана (многообразия Римана–Картана)*, если он оставляет инвариантным g и $\tilde{\nabla}$. Так как $\tilde{\nabla} = \nabla + \tilde{T}$ и из инвариантности g следует инвариантность ∇ [7; гл. V, § 53], то связность $\tilde{\nabla}$ инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантен тензор деформации $\tilde{T}$. Ясно, что инвариантность $\tilde{T}$ эквивалентна инвариантности ковариантного тензора деформации T . Таким образом, множество всех автоморфизмов структуры Римана–Картана либо совпадает с группой Ли изометрий (движений)

риманова многообразия (M, g) , либо является ее замкнутой подгруппой Ли, оставляющей инвариантным тензорное поле T , и, следовательно, имеет размерность $r \leq n(n+1)/2$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Размерность группы Ли автоморфизмов n -мерного многообразия Римана–Картана меньше $n(n+1)/2$ при $n \neq 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{G}$ – r -мерная группа Ли автоморфизмов n -мерного многообразия Римана–Картана M . Стационарная подгруппа точки $x_0 \in M$ индуцирует группу изотропий $\mathbb{G}_0$ в касательном пространстве $\mathbb{E} = T_{x_0}M$, которая является подгруппой ортогональной группы $O(n)$ евклидова векторного пространства $\mathbb{E}$. Значение тензорного поля деформации T в точке x_0 является ненулевым тензором из $\mathbb{E}^* \otimes (\mathbb{E}^* \wedge \mathbb{E}^*)$. Рассмотрим тензор T как трilinearное отображение $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть ξ – элемент алгебры Ли $so(n)$ группы Ли $SO(n)$ собственных ортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}$, а $\varphi_t = \exp t\xi$ – однопараметрическая подгруппа, порожденная ξ . Тогда ξ принадлежит алгебре Ли $\mathfrak{g}_0$ группы Ли $\mathbb{G}_0$, если и только если φ_t оставляет инвариантным тензор T , т.е.

$$T(\varphi_t u, \varphi_t v, \varphi_t w) = T(u, v, w), \quad u, v, w \in \mathbb{E}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Дифференцируя это равенство по t при $t = 0$, получаем, что $\xi \in \mathfrak{g}_0$ тогда и только тогда, когда

$$T(\xi u, v, w) + T(u, \xi v, w) + T(u, v, \xi w) = 0. \quad (1)$$

Пусть $(e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный базис в $\mathbb{E}$ и T_{ijk} и ξ_j^i – компоненты T и ξ в этом базисе. В координатах уравнение (1) примет вид

$$T_{pj k} \xi_i^p + T_{ip k} \xi_j^p + T_{ij p} \xi_k^p = 0, \quad (2)$$

или

$$(T_{pjk} \delta_{is} + T_{ipk} \delta_{js} + T_{ijp} \delta_{ks}) \xi^{ps} = 0, \quad (3)$$

где $\xi^{ps} = \xi_q^p \delta^{qs}$, δ_{ij} , δ^{ij} – ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора δ евклидова пространства $\mathbb{E}$. Так как ξ – элемент алгебры Ли $so(n)$, то матрица (ξ^{ps}) является кососимметрической: $\xi^{sp} = -\xi^{ps}$ и уравнения (3) запишутся следующим образом:

$$(T_{pjk} \delta_{is} + T_{ipk} \delta_{js} + T_{ijp} \delta_{ks} - T_{sjk} \delta_{ip} - T_{isk} \delta_{jp} - T_{ijs} \delta_{kp}) \xi^{ps} = 0, \quad p < s. \quad (4)$$

Пусть теперь многообразие Римана–Картана M допускает группу автоморфизмов $\mathbb{G}$ максимальной размерности $n(n+1)/2$. Тогда группа изотропий $\mathbb{G}_0$ совпадает с ортогональной группой, а уравнения (4) выполняются тождественно, т.е.

$$T_{pjk} \delta_{is} + T_{ipk} \delta_{js} + T_{ijp} \delta_{ks} - T_{sjk} \delta_{ip} - T_{isk} \delta_{jp} - T_{ijs} \delta_{kp} = 0. \quad (5)$$

Поднимая индексы p и s , равенства (5) запишем в виде

$$\delta_i^s T^p_{jk} + \delta_j^s T^p_{ik} + \delta_k^s T^p_{ij} - \delta_i^p T^s_{jk} - \delta_j^p T^s_{ik} - \delta_k^p T^s_{ij} = 0. \quad (6)$$

