Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров, О разрешимости одного класса операторных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 773–789

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10220>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:09:43

О разрешимости одного класса операторных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами

Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров

Получены достаточные условия существования и единственности непрерывных решений операторных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-определенными ядрами. В случае, когда решение не единственное, доказаны теоремы существования параметрических семейств решений с указанием асимптотик в виде логарифмостепенных сумм.

Библиография: 25 названия.

DOI: 10.4213/mzm10220

Введение. Введем в плоскости s, t треугольную область

$$D = \{s, t : 0 < s < t < T\}$$

и зададим непрерывные функции $s = \alpha_i(t)$, $i = 0, \dots, n$, имеющие непрерывные производные при $t \in (0, T)$. Предполагается, что

$$0 =: \alpha_0(t) < \alpha_1(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < \alpha_n(t) := t \quad \text{при } t \in (0, T),$$

$\alpha_i(0) = 0$, $i = 0, \dots, n$. Для любого $h > 0$ существует $\Delta > 0$ такое, что

$$\inf_{h < t < T} (t - \alpha_{n-1}(t)) \geq \Delta,$$

$0 \leq \alpha'_1(0) \leq \alpha'_2(0) \leq \dots \leq \alpha'_{n-1}(0) < 1$. Кривые $s = \alpha_i(t)$, $i = 0, \dots, n$, разбивают область D на непересекающиеся области

$$D_i = \{s, t : \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t), i = 1, \dots, n\}, \quad \overline{D} = \bigcup_{i=1}^n \overline{D}_i.$$

Введем двухпараметрическое семейство линейных непрерывных оператор-функций $K_i(t, s)$, дифференцируемых по t , определенных на компактах $\overline{D}_i$ и действующих из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2 . Для простоты изложения

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” Минобрнауки (грант № 14.В37.21.0365) и Deutscher Akademischer Austauschdienst (грант № A1200665).

Если при этом $[0, T] = \bigcup_{k=0}^m I_k$, $0 < \alpha(t) < t$, $\alpha^{(1)}(t) \leq 1/(1 + \varepsilon)$ при $0 \leq t \leq T$, то

$$\alpha: I_j \rightarrow \bigcup_{k=0}^{j-1} I_k, \quad j = 1, \dots, m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится методом математической индукции с использованием формулы Лагранжа о конечных приращениях.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вместо условия 2) в лемме 1 можно потребовать следующее условие:

$$2') \quad 0 < h < T, \quad I_0 = [0, h],$$

$$\min_{h \leq t \leq T} (t - \alpha(t)) = \Delta > 0, \quad I_k = [h + (k-1)\Delta, h + k\Delta],$$

$$\alpha: I_1 \rightarrow I_0, \quad [0, T] = \bigcup_{k=0}^m I_k.$$

ТЕОРЕМА 1 (Достаточные условия существования и единственности решения). Пусть выполнено условие (A), все операторы $K_i(t, s)$ в представлении (2) и операторы $K_{i_t}^{(1)}(t, s)$ в представлении (5) непрерывны в операторной топологии, вектор $f(t)$ имеет непрерывную производную, $f(0) = 0$. Тогда уравнение (3) в классе непрерывных функций $\mathcal{C}_{([0, T]; E_1)}$ имеет единственное решение. Более того, решение можно найти методом шагов, сочетая его с методом последовательных приближений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к обеим частям уравнения (4) оператор $K_n^{-1}(t, t)$, получим уравнение

$$x(t) + A(t)x + Kx = \bar{f}(t), \quad (6)$$

где введены обозначения

$$A(t)x \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t, t) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(1)}(t) (K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t))) x(\alpha_i(t)),$$

$$Kx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t, t) K_{i_t}^{(1)}(t, s) x(s) ds, \quad \bar{f}(t) \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t, t) f^{(1)}(t).$$

Зафиксировав $q < 1$, выберем $h_1 > 0$ так, чтобы $\max_{0 \leq t \leq h_1} D(t) = q < 1$. В силу условия (A), непрерывности оператор-функций $K_i(t, s)$ в операторной топологии и непрерывной дифференцируемости функций $\alpha_i(t)$ такое $h_1 > 0$ найдется. Положим $0 < h < \min\{h_1, (1 - q)/c\}$, где постоянная c определена выше. Разобьем интервал $[0, T]$ на промежутки

$$[0, h], \quad [h, h + \varepsilon h], \quad [h + \varepsilon h, h + 2\varepsilon h], \quad \dots \quad (7)$$

Обозначим через $x_0(t)$ сужение искомого решения $x(t)$ на интервал $I_0 = [0, h]$, а через $x_m(t)$ – его сужения на интервалы

$$I_m = [(1 + (m-1)\varepsilon)h, (1 + m\varepsilon)h], \quad m = 1, 2, \dots$$

Пусть согласно лемме 1 $\alpha_i^{(1)}(t) \leq 1/(1+\varepsilon)$ при $t \in [0, T]$, $i = 1, \dots, n-1$, $\varepsilon > 0$ или выполнены условия замечания 1 к этой лемме. Тогда

$$\alpha_i: I_j \rightarrow \bigcup_{k=0}^{j-1} I_k, \quad j = 1, \dots, m.$$

Это свойство дает возможность при построении решения $x(t)$ применить известный в теории функционально-дифференциальных уравнений метод шагов (см., например, [20; с. 199]).

