Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Михалёв, И. Х. Сабитов, Изометрические вложения локально-евклидовых метрик в $\mathbb{R}^3$ в виде конических поверхностей, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 2, 234–247

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10223>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:09:34

Изометрические вложения локально-евклидовых метрик в $\mathbb{R}^3$ в виде конических поверхностей

С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов

В работе доказывается теорема о том, что если область с локально-евклидовой метрикой изометрически погружаема в евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ со стандартной метрикой, то она допускает изометрическое вложение в $\mathbb{R}^3$. Это вложение осуществляется в виде конической поверхности, проекция которой на сферу с центром в вершине конуса представляет собой некоторый планарный граф без самопересечений с достаточно гладкими ребрами со специально подобранными длинами.

Библиография: 2 названия.

DOI: 10.4213/mzm10223

1. История вопроса и формулировка основного результата. В работе [1] исследуется вопрос об изометрических вложениях и погружениях в $\mathbb{R}^3$ плоских областей, вообще говоря, многосвязных, с локально-евклидовой метрикой, а основной результат состоит в том, что если область с локально-евклидовой (далее л.-е.) метрикой изометрически погружаема в $\mathbb{R}^2$, то она допускает изометрическое вложение в $\mathbb{R}^3$. Это вложение в статье [1] осуществляется в виде цилиндрической поверхности, проекция которой на ортогональную к образующим плоскость представляет собой некоторый достаточно гладкий плоский граф. Помимо этого в статье также без доказательства утверждается, что аналогичным образом можно построить вложение в $\mathbb{R}^3$ данной области и в виде *конической* поверхности. В нашей работе мы осуществим это новое построение и дадим тем самым другое доказательство основного результата, приводя более детальное изложение некоторых доказательств из работы [1] с попутным устранением одного содержащегося в ней недочета (не влияющего, однако, на верность построения и выводов).

Сформулируем теперь основную теорему. Пусть в круговой n -связной области $\bar{D}_n$ (т.е. в круге при $n = 1$ и в ограниченной n окружностями области при $n \geq 2$) плоскости переменных (ξ, η) задана л.-е. метрика ds^2 . Без ограничения общности можно считать, что координаты (ξ, η) являются изотермическими (общий случай приводится к этому некоторым квазиконформным преобразованием, см. [2; гл. 2]). Тогда

$$ds^2 = \Lambda^2(\xi, \eta)(d\xi^2 + d\eta^2), \quad \Lambda > 0, \quad \Delta \ln \Lambda = 0. \quad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-90415-Укр_a).

Мы будем предполагать, что регулярность $\Lambda(\xi, \eta)$ в замкнутой области $\overline{D}_n$ такова, что единственное (с точностью до движения в $\mathbb{R}^2$) отображение

$$z = x + iy = \Phi(\zeta), \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

приводящее (1) к стандартному виду $ds^2 = dx^2 + dy^2$, имеет в $\overline{D}_n$ гладкость класса C^m , $m \geq 1$. Напомним, что отображение $\Phi(\zeta)$ является локально-конформным и определяется через $\Lambda(\zeta)$ соотношением $|\Phi'(\zeta)| = \Lambda(\zeta)$; следовательно, если, в частности, $\Lambda \in C^{m,\alpha}$, $m \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, то

$$\Phi(\zeta) \in C^{m+1,\alpha}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть отображение $z = \Phi(\zeta)$ является в $\overline{D}_n$ однозначным (т.е. $\overline{D}_n$ с метрикой (1) изометрически погружается в $\mathbb{R}^2$). Тогда область $\overline{D}_n$ с метрикой (1) можно вложить в $\mathbb{R}^3$ в виде разветвляющейся поверхности гладкости C^∞ в D_n и гладкости C^m в $\overline{D}_n$.

2. Вспомогательные утверждения. В работе [1] доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть на плоскости (x, y) заданы $n \geq 1$ замкнутых кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ гладкости C^2 (возможно с самопересечениями или с самоналожениями). Тогда для любого направления на плоскости можно указать сколь угодно близкое к нему направление $e = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ такое, что если какая-нибудь параллельная e прямая l касается $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$, то точка касания M на l единственна и любая дуга из Γ , касающаяся l в M , имеет в точке M отличную от нуля кривизну.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Точка M может принадлежать нескольким дугам на кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Утверждается, что она единственна как точка плоскости, а не как точка кривой Γ . Например, на дважды покрытой окружности Γ каждая касательная касается Γ в двух точках, совпадающих, однако, как точки плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в условиях леммы 1 существует лишь конечное число прямых, параллельных e и касающихся Γ . В самом деле, если бы таких прямых было бесконечно много, в силу компактности Γ множество точек касания имело бы некоторую точку сгущения $P_0 \in \Gamma$, в которой касательная к Γ была бы параллельна e , а кривизна была бы равна нулю, что противоречит выбору направления e .