Свернув в (6) индексы s и i , учитывая косую симметрию тензора T по последним двум индексам, получим

$$(n-1)T^p_{jk} - T^p_{jk} + T^p_{kj} + \delta_j^p T^s_{sk} - \delta_k^p T^s_{sj} = 0. \quad (7)$$

Опустив в (7) верхний индекс p на соответствующее место и заменив его на i , будем иметь

$$(n-1)T_{ijk} - T_{jki} + T_{kji} + \delta_{ji}T_{sk}^s - \delta_{ki}T_{sj}^s = 0. \quad (8)$$

Циклируя в (8) индексы i, j, k , выпишем еще два равенства

$$(n-1)T_{jki} - T_{kij} + T_{ikj} + \delta_{kj}T_{si}^s - \delta_{ij}T_{sk}^s = 0, \quad (9)$$

$$(n-1)T_{kij} - T_{ij k} + T_{jik} + \delta_{ik}T_{sj}^s - \delta_{jk}T_{si}^s = 0. \quad (10)$$

Складывая (8), (9) и (10) и учитывая косую симметрию тензора T , получим

$$(n-3)(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}) = 0, \quad (11)$$

откуда при $n \neq 3$ будем иметь

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0. \quad (12)$$

С учетом (12) равенства (8) примут вид

$$nT_{ijk} + \delta_{ji}T_{sk}^s - \delta_{ki}T_{sj}^s = 0. \quad (13)$$

Умножив (13) на δ^{kl} , получим

$$nT_{ij}^l + \delta_{ji}\delta^{kl}T_{sk}^s - \delta_i^l T_{sj}^s = 0. \quad (14)$$

В (14) свернем индексы l и i . В результате будем иметь

$$nT_{sj}^s + T_{sj}^s - nT_s^s j = 0, \quad (15)$$

откуда $T_{sj}^s = 0$, а из (13) следует, что и $T_{ijk} = 0$. Теорема доказана.

2.3. Естественно возникает необходимость оценки максимальной размерности группы Ли автоморфизмов n -мерного многообразия Римана–Картана. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Максимальная размерность группы Ли автоморфизмов n -мерного $n > 4$ многообразия Римана–Картана равна $n(n-1)/2 + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известна теорема Ванга (Wang Н.С.) [8] о группе движений финслерова пространства: если финслерово пространство F^n , $n \neq 4$, допускает группу движений размерности $r > n(n-1)/2 + 1$, то оно является римановым пространством постоянной кривизны и $r = n(n+1)/2$. Доказательство этой теоремы основано на результате Монгомери и Самельсона [9] о том, что ортогональная группа $O(n)$, $n \neq 4$, не содержит отличных от $SO(n)$ собственных замкнутых подгрупп размерности $r' > (n-1)(n-2)/2$. А поскольку группа изотропий произвольной точки $x \in M$ состоит из ортогональных преобразований и группа изометрий риманова пространства размерности $r \geq n(n-1)/2 + 1$ необходимо транзитивна, то не существует замкнутых подгрупп групп изометрий размерности [10; гл. II, § 2]

$$r = r' + n, \quad \text{где} \quad \frac{n(n-1)}{2} + 1 < r < \frac{n(n+1)}{2}.$$

Так как группа автоморфизмов многообразия Римана–Картана является замкнутой подгруппой группы изометрий и согласно теореме 1 $r < n(n+1)/2$, $n \neq 3$, то размерность группы автоморфизмов n -мерного $n \neq 3$ многообразия Римана–Картана не превосходит $n(n-1)/2 + 1$.

Для доказательства точности указанной границы можно привести пример многообразия Римана–Картана с группой автоморфизмов размерности $n(n-1)/2 + 1$. Рассмотрим гиперболическое пространство H^n постоянной отрицательной кривизны -1 . Группа изометрий этого пространства содержит замкнутую подгруппу размерности $n(n-1)/2 + 1$, состоящую из преобразований, оставляющих инвариантным единичное векторное поле. В некоторой окрестности каждой точки можно выбрать такую систему координат, что метрический тензор и базисные операторы этой подгруппы имеют вид

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + e^{-2x^1} (dx^2 \otimes dx^2 + \dots + dx^n \otimes dx^n), \quad (16)$$

$$\partial_1 + x^\alpha \partial_\alpha, \partial_\alpha, -x^\beta \partial_\alpha + x^\alpha \partial_\beta, \quad \alpha, \beta = 2, \dots, n, \quad \alpha < \beta. \quad (17)$$

Интегрируя уравнения инвариантности тензора деформации, находим

$$T = ae^{-2x^1} \sum_{\alpha=2}^n dx^\alpha \otimes dx^\alpha \wedge dx^1, \quad a = \text{const.} \quad (18)$$

Нетрудно убедиться, что связность $\tilde{\nabla}$, определяемая тензором деформации (18), является полусимметрической. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Кроме приведенного примера имеются и другие многообразия Римана–Картана с группой автоморфизмов максимальной размерности.