Действительно, на первом шаге вычислим $x_0(t) \in \mathcal{C}_{(I_0; E_1)}$, построив последовательность

$$\begin{aligned} x_0^n(t) &= -A(t)x_0^{n-1} - Kx_0^{n-1} + \bar{f}(t), \\ x_0^0(t) &= \bar{f}(t), \quad t \in I_0. \end{aligned}$$

Так как $\|A(0)\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_1)} \leq D(0) < 1$ в силу неравенства (A), то при достаточно малом h имеем оценку $\|A + K\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_{(I_0; E_1)} \rightarrow \mathcal{C}_{(I_0; E_1)})} < 1$.

Поэтому при $t \in I_0$ существует единственное решение $x_0(t)$ уравнения (6), к которому последовательность $x_0^n(t)$ равномерно сходится. Назовем построенное $x_0(t)$ сужением искомого решения на интервал I_0 (кратко, *локальным* решением). Продолжим процесс построения искомого решения при $t \geq h$, т.е. на промежутках I_m , $m = 1, 2, \dots$.

Вычислив функцию $x_0(t) \in \mathcal{C}_{(I_0; E_1)}$, найдем $x_1(t)$ в пространстве $\mathcal{C}_{(I_1; E_1)}$, решая последовательными приближениями интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned} x(t) + \int_h^t K_n^{-1}(t, t)K_h(t, s)x(s) ds \\ = \bar{f}(t) - Ax_0 - \int_0^h K_n^{-1}(t, t)K_h(t, s)x_0(s) ds, \quad t \in I_1. \end{aligned}$$

При этом $x_0(h) = x_1(h)$. Введем непрерывную функцию

$$\bar{x}_1(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in I_0, \\ x_1(t), & t \in I_1, \end{cases} \quad (8)$$

являющуюся сужением искомого непрерывного решения $x(t)$ на интервал $I_0 \cup I_1$. На третьем шаге найдем элемент $x_2(t) \in \mathcal{C}_{(I_2; E_1)}$ последовательными приближениями из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\begin{aligned} x(t) + \int_{h+\varepsilon h}^t K_n^{-1}(t, t)K_h(t, s)x(s) ds \\ = \bar{f}(t) - A\bar{x}_1 - \int_0^{h+\varepsilon h} K_n^{-1}(t, t)K_h(t, s)\bar{x}_1(s) ds, \quad t \in I_2. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс за N шагов ($N \geq T/h$), построим искомое решение $x(t)$ уравнения (3) на всем интервале $(0, T)$. *Существование* решения доказано.

Докажем *единственность* решения, показав, что в условиях теоремы 1 однородное уравнение, отвечающее (6), имеет только тривиальное непрерывное решение.

Действительно, пусть $x^*(t)$ – непрерывное решение однородного уравнения. Тогда при $t \in I_0$ и достаточно малом $h > 0$ имеем тождество $x^*(t) \equiv 0$ в силу оценки $\|A + K\|_{\mathcal{L}(C_{(I_0; E_1)} \rightarrow C_{(I_0; E_1)})} < 1$. Таким образом, сужение решения $x^*(t)$ однородного уравнения на интервал $I_0 \cup I_1$ будет иметь вид

$$\bar{x}_1(t) = \begin{cases} 0, & t \in I_0, \\ x_1(t), & t \in I_1. \end{cases}$$

Очевидно, что $x_1(t)$ по доказанному должна удовлетворять однородному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода и поэтому $x_1(t) \equiv 0$. Поэтому $x^*(t) \equiv 0$ при $t \in I_0 \cup I_1$. Продолжая процесс, убедимся, что непрерывное решение $x^*(t)$ однородного уравнения равно нулю при любом $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

На основании метода шагов, леммы 1 из доказательства теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть все функции $\alpha_i(t)$ удовлетворяют условиям леммы 1 (или замечания 1), $[0, T] = \bigcup_{k=0}^m I_k$. Если при этом уравнение (3) имеет на малом интервале $[0, h]$ непрерывное локальное решение, то это решение можно непрерывно продолжить на весь интервал $[0, T]$, т.е. уравнение (3) будет разрешимо в классе $\mathcal{C}_{([0, T]; E_1)}$.

В п. 2 при условиях дополнительной гладкости ядер $K_i(t, s)$ будет предложен метод построения локального решения уравнения (3) и асимптотики этого решения в общем случае, когда неравенство (A) не выполняется.

ПРИМЕР 1 ($E_1 = E_2 = \mathbb{R}^m$). Система интегральных уравнений

$$\int_0^{t/2} K_1(t-s)x(s)ds + \int_{t/2}^t K_2(t-s)x(s)ds = f(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $K_1(t-s) = K_2(t-s) + E$, K_1, K_2 – матрицы $m \times m$, E – единичная матрица,

$$\|K_2^{-1}(0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m)} < 2,$$

матрица $K_2(t)$ и вектор-функция $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))'$ имеют непрерывные производные по t , $f(0) = 0$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Действительно, в этом случае

$$D(0) = \frac{1}{2} \|K_2^{-1}(0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)} < 1.$$

Поэтому система имеет единственное непрерывное решение.

ПРИМЕР 2 ($E_1 = \mathcal{C}_{[0,1]}^{(2)}$, $E_2 = \mathcal{C}_{[0,1]}$). Краевая задача

$$\begin{cases} \int_0^{t/2} \left(\frac{\partial^2 x(t, y)}{\partial y^2} + x(t, y) \right) dt + \int_{t/2}^t \frac{\partial^2 x(t, y)}{\partial y^2} dt = f(t, y), & 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ x(t, 0) = 0, \quad x(t, 1) = 0, \end{cases}$$

функция $f(t, y)$ непрерывна по y и имеет непрерывную производную по t , $f(0, y) = 0$, $K_2 = \partial^2 / \partial y^2 \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_{[0,1]}^{(2)} \rightarrow \mathcal{C}_{[0,1]})$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Теперь

$$D(0) = \frac{1}{2} \max_{0 \leq y \leq 1} \int_0^1 |G(y, \xi)| d\xi < 1,$$

где

$$G(y, \xi) = \begin{cases} (\xi - 1)y, & y \leq \xi, \\ (y - 1)\xi, & \xi \leq y. \end{cases}$$

Дифференцируя уравнение по t и обращая оператор K_2 с помощью функции Грина $G(y, \xi)$, получим эквивалентное уравнение

$$x(t, y) = -\frac{1}{2} \int_0^1 G(y, \xi) x(t/2, \xi) d\xi + \int_0^1 G(y, \xi) f_h(t, \xi) d\xi$$

со сжимающим оператором. Поэтому краевая задача имеет единственное непрерывное решение.

