Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Осипов, Некоторые свойства резольвентного множества разностного оператора второго порядка с матричными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2000, том 68, выпуск 6, 950–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1021>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:06:27

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕЗОЛЬВЕНТНОГО МНОЖЕСТВА РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. С. Осипов

В последнее время получен ряд результатов о структуре резольвентного множества несимметрического разностного оператора второго порядка. При этом основную роль в исследовании его спектральных свойств играют многочлены, ортогональные по обобщенной спектральной функции оператора, и сходимость аппроксимаций Эрмита–Паде его функции Вейля [1], [2]. В настоящей заметке некоторые данные результаты обобщаются на случай операторов с матричными коэффициентами. При этом используется методика работ, посвященных интегрированию нелинейных динамических систем с операторными коэффициентами методом обратной спектральной задачи [3], [4].

Рассмотрим бесконечную матрицу $A = (A_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & O & O & \dots \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & O & \dots \\ O & A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-01079, и программы поддержки ведущих научных школ, грант № 00-15-96100.

где $A_{i,j}$ – матрица порядка p , элементы которой – комплексные числа; O – нулевая матрица порядка p . Будем говорить, что матрица A принадлежит классу $\mathcal{B}$, если выполнены условия:

$$\sup_{i,j \geq 0} \|A_{i,j}\| \leq C < \infty, \quad A_{i+1,i}, A_{i,i+1} \text{ обратимы.}$$

Тогда A порождает ограниченный оператор в пространстве ℓ_p^2 последовательностей $u = (u_0, u_1, \dots)$, где вектор-столбец $u_j \in \mathbb{C}^p$ со скалярным произведением $(u, v) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j^* u_j$. Сохраним за оператором то же обозначение A . Обозначим через $R_\lambda(A)$ резольвенту оператора A , через $\Omega(A)$ – его резольвентное множество. Резольвента $R_\lambda(A)$ может быть представлена в виде бесконечной матрицы с матричными элементами порядка p : $R_\lambda(A) = (R_{\lambda;jk})_{j,k=0}^{\infty}$. Матрица-функция

$$\mathcal{M}(\lambda, A) = R_{\lambda;00}$$

называется *функцией Вейля* оператора A [5]. В окрестности бесконечности (при $|\lambda| > \|A\|$) справедливо равенство

$$\mathcal{M}(\lambda, A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{\lambda^{k+1}},$$

где $S_k = (A^k)_{00}$. Последовательность $S(\mathcal{M}, A) = (S_k)_{k=0}^{\infty}$ назовем *моментной последовательностью* оператора A . Отметим, что оператор A однозначно восстанавливается по $S(\mathcal{M}, A)$ для $A \in \mathcal{B}$ в следующих ситуациях [3]–[5]:

- 1) $A_{i,i-1} = E, i \geq 1, E$ – единичная матрица;
- 2) $A_{i,i+1} = E, i \geq 0$;
- 3) $A_{i,i} = A_{i,i}^*, A_{i+1,i} = A_{i,i+1} > 0$ (* означает эрмитово сопряжение).

В общем случае одной и той же моментной последовательности соответствует целый набор операторов с, вообще говоря, различными спектральными свойствами. Ниже будет установлена максимальность резольвентного множества в некотором классе для операторов, порожденных бесконечными J -матрицами [6].

Сопоставим матрице A конечно-разностные уравнения относительно матриц Y_i, Y_i^+ порядка p :

$$A_{i,i-1}Y_{i-1} + A_{i,i}Y_i + A_{i,i+1}Y_{i+1} = \lambda Y_i, \quad i \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

$$Y_{i-1}^+ A_{i-1,i} + Y_i^+ A_{i,i} + Y_{i+1}^+ A_{i+1,i} = \lambda Y_i^+, \quad i \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Обозначим через $P_i = P_i(\lambda), Q_i = Q_i(\lambda), P_i^+ = P_i^+(\lambda), Q_i^+ = Q_i^+(\lambda)$ решения (1) и (2) соответственно, удовлетворяющие начальным условиям:

$$P_{-1}(\lambda) = P_{-1}^+(\lambda) = Q_0(\lambda) = Q_0^+(\lambda) = E,$$

$$P_0(\lambda) = P_0^+(\lambda) = Q_{-1}(\lambda) = Q_{-1}^+(\lambda) = O.$$

Данные решения представляют собой матричные полиномы от λ . Справедливы следующие тождества, проверяющиеся индукцией по $j \geq 0$,

$$P_j Q_j^+ - Q_j P_j^+ = O, \quad P_{j+1} Q_j^+ - Q_{j+1} P_j^+ = A_{j,j+1}^{-1}, \quad P_j Q_{j+1}^+ - Q_j P_{j+1}^+ = A_{j+1,j}^{-1}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} Q_{j+1}^+ A_{j+1,j} Q_j - Q_j^+ A_{j,j+1} Q_{j+1} &= P_{j+1}^+ A_{j+1,j} P_j - P_j^+ A_{j,j+1} P_{j+1} = O, \\ P_{j+1}^+ A_{j+1,j} Q_j - P_j^+ A_{j,j+1} Q_{j+1} &= Q_j^+ A_{j,j+1} P_{j+1} - Q_{j+1}^+ A_{j+1,j} P_j = E. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем в рассмотрение бесконечную матрицу $U(\lambda) = (U_{n,k}(\Theta, \lambda))_{n,k=0}^{\infty}$, где