3. Автоморфизмы многообразия Римана–Картана с полусимметрической связностью

Среди всех связностей с кручением наиболее известной является полусимметрическая связность. В этом случае теорема 2 верна для любого $n \geq 2$. А именно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. *Максимальная размерность группы Ли автоморфизмов n -мерного $n \geq 2$ многообразия Римана–Картана с полусимметрической связностью равна $n(n-1)/2 + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связность $\tilde{\nabla}$ является полусимметрической, если ее тензор кручения $S_{ij}{}^k$ имеет вид [11; гл. IV, § 40]

$$S_{ij}{}^k = \frac{1}{n-1} (\delta_i^k \eta_j - \delta_j^k \eta_i), \quad (19)$$

где δ_i^k – символ Кронекера (единичная матрица), а $\eta_j = S_{pj}{}^p$. Группа изотропий $\mathbb{G}_0$ точки $x_0 \in M$ оставляет инвариантным тензор $\tilde{S}$ – значение тензорного поля $\tilde{S}$ в точке x_0 . Рассмотрим $\tilde{S}$ как кососимметрическое отображение $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ ($\mathbb{E} = T_{x_0} M$ – евклидово векторное пространство). Пусть ξ – элемент алгебры Ли группы Ли собственных ортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}$, а $\varphi_t = \exp t\xi$ – однопараметрическая подгруппа преобразований, порожденная ξ . Тогда ξ принадлежит алгебре Ли g_0 группы Ли G_0 , если и только если

$$\tilde{S}(\varphi_t u, \varphi_t v) = \varphi_t \tilde{S}(u, v). \quad (20)$$

Дифференцируя (20) по t при $t = 0$, получаем

$$\tilde{S}(\xi u, v) + \tilde{S}(u, \xi v) = \xi \tilde{S}(u, v), \quad (21)$$

или в координатах

$$S_{pj}{}^k \xi_i^p + S_{ip}{}^k \xi_j^p - S_{ij}{}^s \xi_s^k = 0. \quad (22)$$

Так как $S_{ijk} = S_{ij}{}^p \delta_{kp}$, $\xi^{ij} = \xi_p^i \delta^{pj}$, то (22) можно переписать так:

$$(S_{pj}{}^k \delta_{is} + S_{ip}{}^k \delta_{js} - S_{ij}{}^s \delta_{kp}) \xi^{ps} = 0. \quad (23)$$

Так как связность полусимметрическая, то из (19) следует, что

$$S_{ijk} = \frac{1}{n-1} (\delta_{ik} \eta_j - \delta_{jk} \eta_i). \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23), получим

$$(\delta_{pk} \eta_j \delta_{is} - \delta_{jk} \eta_p \delta_{is} + \delta_{ik} \eta_p \delta_{js} - \delta_{pk} \eta_i \delta_{js} - \delta_{is} \eta_j \delta_{kp} + \delta_{js} \eta_i \delta_{kp}) \xi^{ps} = 0,$$

или

$$(\delta_{ik} \delta_{js} \eta_p - \delta_{jk} \delta_{is} \eta_p) \xi^{ps} = 0. \quad (25)$$

Так как $\xi^{sp} = -\xi^{ps}$, то уравнения (25) можно переписать так:

$$(\delta_{ik} \delta_{js} \eta_p - \delta_{jk} \delta_{is} \eta_p - \delta_{ik} \delta_{jp} \eta_s + \delta_{jk} \delta_{ip} \eta_s) \xi^{ps} = 0, \quad p < s. \quad (26)$$

Таким образом мы имеем систему линейных уравнений (26) относительно $(n^2 - n)/2$ неизвестных ξ^{ps} . Докажем, что эта система содержит как минимум $n - 1$ линейно независимых уравнений. Это будет означать, что размерность группы изотропий не может быть больше $(n^2 - n)/2 - (n - 1)$ и, следовательно, размерность группы автоморфизмов не больше

$$\frac{(n^2 - n)}{2} - (n - 1) + n = \frac{n(n - 1)}{2} + 1.$$

Так как дифференциальная 1-форма $\eta = \eta_j dx^j$, определяющая тензор кручения полусимметрической связности, ненулевая, то, перенумеровав при необходимости векторы ортонормированного базиса пространства $\mathbb{E}$, мы можем считать, что в точке x_0 $\eta_1 \neq 0$. В системе (26) рассмотрим $n - 1$ уравнений, положив $j = k = 1$ и меняя i от 2 до n . Эта подсистема имеет следующий вид:

$$(\delta_{i1} \delta_{1s} \eta_1 - \delta_{11} \delta_{is} \eta_1 - \delta_{i1} \delta_{11} \eta_s + \delta_{11} \delta_{i1} \eta_s) \xi^{1s} + \dots = 0,$$