Ниже мы докажем (с использованием леммы 1) другое утверждение, которое в работе [1] формулируется без доказательства:

ЛЕММА 2. Пусть на плоскости заданы $n \geq 1$ замкнутых кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ гладкости C^2 . Тогда для любой точки M_0 на плоскости и любой круговой окрестности U_0 точки M_0 можно указать точку $M_1 \in U_0$ такую, что если прямая l , проходящая через M_1 , касается $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$, то точка касания M на l единственна и любая дуга из Γ , касающаяся l в M , имеет в точке M отличную от нуля кривизну.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $M_0 \notin \Gamma$ (иначе будем проводить рассуждение не для пары M_0, U_0 , а для пары $\widehat{M}_0, \widetilde{U}_0$, где $\widehat{M}_0 \in U_0 \setminus \Gamma$, а $\widetilde{U}_0$ – некоторая круговая окрестность точки $\widehat{M}_0$, целиком содержащаяся в $U_0 \setminus \Gamma$).

Возьмем некоторое направление e , обладающее свойством, описанным в лемме 1. Проведем через точку M_0 прямую l , параллельную e . Будем считать, что система координат (x, y) выбрана так, что прямая l совпадает с осью OX .

Согласно замечанию 2, если мы проведем всевозможные касательные к Γ , параллельные прямой l , общее число точек касания будет конечным. Сама же прямая l , в чем легко убедиться аналогичным рассуждением, либо вообще не имеет общих точек с Γ , либо число общих с Γ точек конечно. Кроме того, отметим, что прямая l касается Γ не более чем в одной точке (и кривизна в этой точке отлична от нуля). Пусть $V_0 \subset \Gamma$ – множество, состоящее из точек, в которых всевозможные прямые, параллельные l , касаются Γ , и всех точек пересечения l и Γ ; множество V_0 – конечный набор точек на Γ .

Рассмотрим отображение $f: \Gamma \setminus V_0 \rightarrow l$, ставящее в соответствие точке $P \in \Gamma \setminus V_0$ точку M пересечения касательной к Γ в точке P с прямой l . Без ограничения общности можно считать, что заданная в условии леммы точка $M_0 \in l$ лежит в образе $f(\Gamma \setminus V_0)$ (в противном случае любая касательная к Γ , проведенная из точки M_0 , должна была бы быть параллельна прямой l ; так бывает, только если либо $M_0 \in \Gamma$, но этот случай мы исключили в самом начале доказательства, либо когда $M_0 \notin \Gamma$, но из точки M_0 нельзя провести *ни одной* касательной – в этом случае в качестве искомой точки M_1 можно взять саму точку M_0).

Рассмотрим для каждой точки $P_i \in V_0$ некоторую содержащую ее открытую дугу $d_i \subset \Gamma$. Множество $K = \Gamma \setminus \bigcup_i d_i$ замкнуто в Γ и, следовательно, компактно в Γ . Будем считать, что дуги d_i (число их конечно) настолько малы, что $U_0 \cap l \subset f(K)$ (при необходимости перейдем к рассмотрению меньшей круговой окрестности $\tilde{U}_0 \subset U_0$).

Множество $K_0 \subset K$ точек компакта $K \subset \Gamma$, в которых кривизна равна нулю, замкнуто, следовательно, образ $f(K_0)$ этого множества при непрерывном отображении f также замкнут (здесь мы учитываем компактность K). Легко убедиться в том, что отображение f нерегулярно в точности в тех точках, где кривизна равна нулю. Применяя теорему Сарда, заключаем, что мера множества $f(K_0)$ в l равна нулю. Таким образом, множество $E = f(K) \setminus f(K_0)$ есть открытое множество полной меры в $f(K)$. Кроме того, поскольку $U_0 \cap l \subset f(K)$, множество $E \cap U_0$ открыто в l . Покажем, что множество точек $M \in E \cap U_0$ таких, что хотя бы одна прямая, проходящая через точку M , касается Γ более чем в одной точке, не более чем счетно, а значит, также имеет линейную меру нуль.

Рассмотрим на прямой $l = OX$ произвольную точку $M = (p, 0) \in E \cap U_0$. Произвольная прямая L , проходящая через точку M , имеет уравнение

$$\begin{aligned} x &= p + t \cos \varphi, \\ y &= t \sin \varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

Нас будут интересовать всевозможные касательные к Γ , проведенные из точки M ; у таких прямых $\sin \varphi \neq 0$. Исключение дает только случай, когда сама прямая l касается Γ , но мы уже знаем, что при этом точка касания единственна и кривизна в ней отлична от нуля, следовательно, наличие этой “дополнительной” касательной не влияет на то, “хорошей” или “плохой” является рассматриваемая точка M (“плохой” мы условимся называть такую точку $M = (p, 0) \in E \cap U_0$, что хотя бы одна прямая, проходящая через M , касается Γ более чем в одной точке). Пусть L касается Γ в двух различных точках P_1 и P_2 , принадлежащих кривым Γ_i и Γ_j (возможно,