2. Теорема существования непрерывного параметрического решения.

Рассмотрим формализм построения асимптотических приближений решений в виде логарифмо-степенных сумм. Пусть выполнено условие

существуют операторные полиномы

$$\mathcal{P}_i = \sum_{\nu+\mu=0}^N K_{i\nu\mu} t^\nu s^\mu, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $K_{i,\nu,\mu} \in \mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)$ – линейные непрерывные операторы, вектор-функция $f^N(t) = \sum_{\nu=1}^N f_\nu t^\nu$, полиномы $\alpha_i^N(t) = \sum_{\nu=1}^N \alpha_{i\nu} t^\nu$, $i = 1, \dots, n-1$, где

(B)

$$0 < \alpha_{11} < \alpha_{21} < \alpha_{21} < \dots < \alpha_{n-1,1} < 1,$$

такие, что при $t \rightarrow +0$, $s \rightarrow +0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|K_i(t, s) - \mathcal{P}_i(t, s)\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_2)} &= \mathcal{O}((t+s)^{N+1}), & i = 1, \dots, n, \\ \|f(t) - f^N(t)\|_{E_2} &= \mathcal{O}(t^{N+1}), \quad |\alpha_i(t) - \alpha_i^N(t)| = \mathcal{O}(t^{N+1}), & i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Таким образом, при построении начального приближения (асимптотики) решения в п. 2 мы требуем дополнительной гладкости на ядро и заданные функции. При этом условии удастся рассмотреть случай, когда решение может быть не единственным.

Разложения по степеням t, s , представленные в условии (B), назовем “полиномами Тейлора” соответствующих элементов.

Как и в п. 1, обратимся к уравнению (4), эквивалентному уравнению (3). В отличие от п. 1 далее мы не предполагаем выполненным условие (A). Теперь возможен случай, когда $D(0) \geq 1$. Следуя работе [6] (см. также [8], [9]), будем искать начальное приближение решения неоднородного уравнения (4) в окрестности нуля в виде полинома

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=0}^N x_j (\ln t) t^j. \quad (9)$$

Покажем, что коэффициенты x_j со значениями в E_1 в общем случае зависят от $\ln t$ и свободных параметров. Это согласуется с возможностью существования нетривиальных решений у однородного уравнения.

Введем j -параметрическое семейство линейных операторов

$$B(j) = K_n(0, 0) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^{1+j} (K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0)).$$

Оператор $B(j)$, отвечающий главной “функциональной” части уравнения (4) и рассматриваемый при $j \in 0 \cup \mathbb{N}$, назовем *характеристическим оператором* уравнения (3).

При вычислении коэффициентов x_j важную роль играет характеристический оператор и возможны регулярный и нерегулярный случаи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Число j^* – *регулярная точка* оператора $B(j)$, если оператор $B(j^*)$ имеет ограниченный обратный, и *нерегулярная точка* в противном случае.

Регулярный случай: характеристический оператор $B(j)$ имеет ограниченный обратный при $j \in (0, 1, \dots, N)$. Если $D(0) < 1$ (см. условие (A)), то оператор $B(j)$ имеет ограниченный обратный при любом $j \geq 0$. Таким образом, в условиях теоремы 1 мы всегда имеем только регулярный случай. В регулярном случае коэффициенты x_j будут постоянными векторами из E_1 . Действительно, подставляя разложение (9) в уравнение (4), методом неопределенных коэффициентов с учетом условия (B), приходим к рекуррентной последовательности линейных уравнений относительно векторов x_j :

$$B(0)x_0 = f'(0), \quad (10)$$

$$B(j)x_j = M_j(x_0, \dots, x_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Вектор M_j выражается определенным образом через решения $x_0, \dots, x_{j-1}$ предыдущих уравнений и коэффициенты “полиномов Тейлора” из условия (B).

Так как в регулярном случае операторы $B(j)$ обратимы, то векторы $x_0, \dots, x_N$ не зависят от $\ln t$, определяются единственным образом и полином (9) будет построен. Если при этом выполняется условие теоремы 1, то этот полином будет асимптотикой соответствующего единственного непрерывного решения.

Нерегулярный случай: оператор $B(j)$ в массиве $(0, 1, \dots, N)$ имеет нерегулярные точки. Введем определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Число j^* – *особая фредгольмова точка* оператора $B(j)$ *индекса 1*, если $B(j^*)$ – фредгольмов оператор [22; с. 219],

$$\det[\langle B^{(1)}(j^*)\phi_i, \psi_l \rangle]_{i,l=1}^r \neq 0,$$

где $\{\phi_i\}_1^r$ – базис в $N(B(j^*))$, $\{\psi_i\}_1^r$ – базис в $N(B'(j^*))$, $B'(j^*)$ – сопряженный оператор, $B^{(1)}(j^*)$ – производная оператора по j , вычисленная при j^* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $B(j^*)$ – фредгольмов оператор; j^* назовем *особой фредгольмовой точкой индекса $k+1$* , если $N(B(j^*)) \subset \bigcap_{i=1}^k N(B^{(i)}(j^*))$,

$$\det[\langle B^{(k+1)}(j^*)\phi_i, \psi_l \rangle]_{i,l=1}^r \neq 0, \quad k \geq 1.$$

Отметим, что

$$B^{(k)}(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^{1+j} a_i^k (K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0)),$$

где $a_i = \ln \alpha'_i(0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^1$, то $B(j)$ будет обычной функцией аргумента j . В этом случае определение 2 означает, что j^* – однократный корень уравнения $B(j) = 0$, а определение 3, что $j^* - (k + 1)$ -кратный корень этого уравнения.