или

$$-\delta_{is} \eta_1 \xi^{1s} + \dots = 0,$$

откуда следует, что ранг этой подсистемы равен $n - 1$, так как матрица $A_{is} = -\delta_{is} \eta_1$, $i, s = 2, \dots, n$, очевидно, является невырожденной. Многообразием Римана–Картана с группой автоморфизмов размерности $n(n - 1)/2 + 1$ и полусимметрической связностью может служить пример, приведенный в конце доказательства теоремы 2.

4. Трехмерные многообразия Римана–Картана с группами автоморфизмов максимальной размерности

4.1. Рассмотрим случай $n = 3$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что равенства (5) выполняются тогда и только тогда, когда тензор T_{ijk} кососимметричен по всем индексам, т.е. когда связность $\tilde{\nabla}$ является кососимметрической. Римановы пространства (M, g) , допускающие группу движений максимальной размерности, являются пространствами постоянной секционной кривизны. В некоторой окрестности каждой точки существует система координат, в которой [12; гл. II, § 27]

$$ds^2 = \frac{dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}}{[1 + (k/4)(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2})]^2}, \quad (27)$$

где k – кривизна пространства. Интегрируя уравнения движений

$$\xi^p \partial_p g_{ij} + \partial_i \xi^p g_{pj} + \partial_j \xi^p g_{ip} = 0 \quad (28)$$

для метрики (27), находим базисные операторы группы

$$\begin{aligned} X_1 &= \left[1 - \frac{k}{4}(-x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}) \right] \partial_1 + \frac{k}{2} x^1 x^2 \partial_2 + \frac{k}{2} x^1 x^3 \partial_3, \\ X_2 &= \frac{k}{2} x^2 x^1 \partial_1 + \left[1 - \frac{k}{4}(x^{1^2} - x^{2^2} + x^{3^2}) \right] \partial_2 + \frac{k}{2} x^2 x^3 \partial_3, \\ X_3 &= \frac{k}{2} x^3 x^1 \partial_1 + \frac{k}{2} x^3 x^2 \partial_2 + \left[1 - \frac{k}{4}(x^{1^2} + x^{2^2} - x^{3^2}) \right] \partial_3, \\ X_{12} &= -x^2 \partial_1 + x^1 \partial_2, \quad X_{13} = -x^3 \partial_1 + x^1 \partial_3, \quad X_{23} = -x^3 \partial_2 + x^2 \partial_3. \end{aligned} \quad (29)$$

Интегрируя уравнения инвариантности тензора деформации

$$\xi^p \partial_p T_{ijk} + \partial_i \xi^p T_{pj k} + \partial_j \xi^p T_{ip k} + \partial_k \xi^p T_{ij p} = 0, \quad (30)$$

для группы $\mathbb{G}^6$ с операторами (29) находим общее решение

$$T = \frac{c_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k}{[1 + (k/4)(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2})]^3}, \quad (31)$$

где c_{ijk} – постоянные, из которых в силу косой симметрии существенной является лишь одна. Таким образом, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4. *Максимальная размерность группы Ли автоморфизмов трехмерного многообразия Римана–Картана равна 6. В локальных координатах метрика, операторы группы и тензор деформации имеют соответственно вид (27), (29), (31).*

4.2. Пусть теперь M^3 – трехмерное многообразие Римана–Картана с кососимметрической связностью $\tilde{\nabla}$, т.е. тензор деформации T_{ijk} кососимметричен по всем индексам и, следовательно, $T_{ijk} = S_{ijk}/2$. Обозначим через

$$\Omega = \frac{1}{2} S_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

фундаментальную форму кручения, а $\Omega_0 = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ – форму объема. Пусть D – ограниченная область в M . Тогда определены интегралы [13; гл. III, § 3] $v = \int_D \Omega$, $v_0 = \int_D \Omega_0$. *Объемным кручением* назовем отношение $v/v_0 = v_k$, а скалярным кручением – отношение плотностей [14]

$$\frac{1}{2} \frac{S_{123}}{\sqrt{\det g}} = s_k.$$

Объемное кручение является функционалом, заданным на множестве всех областей интегрирования, а скалярное кручение есть функция точки. Связь введенных таким образом инвариантов устанавливает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Если область интегрирования D стягивать в точку $x_0 \in D$, то в пределе объемное кручение совпадает со скалярным кручением в точке x_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по теореме о среднем имеем

$$v = \int_D \frac{1}{2} \frac{S_{123}}{\sqrt{\det g}} \cdot \sqrt{\det g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \int_D s_k(x) \cdot \Omega_0 = s_k(x^*) v_0,$$