$i = j$). Параметризуем эти кривые соответственно в окрестностях точек P_1 и P_2 дугами s и σ , и пусть

$$x = x_i(s), \quad y = y_i(s), \quad x = x_j(\sigma), \quad y = y_j(\sigma)$$

– уравнения кривых Γ_i и Γ_j в окрестности P_1 и P_2 . Тогда условие касания L с Γ_i и Γ_j приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} p + t_1 \cos \varphi &= x_i(s), & t_1 \sin \varphi &= y_i(s), \\ x'_i(s) &= \pm \cos \varphi, & y'_i(s) &= \pm \sin \varphi, \\ p + t_2 \cos \varphi &= x_j(\sigma), & t_2 \sin \varphi &= y_j(\sigma), \\ x'_j(\sigma) &= \pm \cos \varphi, & y'_j(\sigma) &= \pm \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть для определенности ориентированные направления касательных к Γ_i и Γ_j равны $(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Покажем, что множество точек (p, φ) , определяющее L и удовлетворяющее (3) при некоторых значениях i, j, s, σ изолировано в множестве $(-\infty < p < +\infty) \times (0 < \varphi < \pi)$ (в обычной топологии плоскости (p, φ)). Из (3) имеем

$$x'_i(s) = x'_j(\sigma) \quad (= \pm \cos \varphi), \quad (4)$$

$$y'_i(s) = y'_j(\sigma) \quad (= \pm \sin \varphi), \quad (5)$$

$$x_i(s) - \frac{y_i(s)}{y'_i(s)} x'_i(s) = x_j(\sigma) - \frac{y_j(\sigma)}{y'_j(\sigma)} x'_j(\sigma) \quad (= p). \quad (6)$$

Рассмотрим уравнения (4)–(6) как систему относительно s и σ . Пусть (s_0, σ_0) – решение этой системы. Так как точка $M \in E$, то $x''_j(\sigma_0) + y''_j(\sigma_0) \neq 0$ (из условия, что кривизна $k_j(\sigma_0) \neq 0$); скажем, $x''_j(\sigma_0) \neq 0$. Тогда из (4) находим единственную неявную гладкую функцию

$$\sigma = \sigma(s), \quad s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon), \quad \sigma(s_0) = \sigma_0, \quad \sigma'(s_0) = \frac{x''_i(s_0)}{x''_j(\sigma_0)}.$$

Если уравнения (3)–(6) выполнены для некоторого множества точек $(s, \sigma(s))$ с предельной точкой $(s_0, \sigma(s_0))$, то, дифференцируя (5) и (6) в точках s_0 и $\sigma_0 = \sigma(s_0)$ с учетом (3), получаем

$$\begin{aligned} x''_j(\sigma_0) y''_i(s_0) &= y''_j(\sigma_0) x''_i(s_0), \\ (x_i(s_0) - x_j(\sigma_0)) y''_j(\sigma_0) &= (y_i(s_0) - y_j(\sigma_0)) x''_j(\sigma_0) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Вместе с (6) последнее уравнение дает систему относительно

$$x_i(s_0) - x_j(\sigma_0), \quad y_i(s_0) - y_j(\sigma_0),$$

которая имеет единственное – нулевое – решение в силу отличия от нуля кривизны Γ_j в точке $\sigma_0 = \sigma(s_0)$, т.е.

$$x_i(s_0) = x_j(\sigma_0), \quad y_i(s_0) = y_j(\sigma_0), \quad P_1 = P_2.$$

Отметим, что поскольку множество $E \cap U_0$ открыто в l , то для данной точки $M = (p, 0) \in E \cap U_0$ существует целый прямоугольник $(p_1 < p < p_2) \times (0 < \varphi < \pi)$,

состоящий из пар $\{p, \varphi\}$, каждая из которых определяет прямую, которая либо не касается Γ , либо касается в точке(-ах) с $k \neq 0$. Приведенное выше рассуждение, таким образом, показывает, что всякой прямой, касающейся Γ более чем в одной точке и проходящей через точку $M = (p_0, 0) \in E \cap U_0$, на плоскости $\{p, \varphi\}$ отвечает пара $\{p_0, \varphi_0\}$, у которой есть проколота круговая окрестность, состоящая из пар $\{p, \varphi\}$, каждая из которых удовлетворяет одновременно двум условиям:

(1) точка $(p, 0) \in E \cap U_0$;

(2) прямая, соответствующая паре $\{p, \varphi\}$ касается Γ не более чем в одной точке.

Все эти проколотые окрестности можно выбрать дизъюнктными. Любая система непересекающихся круговых окрестностей на плоскости не более чем счетна (в каждом круге можно выбрать по точке с рациональными координатами). Следовательно, не более чем счетным является множество центров этих кругов, а значит, и множество $Y \subset E \cap U_0$ значений p_0 , для которых существует пара $\{p_0, \varphi\}$ такая, что соответствующая прямая касается Γ более чем в одной точке. Тем самым доказано, что множество $f(K_0) \cup Y$ имеет линейную меру нуль, откуда и следует справедливость леммы.

Лемма 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Наше доказательство леммы 2 проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 1 в работе [1]. Однако в [1] не дается пояснений, почему из изолированности точки (s_0, σ_0) действительно следует существование направления $e = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ с нужными свойствами. Ключевым соображением здесь должно служить то обстоятельство, что множество E , возникающее в ходе доказательства леммы 1, как и в нашем доказательстве леммы 2, является открытым. (Оба доказательства имеют дело с пространством пар $\{p, \varphi\}$, каждая из которых отвечает некоторой прямой на плоскости (x, y) ; рассматривается плоскость с координатами (p, φ) . В лемме 2 “хорошее” множество E располагается на оси $\varphi = 0$, в то время как в лемме 1 “хорошее” множество E располагается на оси $p = 0$. В обоих случаях заключение о свойствах множества E делаем по одной и той же схеме.)