Покажем, что в нерегулярном случае коэффициенты x_j будут полиномами по степеням $\ln t$ и зависят от произвольных постоянных. Порядок полиномов и число произвольных постоянных связаны с индексами особых точек операторов $B(j)$ и размерностями $N(B(j))$.

Действительно, так как коэффициент x_0 в нерегулярном случае может зависеть от $\ln t$, то на основании метода неопределенных коэффициентов x_0 следует искать как решение разностного уравнения

$$K_n(0, 0)x_0(z) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i(0)(K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0))x_0(z + a_i) = f'(0), \quad (12)$$

где $a_i = \ln \alpha'(0)$, $z = \ln t$.

Здесь возможны три случая.

Случай 1. Оператор $B(0)$ имеет ограниченный обратный. Тогда коэффициент x_0 от z не зависит и определится единственным образом из уравнения (10).

Случай 2. Пусть $j = 0$ – простая особая фредгольмова точка оператора $B(j)$. Коэффициент $x_0(z)$ будем искать из разностного уравнения (12) в виде линейной вектор-функции

$$x_0(z) = x_{01}z + x_{02}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12), получим для определения векторов x_{01} , x_{02} два уравнения

$$B(0)x_{01} = 0, \quad (14)$$

$$B(0)x_{02} + B^{(1)}(0)x_{01} = f'(0). \quad (15)$$

Пусть $\{\phi_i\}_1^r$ – базис в $N(B(0))$. Тогда $x_{01} = \sum_{k=1}^r c_k \phi_k$. Вектор $c = (c_1, \dots, c_r)'$ определится однозначно из условий разрешимости уравнения (15), т.е. из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^r \langle B^{(1)}(0)\phi_k, \psi_i \rangle c_k = \langle f'(0), \psi_i \rangle, \quad i = 1, \dots, r,$$

с невырожденной матрицей. Далее коэффициент x_{02} определится из уравнения (15) с точностью до $\text{span}(\phi_1, \dots, \phi_r)$ по формуле

$$x_{02} = \sum_{k=1}^r d_k \phi_k + \Gamma(f'(0) - B^{(1)}x_{01}).$$

Здесь $d_1, \dots, d_r$ – произвольные постоянные, $\Gamma = (B(0) + \sum_{k=1}^r \langle \cdot, \gamma_k \rangle z_k)^{-1}$ – регуляризатор Треногина (см. [22; с. 221]), где

$$\langle \phi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}, \quad \langle z_i, \psi_k \rangle = \delta_{ik}, \quad \gamma_k \in E_1^*, \quad z_i \in E_2.$$

Таким образом, в случае 2 коэффициент $x_0(z)$ линеен относительно z и зависит от r произвольных постоянных.

Случай 3. Пусть $j = 0$ – особая фредгольмова точка оператора $B(j)$ индекса $k + 1$, где $k \geq 1$. Решение $x_0(z)$ разностного уравнения (12) будем искать в виде полинома

$$x_0(z) = x_{01}z^{k+1} + x_{02}z^k + \dots + x_{0k+1}z + x_{0k+2}. \quad (16)$$

Подставляя полином (16) в систему (12), учитывая тождество

$$\frac{d^k}{dj^k} B(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^{1+j} a_i^k (K_i(0, 0) - K_{i+1}(0, 0)),$$

где $a_i = \ln \alpha'_i(0)$, и приравнивая коэффициенты при степенях $z^{k+1}, z^k, \dots, z, z^0$ нулю, получим рекуррентную последовательность линейных операторных уравнений относительно коэффициентов $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k+2}$:

$$\begin{aligned} B(0)x_{01} &= 0, \\ B(0)x_{02} + B^{(1)}(0) \binom{k+1}{k} x_{01} &= 0, \\ B(0)x_{0l+1} + B^{(l)}(0) \binom{k+1}{k+1-l} x_{01} + B^{(l-1)}(0) \binom{k}{k+1-l} x_{02} + \dots \\ &+ B^{(1)}(0) \binom{k+1-l+1}{k+1-l} x_{0l} = 0, \quad l = 1, \dots, k, \\ B(0)x_{0k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} + B^{(k)}(0)x_{02} + \dots + B^{(1)}(0)x_{0k+1} &= f'(0). \end{aligned} \quad (17)$$

В рассматриваемом случае согласно условиям определения 3 имеем включение

$$N(B(0)) \subset \bigcap_{i=1}^k N\left(\frac{d^i B(j)}{dj^i} \Big|_{j=0}\right).$$

Поэтому $B^{(i)}(0)x_{0i+1} = 0$, $i = 0, \dots, k$, и коэффициенты $x_{01}, \dots, x_{0k+1}$ определяются из однородного уравнения $B(0)x = 0$ по формулам $x_{0i} = \sum_{j=1}^r c_{ij}\phi_j$, $i = 1, \dots, k+1$. Уравнение (17) примет вид

$$B(0)x_{0,k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} = f'(0). \quad (18)$$