где x^* – некоторая точка области D . Поэтому $v_k = v/v_0 = s_k(x^*)$ и

$$\lim_{D \rightarrow x_0} v_k = \lim_{x^* \rightarrow x_0} s_k(x^*) = s_k(x_0),$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы 5 следует, что если пространство Римана–Картана M^3 имеет постоянное объемное кручение, то является постоянным и скалярное кручение; и наоборот, причем $v_k = s_k = s = \text{const}$. В этом случае постоянную s естественно назвать *кручением пространства*, а M^3 – *пространством постоянного кручения*.

Если (M^3, g) – пространство постоянной секционной кривизны, то для метрики (27)

$$\sqrt{\det g} = \left[1 + \frac{k}{4}(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}) \right]^{-3}, \quad S_{123} = 2c_{123} \left[1 + \frac{k}{4}(x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}) \right]^{-3}.$$

Поэтому

$$v^k = \frac{v}{v_0} = \frac{1}{2} \frac{S_{123}}{\sqrt{\det g}} = s_k = c_{123} \equiv s = \text{const}.$$

Таким образом, пространство Римана–Картана (M^3, g, T) с метрикой (27) и тензором деформации (31) имеет постоянную кривизну Римана k и постоянное кручение Картана s , т.е. является пространством постоянной кривизны и постоянного кручения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для многообразий Римана–Картана M^n , $n > 3$, с кососимметрической связностью можно ввести понятие кручения в данной точке в данном трехмерном направлении (секционное кручение – аналог секционной кривизны в римановой геометрии). Пусть $p \in M$ и $X_1, X_2, X_3 \in T_p M$ – базис трехмерного подпространства

$W \subset T_p M$. Тогда кручение $S_p(W)$ в данной точке p в данном трехмерном направлении W определяется формулой

$$S_p(W) = \frac{T(X_1, X_2, X_3) \otimes T(X_1, X_2, X_3)}{\det \|g(X_\alpha, X_\beta)\|}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Данное определение корректно, поскольку при замене базиса в W по формуле $X_\alpha = C_\alpha^\beta Y_\beta$ числитель и знаменатель умножаются на $(\det \|C_\alpha^\beta\|)^2$.

4.3. В качестве геометрической иллюстрации наличия кручения пространства рассмотрим простейший пример. Пусть $M^3 = \mathbb{E}^3 = \mathbb{R}^3$ – евклидово пространство ($k = 0$). Тогда

$$\tilde{\Gamma}_{12}^3 = \tilde{\Gamma}_{23}^1 = \tilde{\Gamma}_{31}^2 = -\tilde{\Gamma}_{21}^3 = -\tilde{\Gamma}_{32}^1 = -\tilde{\Gamma}_{13}^2 = s,$$

остальные – нули. Уравнения параллельного переноса

$$\frac{dv^k}{dt} + \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} v^j = 0$$

вектора $v^k = v^k(t)$ вдоль кривой $x^k = x^k(t)$ примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dv^1}{dt} + s \left(\frac{dx^2}{dt} v^3 - \frac{dx^3}{dt} v^2 \right) &= 0, \\ \frac{dv^2}{dt} + s \left(\frac{dx^3}{dt} v^1 - \frac{dx^1}{dt} v^3 \right) &= 0, \\ \frac{dv^3}{dt} + s \left(\frac{dx^1}{dt} v^2 - \frac{dx^2}{dt} v^1 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Исследуем подробно параллельное перенесение, например, вектора $v(1, 0, 0)$ вдоль кривой $x^1 = 0$, $x^2 = 0$, $x^3 = t$, т.е. вдоль оси x^3 . Уравнения (31) в этом случае выглядят так:

$$\frac{dv^1}{dt} - sv^2 = 0, \quad \frac{dv^2}{dt} + sv^1 = 0, \quad \frac{dv^3}{dt} = 0.$$

Интегрируя данную систему, находим ее общее решение:

$$\begin{aligned} v^1 &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cos(st - \varphi_0), \\ v^2 &= -\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sin(st - \varphi_0), \\ v^3 &= c_3, \end{aligned}$$

где $\varphi_0 = \arctg(c_2/c_1)$.