3. Доказательство теоремы. Приступим к доказательству теоремы 1 в случае гладкости $\Phi(\zeta)$ класса C^m , $m \geq 2$. Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – образы окружностей, составляющих границу области D_n , при погружении $\Phi: \bar{D}_n \rightarrow \mathbb{R}^2$. Применяя лемму 2, выберем точку M_0 такую, что любой луч в $\mathbb{R}^2$ с началом в точке M_0 или нигде не касается $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$, или касается Γ только в одной точке. Выберем в $\mathbb{R}^2$ декартову систему координат (x, y) с началом в точке M_0 . Будем также рассматривать совмещенную полярную систему координат (ρ, θ) с центром в точке M_0 . Тогда лучи $\theta = \text{const}$ могут касаться Γ только в одной точке, а общее число точек касания, очевидно, будет конечным. Можно считать, что система координат выбрана таким образом, что Γ целиком располагается в области $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ (в этом случае $\theta = \arg \Phi(\zeta) = \arctan(y/x)$); более того, можно считать, что точка M_0 выбрана столь “далеко”, что Γ целиком располагается в области $-\pi/2 < -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 < \pi/2$, для произвольного наперед заданного “малого” числа θ_0 . Пусть Γ целиком помещается в некоторый круг радиуса R_0 . Будем считать, что точка M_0 выбрана так, что расстояние d от M_0 до Γ удовлетворяет условию $d \geq 10R_0$.

Вообще говоря, нас интересует случай, когда отображение $z = \Phi(\zeta)$ многолистно (так как однолистность $\Phi(\zeta)$ означает, что отображение $z = x + iy = \Phi(\zeta)$ уже является вложением D_n в $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$), но приводимая ниже конструкция пригодна также

и для случая однолистного отображения $z = \Phi(\zeta)$. Проведем в D_n через каждую точку $\zeta_0 \in D_n$ геодезическую $\gamma(\zeta_0)$ под углом $\alpha = \arg \Phi(\zeta_0) - \arg \Phi'(\zeta_0)$ к оси $O\xi$. Функция $\Phi'(\zeta)$ однозначна в D_n и не равна нулю, поэтому направление такой геодезической в точке ζ_0 определено корректно. Угол α выбран так, что геодезическая $\gamma(\zeta_0)$ при отображении $z = \Phi(\zeta)$ переходит в отрезок луча $\theta = \text{const} = \arg \Phi(\zeta_0)$. Легко проверить, что вдоль такой геодезической отображение $z = \Phi(\zeta)$ однолистно (координата $\theta = \text{const}$, а координата ρ монотонна). Поэтому каждая такая геодезическая является аналитической простой дугой со следующими возможностями:

- или она нигде не касается ∂D_n , и поэтому вся геодезическая лежит внутри D_n , за исключением двух концевых точек на ∂D_n ;
- или же она имеет с ∂D_n одну точку касания, и тогда вся геодезическая представляет собой дугу с двумя концевыми точками на ∂D_n , разбиваемую точкой касания с ∂D_n на две “половинки” (в концевых точках все геодезические трансверсальны к ∂D_n).

Далее, в силу единственности геодезической с данным направлением в данной точке никакие две геодезические из рассматриваемого семейства γ не пересекаются. В итоге получаем, что вся область D_n “расслаивается” на геодезические семейства γ , причем образ каждой геодезической в D_n есть отрезок луча $\theta = \text{const}$.

Среди геодезических семейства γ особое значение имеют геодезические, касающиеся ∂D_n . Такие геодезические будем называть *межевыми*. Точки их касания с ∂D_n соответствуют точкам локального экстремума функции $\theta = \arg \Phi(\zeta)$. Пусть N – общее число точек локального экстремума $\arg \Phi(\zeta)$ на ∂D_n (это число N конечно в силу первоначального выбора точки M_0 в $\mathbb{R}^2$; по этой же причине все экстремумы строгие). Пусть из них в $N_1 \geq 2$ точках экстремум по ∂D_n является также локальным экстремумом по области, а в $N_2 = N - N_1$ точках экстремум достигается только вдоль ∂D_n . Эти точки будем называть *экстремальными точками* соответственно *первого* и *второго классов*. Через экстремальные точки первого класса в ∂D_n не проходит никакая геодезическая семейства γ (она вырождается в точку); через каждую экстремальную точку второго класса проходит межевая геодезическая. Таким образом, число межевых геодезических равно N_2 .

Все межевые геодезические и экстремальные точки первого класса разбивают D_n на конечное число областей Ω_j . Эти области бывают двух типов:

- 1) область Ω_j – криволинейный треугольник, ограниченный дугой (всей или “половиной”) межевой геодезической и двумя дугами из ∂D_n , исходящими из точки экстремума первого класса;
- 2) область Ω_j – криволинейный четырехугольник, ограниченный двумя “противоположными” дугами – частями ∂D_n – и двумя дугами двух межевых геодезических.