Так как $B(0)$ – фредгольмов оператор и $\det[\langle B^{(k+1)}(0)\phi_i, \psi_k \rangle]_{i,k=1,\dots,r} \neq 0$, вектор $c^1 \stackrel{\text{def}}{=} (c_{11}, \dots, c_{1r})'$ определится однозначно из условий разрешимости уравнения (18). Итак,

$$x_{0,k+2} = \sum_{j=1}^r c_{k+2,j}\phi_j + \widehat{x}_{k+2},$$

$\widehat{x}_{k+2}$ – частное решение уравнения (18). Вектор $c^{k+2} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{k+2,1}, \dots, c_{k+2,r})'$, как и векторы $c^i = (c_{i1}, \dots, c_{ir})'$, $i = 2, \dots, k+1$, остается произвольным. Таким образом, в случае 3 коэффициент $x_0(z)$ является полиномом $(k+1)$ -й степени относительно z и зависит от $r \times (k+1)$ произвольных постоянных.

Применяя метод неопределенных коэффициентов с учетом тождества

$$\int t^j \ln^k t \, dt = t^{j+1} \sum_{s=0}^k (-1)^s \frac{k(k-1) \cdots (k-(s-1))}{(j+1)^{s+1}} \ln^{k-s} t,$$

можно построить разностные уравнения для определения коэффициента $x_1(z)$ ($z = \ln t$) и последующих коэффициентов асимптотического приближения (9). Действительно, с учетом определения оператора F (см. уравнение (4)), имеем представление

$$F(x)|_{x=x_0(z)+x_1(z)t} = \left[K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^2 (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_1(z + a_i) + P_1(x_0(z)) \right] t + r(t) \quad (19)$$

с оценкой $\|r(t)\| = o(t)$. Здесь $P_1(x_0(z))$ – определенный полином от z , степень которого равна индексу особой фредгольмовой точки $j = 0$ оператора $B(j)$. Из соотношения (19) в силу оценки $r(t) = o(t)$ при $t \rightarrow 0$ следует, что коэффициент $x_1(z)$ должен удовлетворять разностному уравнению

$$K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^2 (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_1(z + a_i) + P_1(x_0(z)) = 0. \quad (20)$$

Если $j = 1$ – регулярная точка оператора $B(j)$, то уравнение (20) имеет решение $x_1(z)$ в виде полинома того же порядка, что и индекс особой фредгольмовой точки $j = 0$ оператора $B(0)$. Если $j = 1$ тоже окажется особой фредгольмовой точкой оператора $B(j)$, то решение $x_1(z)$ строится в виде полинома степени $k_0 + k_1$, где k_0 и k_1 – индексы особых фредгольмовых точек $j = 0$ и $j = 1$ оператора $B(j)$ соответственно. Коэффициент $x_1(z)$ будет зависеть от $r_0 k_0 + r_1 k_1$ произвольных постоянных, где $r_0 = \dim N(B(0))$, $r_1 = \dim N(B(1))$.

Введем условие

$$\text{Пусть оператор } B(j) \text{ в массиве } (0, 1, \dots, N) \text{ имеет регулярные точки и особые фредгольмовы точки } j_1, \dots, j_\nu \text{ индексов } k_i, \dim N(B(j_i)) = r_i, \quad (C) \\ i = 1, \dots, \nu.$$

Тогда аналогичным образом можно вычислить остальные коэффициенты $x_2(z), \dots, x_N(z)$ асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ решения уравнения (4) из последовательности разностных уравнений вида

$$K_n(0,0)x_j(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'_i(0))^{1+j} (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_j(z + a_i) + P_j(x_0(z), \dots, x_{j-1}(z)) = 0, \quad j = 2, \dots, N.$$

Из изложенного вытекает

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (B), (C). Тогда существует вектор-функция $\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^N x_i(\ln t) t^i$ такая, что $\|F(\hat{x}(t))\|_{E_2} = o(t^N)$, где оператор F определен формулой (4). При этом коэффициенты $x_i(\ln t)$ являются полиномами от $\ln t$ возрастающих степеней, не превосходящих суммы индексов $\sum_j k_j$ особых фредгольмовых точек $j \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ характеристического оператора $B(j)$. Коэффициенты $x_i(\ln t)$ зависят от $\sum_{j=0}^i \dim N(B(j)) k_j$ произвольных постоянных.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если $B(0)$ – фредгольмов оператор и $\dim N(B(0)) \geq 1$, то коэффициент $x_0(\ln t)$ может оказаться линейной функцией $\ln t$ и вектор-функция $\hat{x}(t)$ будет неограниченно возрастать при $t \rightarrow +0$ (кратко, $\hat{x} \in \mathcal{C}_{((0,T];E_1)}$).

Перейдем к построению локального решения уравнения (3). Так как $0 \leq \alpha'_i(0) < 1$, $\alpha_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, для любого $0 < \varepsilon < 1$ найдется $h \in (0, T]$ такое, что

$$\max_{i=1, \dots, n-1, t \in [0, h]} |\alpha'_i(t)| \leq \varepsilon \quad \text{и} \quad \sup_{i=1, \dots, n-1, t \in (0, h]} \frac{\alpha_i(t)}{t} \leq \varepsilon.$$

Введем условие

Пусть оператор $K_n(t, t)$ имеет ограниченный обратный при $t \in [0, T]$ и N^* выбрано настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{t \in (0, h)} \varepsilon^{N^*} \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i^{(1)}(t)| \|K_n^{-1}(t, t)(K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t)))\|_{\mathcal{L}(E_1 \rightarrow E_1)} \leq q < 1. \quad (\text{D})$$