Из начальных условий следует, что $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Поэтому конец вектора v описывает винтовую линию

$$\vec{r} = \vec{r}'\{\cos(st), \sin(st), t\},$$

лежащую на прямом геликоиде, который заматается осью x^1 при параллельном переносе ее вдоль оси x^3 . В этом случае кручение s определяет угловую скорость вращения вектора v при параллельном переносе его вдоль прямой.

4.4. Вычислим тензор кривизны

$$\tilde{R}_{ijk}{}^l = \partial_i \tilde{\Gamma}_{jk}^l - \partial_j \tilde{\Gamma}_{ik}^l + \tilde{\Gamma}_{ip}^l \tilde{\Gamma}_{jk}^p - \tilde{\Gamma}_{jp}^l \tilde{\Gamma}_{ik}^p \quad (32)$$

пространства Римана–Картана M^3 с метрикой (27) и тензором деформации (31). Подставляя $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + S_{ij}^k/2$ в (32), получим

$$\tilde{R}_{ijk}{}^l = R_{ijk}{}^l + \frac{1}{2} \left[\nabla_i S_{jk}^l - \nabla_j S_{ik}^l + \frac{1}{2} (S_{ip}^l S_{jk}^p - S_{jp}^l S_{ik}^p) \right], \quad (33)$$

где $R_{ijk}{}^l$ – тензор кривизны риманова пространства (M^3, g) .

Имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Тензор кручения пространства Римана–Картана M^3 , ковариантно постоянен как в связности ∇ , так и в связности $\tilde{\nabla}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что

$$\nabla_i S_{jkl} = \partial_i S_{jkl} - S_{pkl} \Gamma_{ij}^p - S_{jpl} \Gamma_{ik}^p - S_{jkp} \Gamma_{il}^p = 0. \quad (34)$$

Для метрики (27)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{k}{2} \left(1 + \frac{k}{4} z \right)^{-1} (x^k \delta_{ij} - x_i \delta_j^k - x_j \delta_i^k), \quad (35)$$

где $z = x^{12} + x^{22} + x^{32}$, $x_i = x^p \delta_{ip}$, а согласно (31)

$$S_{ijk} = 2 \left(1 + \frac{k}{4} z \right)^{-3} c_{ijk}. \quad (36)$$

Подставляя (35) и (36) в (34), находим

$$\nabla_i S_{jkl} = -k \left(1 + \frac{k}{4} z \right)^{-4} [x^p (\delta_{ij} c_{pkl} + \delta_{ik} c_{jpl} + \delta_{il} c_{jkp}) - (x_j c_{ikl} + x_k c_{jil} + x_l c_{jki})]. \quad (37)$$

Так как размерность пространства $n = 3$ и тензор S_{jkl} кососимметричен по всем индексам, то достаточно убедиться, что $\nabla_i S_{123} = 0$, а это немедленно следует из (37).

Ковариантная производная от S_{jkl} в связности $\tilde{\nabla}$ имеет вид

$$\tilde{\nabla}_i S_{jkl} = \nabla_i S_{jkl} - \frac{1}{2} (S_{pkl} S_{ij}^p + S_{jpl} S_{ik}^p + S_{jkp} S_{il}^p), \quad (38)$$

откуда, как и в предыдущем случае, $\tilde{\nabla}_i S_{jkl} = 0$. Так как $\nabla_i g_{jk} = 0$ и $\tilde{\nabla}_i g_{jk} = 0$, то и $\nabla_i S_{jk}{}^l = 0$, $\tilde{\nabla}_i S_{jk}{}^l = 0$, а поскольку $T_{jkl} = S_{jkl}/2$, то и

$$\nabla_i T_{jkl} = 0, \quad \tilde{\nabla}_i T_{jkl} = 0, \quad \nabla_i T_{jk}{}^l = 0, \quad \tilde{\nabla}_i T_{jk}{}^l = 0.$$

Учитывая доказанную лемму 1 и подставляя

$$S_{ij}{}^k = 2 \left(1 + \frac{k}{4} z \right)^{-1} c_{ij}{}^k, \quad c_{ij}{}^k = c_{ijp} \delta^{kp}, \quad (39)$$

в (33), получим

$$\tilde{R}_{ijk}{}^l = R_{ijk}{}^l + \left(1 + \frac{k}{4}z\right)^{-2} (c_{ip}{}^l c_{jk}{}^p - c_{jp}{}^l c_{ik}{}^p), \quad (40)$$

$$\tilde{R}_{ijkl} = R_{ijkl} + \left(1 + \frac{k}{4}z\right)^{-4} (c_{ip}{}^l c_{jk}{}^p - c_{jp}{}^l c_{ik}{}^p). \quad (41)$$