На плоскости (ρ, θ) области Ω_j первого типа при отображении $z = \Phi(\zeta)$ соответствует область, ограниченная линиями вида

$$\begin{aligned} \theta = \text{const} = c_1, \quad \rho = f_1(\theta), \quad \rho = f_2(\theta), \\ f_1(\theta) < f_2(\theta), \quad c_1 \leq \theta < c_2, \quad f_1(c_2) = f_2(c_2) \end{aligned}$$

(если значению $\theta = c_2$ на ∂D_n соответствует точка локального максимума первого класса) или же

$$\begin{aligned} \theta = \text{const} = c_2, \quad \rho = f_1(\theta), \quad \rho = f_2(\theta), \\ f_1(\theta) < f_2(\theta), \quad c_1 < \theta \leq c_2, \quad f_1(c_1) = f_2(c_1) \end{aligned}$$

(если значению $\theta = c_1$ на ∂D_n соответствует точка локального минимума первого класса). Области Ω_j второго типа на плоскости (ρ, θ) соответствует область, ограниченная линиями вида

$$\begin{aligned} \theta = \text{const} = c_1, \quad \theta = \text{const} = c_2, \quad \rho = f_1(\theta), \quad \rho = f_2(\theta), \\ f_1(\theta) < f_2(\theta), \quad c_1 \leq \theta \leq c_2. \end{aligned}$$

На рис. 1 изображены области $\omega_j = \Phi(\Omega_j)$, заштрихованные разным способом; звездочкой обозначены точки экстремума первого класса, жирно обозначены точки экстремума второго класса. Для простоты изображен случай без самоналожения.

Каждая область $\omega_j = \Phi(\Omega_j)$ состоит из отрезков $\theta = \text{const}$ с монотонным изменением const от некоторого значения c_1 до некоторого значения c_2 , и вдоль каждого отрезка $\theta = \text{const}$ отображение $z = \Phi(\zeta)$ однолистно. Поэтому в каждой замкнутой области Ω_j отображение $z = \Phi(\zeta)$ однолистно в целом.

Каждая экстремальная точка второго класса является общей граничной точкой трех областей Ω_j , а каждая экстремальная точка первого класса принадлежит границе только одной области Ω_j . Поэтому число областей Ω_j первого типа равно N_1 , а второго типа – $(3N_2 - N_1)/2$, а число всех областей будет равно $(N_1 + 3N_2)/2$.

Теперь покажем, что каждую область Ω_j можно изометрически вложить в $\mathbb{R}^3$ в виде конической поверхности, причем так, что в целом для D_n получится вложение. В случае односвязной области дело обстоит просто: достаточно строить вложения областей Ω_j последовательным образом, с регулярной стыковкой по одной образующей. В случае многосвязной области вложения Ω_j приходится согласовывать более сложным образом: начав вложение с какой-либо области вида Ω_j , прилегающей к внутренней (для D_n) окружности Γ_i , после обхода Γ_i нам придется согласовывать вложение “последней” области вида Ω_j как с ее “предпоследним” соседом, так и с уже вложенной “первой” областью. Приведем конструкцию, которая покажет, что этот процесс согласования вполне осуществим.

Отметим в D_n все N точек экстремумов первого и второго классов. На границе каждой области Ω_j имеются две такие точки: если область первого типа, то одна из этих точек – точка первого класса, другая – второго класса, а в области второго типа обе эти точки из второго класса. Соединим эти точки простой жордановой дугой в Ω_j . В итоге получим граф, вершины которого – отмеченные N точек локального экстремума функции $\theta = \arg \Phi(\zeta)$ на ∂D_n , а ребра – построенные в каждой области Ω_j жордановы дуги. Поскольку области Ω_j не перекрываются друг с другом, то и ребра пересекаются только в вершинах. Из вершин, соответствующих экстремальным точкам первого класса, исходит только одно ребро, а из вершин второго класса исходят три ребра. В случае односвязной области D_1 граф G не содержит циклов, а в случае многосвязной области D_n , $n \geq 2$, в графе будет ровно $n - 1$ независимых циклов. Отметим, что граф G не может содержать петель, но может содержать двойные ребра (очевидно, ребер кратности 3 и выше уже быть не может). Например, на рис. 1 вершины второго класса A и B в графе G будут соединены двойным

ребром. Из каждой вершины исходит не более одного двойного ребра, так как степени вершин графа равны 1 или 3. Отметим, что в работе [1] построение ведется в (неявном) предположении, что у графа все ребра простые, но, как показывает наше дальнейшее построение, это упущение не является существенным.

Рис. 1

Введем в пространстве $\mathbb{R}^3$ сферические координаты (r, φ, ψ) , $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$ и рассмотрим сферу $r = R$, где $R = 2d$, а d – определенное ранее выбором точки M_0 расстояние от M_0 до Γ . Далее мы построим на сфере $r = R$ некоторую реализацию графа G , которая станет (центральной) проекцией на эту сферу искомой конической поверхности (с вершиной в точке $r = 0$).