$$U_{n,k}(\Theta, \lambda) = \begin{cases} Q_n r_k^+, & 0 \leq n \leq k, \\ r_n Q_k^+, & 0 \leq k \leq n; \end{cases}$$

$$r_n = R_n(\Theta, \lambda) = Q_n(\lambda)\Theta - P_n(\lambda), \quad r_k^+ = r_k^+(\Theta, \lambda) = \Theta Q_k^+(\lambda) - P_k^+(\lambda),$$

а Θ – произвольная матрица порядка p . Тогда формально (перемножая матрицы и используя тождества (3)) имеем

$$(\lambda I - A)U(\lambda) = U(\lambda)(\lambda I - A) = I,$$

где I – тождественный оператор в ℓ_2^p .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A \in \mathcal{B}$. Тогда $\lambda \in \Omega(A)$ тогда и только тогда, когда существует матрица $\Theta = \Theta(\lambda)$ и положительные константы $C, q < 1$ такие, что

$$\|U_{n,k}(\Theta, \lambda)\| \leq Cq^{|k-n|}, \quad k, n = 0, 1, \dots$$

В этом случае матрица $\Theta(\lambda)$ единственна и совпадает с соответствующим значением функции Вейля $\mathcal{M}(\lambda, A)$.

Доказательство теоремы опирается на аналог известного результата об оценке элементов матриц, обратных ленточным [7].

СЛЕДСТВИЕ. Если $\lambda \in \Omega(A)$, то

1) выполнены равенства

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_n(\lambda) \mathcal{M}(\lambda, A) - P_n(\lambda)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|r_n(\lambda)\| = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{M}(\lambda, A) Q_n^+(\lambda) - P_n^+(\lambda)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|r_n^+(\lambda)\| = 0; \end{aligned}$$

2) выполнены неравенства

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Q_n(\lambda)\|^{1/n} > 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Q_n^+(\lambda)\|^{1/n} > 1.$$

Для доказательства 2) используются тождества, следующие из (4):

$$Q_{j+1}^+ A_{j+1,j} r_j - Q_j^+ A_{j,j+1} r_{j+1} = E, \quad r_j^+ A_{j,j+1} Q_{j+1} - r_{j+1}^+ A_{j+1,j} Q_j = E.$$

Рассмотрим матрицу $J \in \mathcal{B}$, для которой выполнены условия

$$A_{j,j} = B_j = B_j^*, \quad A_{j+1,j}^* = A_{j,j+1} = A_j, \quad j \geq 0,$$

и порожденный ею оператор самосопряжен. Будем говорить, что матрица A принадлежит классу $\mathcal{T}(J)$, если

- 1) $S(\mathcal{M}, A) = S(\mathcal{M}, J)$;
- 2) $\mathcal{M}(\lambda, A) = \mathcal{M}^*(\lambda, A)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого $A \in \mathcal{T}(J)$ имеет место вложение $\Omega(A) \subset \Omega(J)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $S^m(\mathcal{M}, A)$ моментную последовательность “сдвинутой” матрицы $A^{\cdot m} = (A_{i+m,j+m})_{i,j=0}^\infty$, $m \geq 0$, $S_k^m = (A^{\cdot m})_{00}^k$, $S^0 = S(\mathcal{M}, A)$. Также рассмотрим матрицы

$$D_k(S^m) = \sum_{i_1 + \dots + i_p = k} (-1)^{p+1} S_{i_1}^m \dots S_{i_p}^m, \quad i_1, \dots, i_p \geq 1, \quad k \geq 1, \quad D_0(S^m) = E;$$

здесь суммирование ведется по всем наборам индексов $(i_1, \dots, i_p)$, удовлетворяющим указанным условиям.

ЛЕММА 1. Справедливы соотношения

$$A_{m-1,m} S_k^m A_{m,m+1} = D_{k+2}(S^{m-1}), \quad m \geq 1.$$

ЛЕММА 2. Для любого A такого, что $S(\mathcal{M}, A) = S(\mathcal{M}, J)$, выполняются равенства

$$\begin{aligned} A_{0,1} \dots A_{m-1,m} A_{m,m} A_{m,m-1} \dots A_{1,0} &= A_0 \dots A_{m-1} B_m A_{m-1}^* \dots A_0^*, \\ A_{0,1} \dots A_{m-1,m} A_{m,m-1} \dots A_{1,0} &= A_0 \dots A_{m-1} A_{m-1}^* \dots A_0^*, \end{aligned} \quad m \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что

$$A_{m-1,m} D_k(S^m) A_{m,m-1} = \sum_{i_1+\dots+i_p=k} (-1)^{p+1} D_{i_1+2}(S^{m-1}) D_2^{-1}(S^{m-1}) \\ \times D_{i_2+2}(S^{m-1}) \dots D_2^{-1}(S^{m-1}) D_{i_p+2}(S^{m-1}).$$