ЛЕММА 2. Тензоры кривизны $\tilde{R}_{ijkl}$ и $\tilde{R}_{ijk}{}^l$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 1) \quad \tilde{R}_{jikl} &= -\tilde{R}_{ijkl}, & 2) \quad \tilde{R}_{ijlk} &= -\tilde{R}_{ijkl}, & 3) \quad \tilde{R}_{klij} &= \tilde{R}_{ijkl}, \\ 4) \quad \tilde{R}_{ijk}{}^l + \tilde{R}_{jki}{}^l + \tilde{R}_{kij}{}^l &= 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойствами 1)–4), как хорошо известно, обладают римановы тензоры кривизны, поэтому достаточно доказать, что этими свойствами обладают выражения, стоящие в (40) и (41) в круглых скобках. Свойство 1) очевидно. Свойство 2) имеет место, так как

$$c_{ipk}c_{jl}{}^p - c_{jpk}c_{il}{}^p = -c_{ik}{}^p c_{jlp} + c_{jk}{}^p c_{ilp} = -c_{ip}{}^l c_{jk}{}^p + c_{jp}{}^l c_{ik}{}^p.$$

Свойство 3) доказывает следующая цепочка равенств:

$$c_{kpi}c_{lj}{}^p - c_{lpj}c_{ki}{}^p = c_{kj}{}^p c_{lpi} - c_{jpl}c_{ik}{}^p = c_{ip}{}^l c_{jk}{}^p - c_{jp}{}^l c_{ik}{}^p.$$

Свойство 4) равносильно тождеству Якоби

$$c_{ip}{}^l c_{jk}{}^p + c_{jp}{}^l c_{ki}{}^p + c_{kp}{}^l c_{ij}{}^p = 0$$

алгебры Ли векторного произведения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Свойства 1) и 2) тензора кривизны $\tilde{R}_{ijkl}$ имеют место в любом многообразии Римана–Картана M^4 [6; гл. VII, § 1]. Свойства 3) и 4) являются характерными свойствами рассматриваемого пространства M^3 .

4.5. Свойства 1)–4) тензора кривизны пространства Римана–Картана M^3 позволяют ввести секционную кривизну, аналогично тому, как это делается в римановых пространствах. Два неколлинеарных вектора $u, v \in T_x M$ определяют в $T_x M$ двумерное векторное подпространство σ – “двумерное направление”. Каждому двумерному направлению σ в точке $x \in M$ поставим в соответствие число

$$\tilde{k}_\sigma(x) = \frac{\tilde{R}_{ijkl}u^i v^j v^k u^l}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})u^i v^j u^k v^l} \quad (42)$$

– секционную кривизну пространства Римана–Картана в точке x в двумерном направлении σ . Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6. Секционная кривизна пространства Римана–Картана M^3 , является постоянной и определяется формулой $k = k - s^2$, где k – кривизна риманова пространства (M^3, g) , а s – кручение пространства Римана–Картана (M^3, g, T) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в (42) выражение для $\tilde{R}_{ijkl}$ (41) и g_{ij} и учитывая, что кривизна риманова пространства (M^3, g) постоянна и равна k , а также, что c_{ijk} , как и c_{ij}^k , кососимметричны по всем индексам и, следовательно, $c_{jk}^p v^j v^k = 0$, получаем, что

$$\tilde{k} = k - \frac{(c_{j1l}c_{ik}^1 + c_{j2l}c_{ik}^2 + c_{j3l}c_{ik}^3)u^i v^j v^k u^l}{(u^{1^2} + u^{2^2} + u^{3^2})(v^{1^2} + v^{2^2} + v^{3^2}) - (u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3)^2}.$$

Вынося в числителе $s^2 = c_{123} \cdot c_{12}^3$ и сокращая дробь, получаем искомую формулу

$$\tilde{k} = k - s^2. \quad (43)$$

Таким образом кривизна пространства Римана–Картана $(M^3, g, \tilde{\nabla})$ определяется двумя константами – кривизной метрики g и кручением связности $\tilde{\nabla}$. Непосредственным подсчетом можно убедиться, что тензор кривизны пространства Римана–Картана M^3 является ковариантно постоянным как в связности ∇ , так и в связности $\tilde{\nabla}$, т.е. $\nabla_m \tilde{R}_{ijk}^l = 0$ и $\tilde{\nabla}_m \tilde{R}_{ijk}^l = 0$, а также $\tilde{\nabla}_m R_{ijk}^l = 0$.