ЛЕММА 3 (Существование локального решения). Пусть выполнено условие (D). Пусть в классе $\mathcal{C}_{[0, h]; E_1}$ вектор-функций, непрерывных при $t \in [0, h]$, существует элемент $\hat{x}(t)$ такой, что при $t \rightarrow +0$

$$\|F(\hat{x}(t))\|_{E_2} = o(t^N), \quad N \geq N^*.$$

Тогда уравнение (3) в классе $\mathcal{C}_{[0, h]; E_1}$ имеет решение

$$x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*} u(t), \quad (21)$$

где $u(t)$ определяется единственным образом последовательными приближениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (21) в уравнение (4), получим для определения функции $u(t)$ интегро-функциональное уравнение

$$\begin{aligned} K_n(t, t)u(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i(t) \left(\frac{\alpha_i(t)}{t} \right)^{N^*} (K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t)))u(\alpha_i(t)) \\ + \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_{it}^{(1)}(t, s) \left(\frac{s}{t} \right)^{N^*} u(s) ds + \frac{F(\hat{x}(t))}{t^{N^*}} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Введем линейные операторы

$$\begin{aligned} Lu &\stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t, t) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_i(t) \left(\frac{\alpha_i(t)}{t} \right)^{N^*} \{K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t))\} u(\alpha_i(t)), \\ Ku &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t, t) K_{it}^{(1)}(t, s) \left(\frac{s}{t} \right)^{N^*} u(s) ds. \end{aligned}$$

Тогда система (22) переписется в компактной форме

$$u + (L + K)u = \gamma(t),$$

где $\gamma(t) = K_n^{-1}(t, t)F(\hat{x}(t))/t^{N^*}$ – непрерывная вектор-функция. Введем банахово пространство X непрерывных по t вектор-функций $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве E_1 с нормой

$$\|u\|_l = \max_{0 \leq t \leq h} e^{-lt} \|u(t)\|_{E_1}, \quad l > 0.$$

Тогда в силу неравенств $\sup_{t \in (0, h]} \alpha_i(t)/t \leq \varepsilon < 1$ и условия (D) при всех $l \geq 0$ норма линейного функционального оператора L удовлетворяет оценке

$$\|L\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq q < 1.$$

Кроме того, для интегрального оператора K при достаточно большом l справедлива оценка

$$\|K\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} \leq q_1 < 1 - q.$$

Следовательно, при достаточно большом $l > 0$

$$\|L + K\|_{\mathcal{L}(X \rightarrow X)} < 1,$$

т.е. линейный оператор $L + K$ является сжимающим в пространстве X . Поэтому последовательность $\{u_n\}$, где $u_n = -(L + K)u_{n-1} + \gamma(t)$, $u_0 = \gamma(t)$, сходится. Лемма 3 доказана и справедлива

ТЕОРЕМА 2 (Основная теорема). Пусть выполнены условия (B), (C), (D), и пусть $f(0) = 0$. Пусть оператор $B(0)$ имеет ограниченный обратный. Тогда уравнение (3) в пространстве $\mathcal{C}_{([0, T]; E_1)}$ имеет решение, зависящее от $\sum_{i=1}^{\nu} r_i k_i$ произвольных постоянных. При этом справедлива асимптотическая оценка

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\|_{E_1} = \mathcal{O}(t^{N^*}) \quad \text{при } t \rightarrow +0,$$

где $\hat{x}(t)$ – логарифмо-степенная сумма (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании леммы 2 в силу условий теоремы возможно построение асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ локального решения в виде логарифмо-степенного полинома

$$\sum_{i=0}^N x_i(\ln t) t^i,$$

где коэффициенты $x_i(\ln t)$ будут зависеть от указанного числа произвольных постоянных. В силу леммы 3 уравнению (3) на малом интервале $[0, h]$, где $0 < h \leq T$ удовлетворит функция $x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*} u(t)$, причем непрерывную функцию $u(t)$ можно построить методом последовательных приближений. Таким образом, уравнение (3) имеет семейство локальных решений, зависящее от $\sum_{i=1}^{\nu} r_i k_i$ произвольных постоянных. На основании следствия 1 это локальное решение при фиксированных значениях произвольных постоянных можно продолжить с интервала $[0, h]$ на весь интервал $[0, T]$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $j = 0$ – особая фредгольмова точка оператора $B(j)$, то оператор $B(0)$ не имеет обратного. В этом случае коэффициент $x_0(\ln t)$ в асимптотике $\hat{x}(t)$ может оказаться линейной функцией $\ln t$, т.е. решение будет неограниченно возрастать при $t \rightarrow +0$. Таким образом, от условия обратимости оператора $B(0)$ в теореме 2 можно отказаться, допуская возможность неограниченного возрастания решения при $t \rightarrow +0$.

ПРИМЕР 3 ($E_1 = E_2 = \mathcal{C}_{[0,1]}$). Рассмотрим уравнение

$$\int_0^{t/2} \int_0^1 K(y, y_1) x(s, y_1) dy_1 ds + \int_{t/2}^t \left(\int_0^1 K(y, y_1) x(s, y_1) dy_1 - 2x(s, y) \right) ds = f(y, t),$$