Прежде чем строить реализацию графа на сфере $r = R$, рассмотрим в точке $\varphi = 0$, $\psi = 0$ касательную к этой сфере плоскость π_0 и построим реализацию графа G на этой плоскости. Пусть $G^1 \subset G$ – граф, получаемый из графа G исключением повторяющихся ребер. Таким образом, граф G^1 по построению не имеет двойных ребер. Рассмотрим в плоскости π_0 граф G_ε^1 , изоморфный графу G^1 , не имеющий самопересечений, с прямолинейными ребрами длиной не больше ε (конкретизация величины $\varepsilon > 0$ будет сделана несколько позже). Рассмотрим граф $G_\varepsilon \supset G_\varepsilon^1$, полученный из G_ε^1 “восстановлением” двойных ребер. Итак, G_ε – реализация графа G на плоскости в виде графа с прямолинейными ребрами длиной не больше ε , не имеющая самопересечений (за исключением, возможно, одного или нескольких двойных ребер).

Пусть δ – наименьшее расстояние между вершинами построенного графа G_ε ; положим $t = \min(\delta, \varepsilon/2)$. Опишем вокруг каждой вершины A_i второго класса два концентрических круга радиусов $t/4$ и $t/8$ соответственно. Введем для этих кругов обозначения $K_{t/4}^i$ и $K_{t/8}^i$ соответственно. Число t выбрано так, что круги $K_{t/4}^i$, соответствующие разным вершинам, не пересекаются. Назовем h -трубкой ребра $A_i A_j \subset G_\varepsilon$ множество

$$U_{ij}^h = \{M \in R^2 \mid \text{dist}(M, A_i A_j) \leq h\}.$$

Подберем такое $h = h(t)$, чтобы h -трубки, соответствующие ребрам, исходящим из одной вершины A_i , пересекались только в пределах круга $K_{t/4}^i$ (либо целиком

совпадали – в случае двойного ребра), а h -трубки, соответствующие ребрам, не имеющим общих вершин, не пересекались бы вовсе.

Теперь заметим, что из трех областей вида Ω_j , примыкающих к любой вершине M второго класса (независимо от того, исходит из M двойное ребро или нет), одна область содержит в качестве части границы всю межевую геодезическую, проходящую через точку M на ∂D_n (а именно, та область Ω_j , которая не содержит дугу окружности из ∂D_n , проходящую через M), а две другие содержат на своей границе по одной “половинке” межевой геодезической, на которые она разбивается точкой касания с ∂D_n . Первую область назовем “большой”, а две остальные – “малыми” областями.

Изменим теперь граф G_ε следующим образом (см. рис. 2).

Рис. 2

Пусть сначала вершина A_i не является концом никакого двойного ребра. В кругах $K_{t/8}^i$ и $K_{t/4}^i$ ребра, исходящие из A_i , образуют три радиуса $A_i C_1^i$, $A_i C_2^i$, $A_i C_3^i$. Пусть $A_i C_1^i$ – радиус в $K_{t/4}^i$ и $A_i B_1^i \subset A_i C_1^i$ – радиус в $K_{t/8}^i$, соответствующие “большой” области вида Ω_j , примыкающей к A_i ; $A_i C_2^i$, $A_i B_2^i \subset A_i C_2^i$ и $A_i C_3^i$, $A_i B_3^i \subset A_i C_3^i$ имеют соответствующий смысл для “малых” областей вида Ω_j , примыкающих к A_i . Продолжаем радиус $B_1^i A_i$ до диаметра $B_1^i A_i B_0^i$ круга $K_{t/8}^i$, а в других двух ребрах, исходящих из A_i , заменим их части – радиусы $A_i C_2^i$ и $A_i C_3^i$ – отрезком $A_i B_0^i$ – продолжением $B_1^i A_i$ до диаметра и C^∞ -гладко примыкающими к $A_i B_0^i$ (в точке B_0^i), к $A_i C_2^i$ (в точке C_2^i) и к $A_i C_3^i$ (в точке C_3^i) жордановыми дугами $B_0^i C_2^i$ и $B_0^i C_3^i$, расположенными в кольце $K_{t/4}^i \setminus K_{t/8}^i$ и непересекающимися между собой.

До сих пор мы меняли граф только в пределах непересекающихся круговых окрестностях $K_{t/4}^i$ вершин второго класса, не принадлежащих двойным ребрам. Сейчас последует еще одно изменение: теперь граф будет меняться в таких же круговых окрестностях остальных вершин второго класса и в h -трубках соответствующих двойных ребер.

Пусть $A_i A_j$ – двойное ребро графа G_ε (см. рис. 3). В кругах $K_{t/8}^i$ и $K_{t/4}^i$ ребра, исходящие из A_i , образуют три радиуса, два из которых накладываются друг на друга. Снова пусть $A_i C_1^i$ – радиус в $K_{t/4}^i$ и $A_i B_1^i \subset A_i C_1^i$ – радиус в $K_{t/8}^i$, соответствующие “большой” области вида Ω_j , примыкающей к A_i ; отрезки $A_i C_1^i$, $A_i B_1^i \subset A_i C_1^i$ – дважды покрыты, и копии имеют соответствующий смысл для “малых” областей

вида Ω_j , примыкающих к A_i . Аналогичным образом устроен граф и в окрестности вершины A_j .