4.6. Для тензора Риччи $\tilde{R}_{jk} = \tilde{R}_{sjk}^s$ и скалярной кривизны $\tilde{R} = g^{jk} \tilde{R}_{jk}$ находим

$$\tilde{R}_{jk} = R_{jk} + \left(1 + \frac{k}{4} z\right)^{-2} c_{jp}^s c_{ks}^p, \quad (44)$$

$$\tilde{R} = R + \delta^{jk} c_{jp}^s c_{ks}^p, \quad (45)$$

где R_{jk} и R – тензор Риччи и скалярная кривизна риманова пространства (M^3, g) соответственно. Из (44) следует, что тензор Риччи пространства Римана–Картана M^3 является симметрическим. Так как (M^3, g) является римановым пространством постоянной кривизны k , то

$$R_{ijk}^l = k \left(1 + \frac{k}{4} z\right)^{-2} (\delta_i^l \delta_{jk} - \delta_j^l \delta_{ik}), \quad R_{jk} = 2k \left(1 + \frac{k}{4} z\right)^{-2} \delta_{jk}, \quad R = 6k.$$

Кроме того, $\delta^{jk} c_{jp}^s c_{ks}^p = -6s^2$. Поэтому

$$\tilde{R}_{jk} = \left(1 + \frac{k}{4} z\right)^{-2} (2k \delta_{jk} + c_{jp}^s c_{ks}^p), \quad \tilde{R} = 6(k - s^2). \quad (46)$$

Из второго равенства (46) следует, что $\tilde{R} \leq R$ и $\tilde{R} = R$ тогда и только тогда, когда $s = 0$ и, следовательно, $\tilde{\nabla} = \nabla$, что подтверждает результаты, полученные в [15]. Далее, нетрудно убедиться, что

$$c_{jp}^s c_{ks}^p v^j v^k = -2s^2(v^{1^2} + v^{2^2} + v^{3^2})$$

и, следовательно, квадратичная форма Риччи $\tilde{\varphi} = \tilde{R}_{jk} v^j v^k$ имеет вид

$$\tilde{\varphi} = 2(k - s^2) \left(1 + \frac{k}{4} z\right)^{-2} (v^{1^2} + v^{2^2} + v^{3^2}). \quad (47)$$

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 7. Квадратичная форма $\tilde{\varphi}$ пространства Римана–Картана M^3 является положительно (отрицательно) определенной тогда и только тогда, когда $k > s^2$ ($k < s^2$), и равна нулю, когда $k = s^2$, где k – кривизна риманова пространства (M^3, g) , а s – кручение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. А. Гордеева, В. И. Паньженский, С. Е. Степанов, “Многообразие Римана–Картана”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **123**, ВИНТИ, М., 2009, 110–141.
- [2] И. Е. Тамм, “О кривом импульсном пространстве”, *Собрание научных трудов*, Т. 2, Наука, М., 1975, 218–225.
- [3] И. Е. Тамм, В. Г. Вологодский, “Об использовании кривого импульсного пространства при построении нелокальной евклидовой теории поля”, *Собрание научных трудов*, Т. 2, Наука, М., 1975, 226–253.
- [4] И. П. Егоров, *Движения в пространствах аффинной связности*, Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1965.
- [5] В. И. Паньженский, “Автоморфизмы пространственно-временного многообразия Римана–Картана”, *Труды международного геометрического центра*, **5:2** (2012), 27–34.
- [6] К. Яно, С. Бохнер, *Кривизна и числа Бетти*, ИЛ, М., 1957.
- [7] Л. П. Эйзенхарт, *Непрерывные группы преобразований*, ИЛ, М., 1947.
- [8] H.-C. Wang, “Finsler spaces with completely integrable equations of Killing”, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 5–9.
- [9] D. Montgomery, H. Samelson, “Transformation groups of spheres”, *Ann. of Math. (2)*, **43** (1943), 454–470.
- [10] Ш. Кобаяси, *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1986.
- [11] А. П. Норден, *Пространства аффинной связности*, Наука, М., 1976.
- [12] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, ИЛ, М., 1948.
- [13] С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Мир, М., 1970.
- [14] В. И. Паньженский, “Максимально подвижные римановы пространства с кручением”, *Матем. заметки*, **85:5** (2009), 754–757.
- [15] С. Е. Степанов, И. А. Гордеева, “Псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля на многообразии Римана–Картана”, *Матем. заметки*, **87:2** (2010), 267–279.

В. И. Паньженский

Пензенский государственный университет

E-mail: kaf-geom@yandex.ru

Поступило

23.10.2012

Исправленный вариант

10.03.2015