Рекуррентно “опуская” индекс m , приходим к равенствам

$$A_{0,1} \dots A_{m-1,m} A_{m,m} A_{m,m-1} \dots A_{1,0} = A_{0,1} \dots A_{m-1,m} S_1^m A_{m,m-1} \dots A_{1,0} \\ = F(S_{1+2m}, \dots, S_1), \\ A_{0,1} \dots A_{m-1,m} A_{m,m-1} \dots A_{1,0} = A_{0,1} \dots A_{m-2,m-1} D_2(S^{m-1}) A_{m-1,m-2} \dots A_{1,0} \\ = G(S_{2m}, \dots, S_1),$$

где функции F и G зависят только от элементов $S(\mathcal{M}, A) = S(\mathcal{M}, J)$. Лемма доказана.

Из леммы 2 вытекает следующее представление для матрицы A :

$$A = CJD = D^{-1}JD,$$

где $C = \text{diag}(c_n)$, $D = \text{diag}(d_n)$ – бесконечные матрицы с элементами

$$c_n = A_{n-1,n}^{-1} \dots A_{0,1}^{-1} A_0 \dots A_{n-1}, \\ d_n = A_{n-1}^* \dots A_0^* A_{0,1}^{-1} \dots A_{n-1,n}^{-1}, \quad c_0 = d_0 = E, \quad c_n = d_n^{-1}.$$

Следовательно, полиномы матрицы J , а именно $Q_{n,J}$, $P_{n,J}$, $Q_{n,J}^+$, $P_{n,J}^+$, связаны с соответствующими полиномами матрицы A соотношениями

$$Q_n = d_n^{-1} Q_{n,J}, \quad P_n = d_n^{-1} P_{n,J}, \quad Q_n^+ = Q_{n,J}^+ d_n, \quad P_n^+ = P_{n,J}^+ d_n. \quad (5)$$

Кроме того, $Q_{n,J}^+(\lambda) = Q_{n,J}^*(\bar{\lambda})$, $P_{n,J}^+(\lambda) = P_{n,J}^*(\bar{\lambda})$. Пусть вещественное $\lambda \in \Omega(A)$. Тогда в силу теоремы 1 и (5) получаем

$$\|d_n^{-1} Q_{n,J} r_{k,J}^+\| \leq Cq^{|k-n|}, \quad \|d_k^{-1} r_{k,J} Q_{n,J}^+ d_n\| \leq Cq^{|k-n|}, \quad 0 \leq n \leq k.$$

Здесь матрицы $r_{k,J}$ и $r_{k,J}^+$ определяются по формулам

$$r_{k,J} = r_{k,J}(\lambda) = Q_{k,J}(\lambda) \mathcal{M}(\lambda, A) - P_{n,J}(\lambda), \\ r_{k,J}^+ = r_{k,J}^+(\lambda) = \mathcal{M}(\lambda, A) Q_{k,J}^+(\lambda) - P_{n,J}^+(\lambda).$$

Следовательно,

$$\|Q_{n,J} r_{k,J}^+\| \leq \frac{\|d_n\|}{\|d_k\|} Cq^{k-n}, \quad \|r_{k,J} Q_{n,J}^+\| \leq \frac{\|d_k\|}{\|d_n\|} Cq^{k-n}, \quad 0 \leq n \leq k.$$

Так как $(Q_{n,J} r_{k,J}^+)^* = r_{k,J} Q_{n,J}^+$, получаем

$$\|Q_{n,J} r_{k,J}^+\| \leq Cq^{k-n}, \quad \|r_{k,J} Q_{n,J}^+\| \leq Cq^{k-n}, \quad 0 \leq n \leq k.$$

Отсюда по теореме 1 заключаем, что $\lambda \in \Omega(J)$. Теорема 2 доказана.

Все изложенные результаты справедливы и в случае, когда $A_{i,j}$ – ограниченные операторы, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aptekarev A. I., Kaliaguine V., Van Assche W. // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. № 8. P. 2423–2430.
2. Beckermann B., Kaliaguine V. // Constr. Approx. 1997. V. 13. № 4. P. 481–510.
3. Гехтман М. И. // Функцион. анализ и его прилож. 1990. Т. 24. № 3. С. 72–73.
4. Осипов А. С. // Функцион. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 1. С. 86–89.
5. Березанский Ю. М., Гехтман М. И. // Укр. матем. ж. 1990. Т. 42. № 6. С. 730–746.
6. Крейн М. Г. // Докл. АН СССР. 1949. Т. 69. № 3. С. 125–128.
7. Demko S., Moss W. F., Smith P. W. // Math. Comput. 1984. V. 43. № 168. P. 491–499.