где $0 \leq t < T$, $0 \leq y \leq 1$, $K(y, y)$ – непрерывное симметрическое ядро, $f(y, t)$ – непрерывная функция по y и аналитическая по t , $f(y, 0) = 0$. Здесь характеристический оператор имеет вид

$$B(j) := (-2 + (1/2))^j [\cdot] + \int_0^1 K(y, y_1) [\cdot] dy_1.$$

Если члены последовательности $2 - (1/2)^j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, не являются собственными числами ядра $K(y, y_1)$, то имеем регулярный случай и на основании доказательства теоремы 2 уравнение имеет аналитическое по t решение. Пусть 1 – собственное число ядра $K(y, y_1)$ ранга r , $\phi_1(y), \dots, \phi_r(y)$ – соответствующая ортонормированная система собственных функций. Пусть остальные числа последовательности $2 - (1/2), 2 - (1/2^2), \dots$ – регулярные числа ядра $K(y, y_1)$. Тогда на основании теоремы 2 уравнение имеет r -параметрическое семейство решений. В частности, если $f(y, t) = g(y)t$, то решение имеет вид

$$x(t, y) = -\frac{\ln t}{\ln 2} \sum_{i=1}^r \int_0^1 \phi_i(y) \phi_i(y_1) g(y_1) dy_1 + c_1 \phi_1(y) + \dots + c_r \phi_r(y) + x_0(y),$$

где $c_1, \dots, c_r$ – произвольные постоянные, $x_0(y)$ – частное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(y) = \int_0^1 K(y, y_1) x(y_1) dy_1 - g(y) + \sum_{i=1}^r \phi_i(y) \int_0^1 \phi_i(y_1) g(y_1) dy_1.$$

Усиление теоремы 2. Пусть числа $\{j_1, \dots, j_\nu\} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и являются фредгольмовыми точками характеристического оператора $B(j)$. Построим обобщенные жордановы наборы в смысле ([21; п. 30]) характеристического оператора $B(j)$ в этих точках. Тогда теорему 2 можно усилить. Действительно, пусть j^* – особая фредгольмова точка оператора $B(j)$. Пусть построены элементы $\{\phi_i^{(l)}\}$, $i = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, p_i$, удовлетворяющие равенствам:

$$\begin{aligned} B(j^*) \phi_i^{(1)} &= 0, \\ B(j^*) \phi_i^{(2)} + B^{(1)}(j^*) \binom{p_i+1}{p} \phi_i^{(1)} &= 0, \\ B(j^*) \phi_i^{(l+1)} + B^{(l)}(j^*) \binom{p_i+1}{p_i+1-l} \phi_i^{(1)} + \dots \\ &+ B^{(1)}(j^*) \binom{p_i+1-l+1}{p_i+1-l} \phi_i^{(l)} = 0, \quad i = 1, \dots, r, \quad l = 1, \dots, p_i - 1. \end{aligned} \tag{23}$$

Пусть при этом

$$\det[\langle B^{(p_i)}(j^*) \phi_i^{(1)} + B^{(p_i-1)}(j^*) \phi_i^{(2)} + \dots + B^{(1)}(j^*) \phi_i^{(p_i)}, \psi_j \rangle]_{i,j=1,\dots,r} \neq 0, \tag{24}$$

где $\{\phi_i\}_1^r$ – базис в $N(B'(j^*))$. Тогда по аналогии с известной теорией жордановых наборов линейных операторов [21; с. 422] скажем, что оператор $B(j)$ в точке j^* имеет полный $B(j^*)$ жорданов набор (кратко ПЖН) $(\phi_i^{(l)})_{i=1,\dots,r, l=1,\dots,p_i}$. При этом числа p_i назовем *длинами жордановых цепочек*

$$\underbrace{(\phi_i^{(1)}, \dots, \phi_i^{(p_i)})}_{p_i}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Отметим, что ПЖН существует в точке j^* , если j^* – особая фредгольмова точка индекса p в смысле определения 3. В этом случае $B^{(l)}(j^*)\phi_i^{(1)} = 0$, $i = 1, \dots, r$, $l = 0, \dots, p - 1$, жордановы цепочки

$$\underbrace{(\psi_i^{(1)}, \dots, \psi_i^{(1)})}_p, \quad i = 1, \dots, r,$$

стационарны, т.е. имеют одинаковую длину p , условие (24) примет вид

$$\det[\langle B^{(p)}\phi_i^{(1)}, \psi_j \rangle]_{i,j=1,\dots,r} \neq 0.$$

При этом будет выполнено и условие (C), используемое в теореме 2, т.е. мы придем к результату теоремы 2.

Вместо условия (C) введем более слабое условие:

Характеристический оператор $B(j)$ в массиве $(0, 1, \dots, N^)$ имеет ровно ν особых фредгольмовых точек $(j_1, \dots, j_\nu)$ с полными обобщенными жордановыми наборами, все остальные числа этого массива регулярны.* (C1)

Отметим, что в отличие от условия (C) в условии (C1) жордановы цепочки могут быть нестационарны. Если условие (C1) выполняется, то требуемую в лемме 1 асимптотику решения уравнения (4) можно построить. Действительно, пусть оператор $B(0)$ фредгольмов, $\{\phi_i^{(1)}\}_{i=1}^r$ – базис в $N(B(0))$, $\{\phi_i^{(l)}\}_{i=1,\dots,r, l=1,\dots,p_i}$ – соответствующий ПЖН, удовлетворяющий уравнениям (23) и условию (24), где положено $j^* = 0$. Тогда первый коэффициент $x_0(z)$ искомого приближения $\hat{x}$, удовлетворяющий разностному уравнению (12), строится в виде полинома

$$x_0(z) = \sum_{i=1}^r c_i \sum_{l=1}^{p_i} \phi_i^{(l)} z^{p_i+1-l} + x_0, \quad (25)$$

где постоянные $c_1, \dots, c_r$ и $x_0 \in E_1$ подлежат определению. Подставляя (25) в (12), получим для определения элемента x_0 линейное уравнение

$$B(0)x_0 + \sum_{i=1}^r c_i (B^{(p_i)}(0)\phi_i^{(1)} + B^{(p_i-1)}(0)\phi_i^{(2)} + \dots + B^{(1)}(0)\phi_i^{(p_i)}) = f'(0). \quad (26)$$

В силу неравенства (24) при $j^* = 0$ вектор $(c_1, \dots, c_r)'$ определим из условия разрешимости уравнения (26). Затем с помощью регуляризатора Треногина (см. [22; с. 221]) построим решение x_0 неоднородного уравнения (26) с точностью до базиса

$(\phi_1, \dots, \phi_r)$ в $N(B(0))$ Аналогичным образом в силу условия (C1) можно вычислить остальные коэффициенты $x_2(z), \dots, x_N(z)$ асимптотики $\hat{x}(z)$, удовлетворяющей лемме 1. Таким образом, на основании леммы 2 теорема 2 усилится за счет ослабления условия (C).