Рис. 3

Граница h -трубки ребра $A_i A_j$ состоит из двух полуокружностей радиуса h и двух прямолинейных отрезков $A'_i A'_j$ и $A''_i A''_j$. Пусть C_2^i и C_3^i – точки пересечения отрезков $A'_i A'_j$ и $A''_i A''_j$ соответственно с кругом $K_{t/4}^i$, а D_2^j и D_3^j – точки пересечения отрезков $A'_i A'_j$ и $A''_i A''_j$ соответственно с кругом $K_{t/4}^j$. Заменим часть ребра $A_i A_j$, находящуюся вне кругов $K_{t/4}^i$ и $K_{t/4}^j$, на отрезки $C_2^i D_2^j$ и $C_3^i D_3^j$. После этого в каждом из колец $K_{t/4}^i \setminus K_{t/8}^i$ и $K_{t/4}^j \setminus K_{t/8}^j$ проводим построение, полностью аналогичное уже описанному ранее: так в кольце $K_{t/4}^i \setminus K_{t/8}^i$ мы C^∞ -гладко сопрягаем в точках C_2^i , C_3^i и B_0^i соответствующие прямолинейные отрезки с помощью жордановых дуг, целиком лежащих в кольце $K_{t/4}^i \setminus K_{t/8}^i$ и непересекающимися между собой.

В результате получим новый граф G'_ϵ , в котором ребра являются C^∞ -гладкими жордановыми дугами без самопересечения, причем ребро, соответствующее “большой” области Ω_j , прилегающей к рассматриваемой точке второго класса, C^∞ -гладко (и даже аналитически) примыкает к двум другим ребрам, исходящим из этой же точки и соответствующим “малым” областям вида Ω_j . Вне кругов $K_{t/4}^i$ все ребра графа G'_ϵ по-прежнему являются отрезками прямых.

Напомним, построение графа G'_ϵ велось в плоскости π_0 – касательной плоскости к сфере $r = R$ в точке $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Пусть G_s – стереографическая проекция графа G'_ϵ на сферу $r = R$ (центр проектирования совпадает с центром сферы). Новый граф G_s унаследует все свойства G'_ϵ : его ребра по-прежнему являются C^∞ -гладкими жордановыми дугами без самопересечения, соответствующие пары ребер гладко примыкают друг к другу. Прямолинейным участкам ребер графа G'_ϵ на плоскости (отрезкам) соответствуют отрезки кривых – дуг больших кругов на сфере. Обозначим наименьшее расстояние в метрике сферы между этими отрезками дуг через λ .

Вложение каждой области $\Omega_j \subset D_n$ в $\mathbb{R}^3$ осуществляется теперь таким образом. Возьмем в графе G_s ребро $A_i A_j$, соответствующее области Ω_j . Пусть его уравнение $r = R$, $\varphi = \varphi_j(\tau)$, $\psi = \psi_j(\tau)$ (относительно параметра τ , “натурального” в том смысле, что $R \cdot d\tau$ – элемент длины на сфере $r = R$). Области Ω_j на плоскости (ρ, θ) при отображении $z = \Phi(\zeta)$ соответствует область, лежащая между лучами $\theta = c_1^j$,

$\theta = c_2^j$, $c_1^j < c_2^j$ и кривыми вида $\rho = f_1^j(\theta)$, $\rho = f_2^j(\theta)$, $c_1^j < \theta < c_2^j$. Если длина ребра $\varphi = \varphi_j(\tau)$, $\psi = \psi_j(\tau)$ в графе G_s на сфере равна $R \cdot (c_2^j - c_1^j)$, то это ребро мы больше не изменяем, если же длина этого ребра меньше $R \cdot (c_2^j - c_1^j)$, то изменяем это ребро на “прямолинейном” участке l (дуге большого круга) так, чтобы ребро осталось C^∞ -гладким, не удалялось от l больше чем на $\lambda/4$ и чтобы длина всего ребра равнялась $R \cdot (c_2^j - c_1^j)$ (выбором ε мы распорядимся так, чтобы для каждого j длина соответствующего ребра не была больше чем $R \cdot (c_2^j - c_1^j)$). Пусть за новым графом и новыми ребрами в нем остались прежние обозначения – G_s и $\varphi = \varphi_j(\tau)$, $\psi = \psi_j(\tau)$, $0 \leq \tau \leq c_2^j - c_1^j$. Тогда вложение области Ω_j в $\mathbb{R}^3$ определим следующими соотношениями:

$$r = \rho(\zeta), \quad \varphi = \varphi_j(\tau), \quad \tau = \theta(\zeta) - c_1^j, \quad \psi = \psi(\tau), \quad (8)$$

считая, что точка $\varphi_j(0)$, $\psi_j(0)$ соответствует точке на ∂D_n с $\theta = \arg \Phi(\zeta) = c_1^j$. По построению весь граф G_s – проекция на сферу $r = R$ указанного погружения D_n в $\mathbb{R}^3$ – не имеет самопересечений, откуда следует, что построенное отображение в целом является вложением. Кроме того, легко проверить, что во внутренних точках это отображение будет класса гладкости C^∞ , а граничные кривые имеют ту же гладкость, что и отображение $\Phi(\zeta)$ в $\overline{D}_n$ (или гладкость C^∞ , если $\Phi(\zeta)$ аналитическая). Таким образом, в классе C^m , $m \geq 2$, теорема доказана.