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (B), (D), (C1), $f(0) = 0$. Тогда уравнение (3) в классе $C_{([0,T];E_1)}$ имеет параметрическое семейство решений.

Заключение. В теоремах 2, 3 важную роль играет метод построения асимптотик, использующий решения разностных уравнений. В случае одного уравнения, когда $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^1$, изложенный метод решения разностных систем совпадет с известным способом А. О. Гельфонда (см. [23; с. 338]) построения решений неоднородных разностных уравнений с полиномиальной правой частью. Таким образом, результаты функционального анализа [21], [22] позволили применить идеи этого метода в теории линейных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными операторами, действующими в банаховых пространствах. Построенный метод представляет интерес для решения ряда классов интегро-дифференциальных систем с вырождениями [12], [13], [16]. Если $f(0) \neq 0$, то уравнение (1) не будет разрешимо в классе непрерывных функций. В этом случае, используя результаты работ [14], [15], решения можно строить в классе обобщенных функций [24], см. работу [18] и монографию [25].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. В. Маркова, И. В. Сидлер, В. В. Труфанов, “О моделях развивающихся систем типа Глушкова и их приложениях в электроэнергетике”, *Автомат. и телемех.*, 2011, № 7, 20–28.
- [2] Ю. П. Яценко, *Интегральные модели систем с управляемой памятью*, Наукова думка, Киев, 1991.
- [3] N. Hritonenko, Yu. Yatsenko, *Modeling and Optimization of the Lifetime of Technologies*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [4] A. M. Denisov, A. Lorenzi, “On a special Volterra integral equation of the first kind”, *Boll. Un. Mat. Ital. B* (7), **9:2** (1995), 443–457.
- [5] Н. А. Магницкий, “Асимптотика решений интегрального уравнения Вольтерры первого рода”, *Докл. АН СССР*, **269:1** (1983), 29–32.
- [6] D. Sidorov, “Volterra equations of the first kind with discontinuous kernels in the theory of evolving systems control”, *Stud. Inform. Univ.*, **9:3** (2011), 135–146.
- [7] Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров, “О малых решениях нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности точек ветвления”, *Изв. вузов. Матем.*, 2011, № 5, 53–61.
- [8] Д. Н. Сидоров, “О разрешимости систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами”, *Изв. вузов. Матем.*, 2013, № 1, 62–72.
- [9] Д. Н. Сидоров, “О параметрических семействах решений интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-гладкими ядрами”, *Дифференц. уравнения*, **49:2** (2013), 209–215.
- [10] D. N. Sidorov, N. A. Sidorov, “Convex majorants method in the theory of nonlinear Volterra equations”, *Banach J. Math. Anal.*, **6:1** (2012), 1–10.
- [11] Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров, “Существование и построение обобщенных решений интегральных уравнений Вольтерры первого рода”, *Дифференц. уравнения*, **42:9** (2006), 1243–1247.
- [12] Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров, А. В. Красник, “О решении операторно-интегральных уравнений Вольтерры в нерегулярном случае методом последовательных приближений”, *Дифференц. уравнения*, **46:6** (2010), 874–882.

- [13] N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev, *Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [14] D. Sidorov, “On impulsive control of nonlinear dynamical systems based on the Volterra series”, *Proceedings of 10th IEEE International Conference on Environment and Electrical*, IEEE Publ., Rome, 2011.
- [15] Д. Н. Сидоров, Н. А. Сидоров, “Обобщенные решения в задаче моделирования нелинейных динамических систем полиномами Вольтерра”, *Автомат. и телемех.*, 2011, № 6, 127–132.
- [16] G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*, Inverse and Ill-Posed Problems Ser., **42**, Walter de Gruyter, Berlin, 2012.
- [17] Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров, “Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-определенным ядром в банаховом пространстве”, *Неклассические уравнения математической физики*, Сб. науч. статей, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2012.
- [18] D. N. Sidorov, “Generalized solution to the Volterra equations with piecewise continuous kernels”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2), **37**:3 (2014), 757–768.
- [19] Н. А. Сидоров, А. В. Труфанов, “Нелинейные операторные уравнения с функционально возмущенным аргументом нейтрального типа”, *Дифференц. уравнения*, **45**:12 (2009), 1804–1808.
- [20] Л. А. Эльсгольц, *Качественные методы в математическом анализе*, ГИТТЛ, М., 1955.
- [21] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969.
- [22] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Физматлит, М., 2007.
- [23] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Физматлит, М., 1959.
- [24] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Физматлит, М., 1976.
- [25] D. Sidorov, *Integral Dynamical Models. Singularities, Signals and Control*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A, **87**, World Sci., 2014.

Н. А. Сидоров

Иркутский государственный университет

Поступило

09.10.2012

Д. Н. Сидоров

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева
СО РАН, г. Иркутск

Иркутский государственный университет

Национальный исследовательский Иркутский

государственный технический университет

E-mail: contact.dns@gmail.com

Исправленный вариант

30.11.2013