В случае $\Phi(\zeta) \in C^1$ поступаем следующим образом. Возьмем произвольную точку $\zeta_0 \in \partial D_n$; пусть (x_0, y_0) – ее образ в $\mathbb{R}^2$ при погружении $z = \Phi(\zeta)$. Пусть $x(s)$, $y(s)$ – уравнение дуги границы $\partial\{\Phi(D_n)\}$ в окрестности точки (x_0, y_0) . Эта граница является локально жордановой и гладкой; поэтому дуга, проходящая через точку (x_0, y_0) , разделяет достаточно малый круг с центром в (x_0, y_0) на две части, C^1 -диффеоморфные полукругу, так, что в одной части лежат точки из образа $\Phi(D_n)$, в другой таких точек из окрестности ζ_0 нет (полезно иметь в виду, что рассматриваемая дуга однозначно проектируется на свою касательную при достаточно малых ее размерах). Поэтому мы можем расширить образ $\Phi(D_n)$ в плоскости (x, y) , добавив к каждой точке из $\partial\{\Phi(D_n)\}$ тот полукруг, в котором раньше не было точек из образа $\Phi(D_n)$. Так как $\Phi'(\zeta) \neq 0$ в $\overline{D}_n$ и ∂D_n компактна, то такое расширение можно сделать добавлением конечного числа полукругов так, что вся прежняя граница окажется внутренней кривой. После этого уже нетрудно провести кривую класса C^∞ , для которой есть направление l с требуемым свойством касания с границей в конечном числе точек, лежащих не более чем по одной на касательной к границе прямой. Тем самым мы получаем вложение данной области D_n как часть вложения более широкой области. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В конкретных случаях нет необходимости строить граф G_s обязательно по общей схеме, описанной при доказательстве теоремы 1. Само расположение межевых геодезических в D_n иногда подсказывает вид графа G_s ; важно лишь, чтобы ребро, соответствующее “большой” области, с желательной нам гладкостью стыковалось с ребрами, соответствующими соседним с этой “большой” областью “малым” областям.

4. Пример. Рассмотрим в кольце $\overline{D}_2$: $r_0 \leq |\zeta| \leq R_0$ метрику

$$ds^2 = 4(\xi^2 + \eta^2)(d\xi^2 + d\eta^2).$$

Ее погружение в $\mathbb{R}^2$ дается отображением $z = \Phi(\zeta) = d + \zeta^2$ (d – произвольное действительное число), и образ при погружении представляет собой дважды покрытое кольцо $r_1 \leq |z - d| \leq R_1$, $r_1 = r_0^2$, $R_1 = R_0^2$ (см. рис. 4).

Рис. 4

Мы, как и раньше, рассматриваем наряду с декартовыми координатами (x, y) , $z = x + iy$, полярные координаты (ρ, θ) . Лучам $\theta = \pm\theta_1$, касающимся окружности $|z| = r_1$ (θ_1 находим из условий $\sin \theta_1 = r_1/d$, $0 < \theta_1 < \pi/2$), соответствуют четыре межвые геодезические $2\xi\eta = \pm(\xi^2 - \eta^2 + d) \operatorname{tg} \theta_1$ (гиперболы). Как обычно, экстремальные точки первого класса мы обозначаем звездочкой, а второго класса – жирной точкой (см. рис. 4).

Граф G_s на сфере берем в виде “астроиды с усами” (на рис. 5 слева изображен граф G_s при взгляде со стороны оси OX , а справа изображена одна из дуг “астроиды” (A_1A_2) на трехмерной картинке). Однако наша задача состоит не только в том, чтобы подобрать граф с нужной топологией, ребра которого сопрягались бы друг с другом с нужной гладкостью: нужно еще добиться того, чтобы выбранный граф на сфере допускал натуральную параметризацию и имел нужные длины ребер. Опишем соответствующую конструкцию для одной из дуг “астроиды” (для “усов”, которые являются отрезками дуг экватора и меридиана, аналогичная задача решается совсем просто, и мы на этом не останавливаемся).

Пусть $0 < \alpha < \pi/2$. Окружность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x \cos \alpha + (y + z) \sin \alpha = 1 \end{cases} \quad (9)$$

обладает следующими свойствами:

- 1) проходит через точки $A_1(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ и $A_2(\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$ (см. рис. 5);
- 2) касается вектора $\bar{e}_1 = \{-\sin \alpha, \cos \alpha, 0\}$ в точке A_1 и вектора $\bar{e}_2 = \{-\sin \alpha, 0, \cos \alpha\}$ в точке A_2 ;
- 3) имеет радиус $R = \sin \alpha / \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$;
- 4) имеет центр в точке

$$M_0 \left(\frac{\cos \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}, \frac{\sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}, \frac{\sin \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} \right);$$

Рис. 5

5) $\angle A_1 M_0 A_2 = 2\beta$, где

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha, \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}.$$

Отметим, что величины β и R явно выражаются через α . Можно проверить, что функция $R(\alpha)\beta(\alpha)$ монотонно возрастает при $0 < \alpha < \pi/2$. В дальнейшем предполагаем, что $\alpha = \alpha_0$, где α_0 – единственный корень уравнения $R(\alpha)\beta(\alpha) = \theta_1$.

Возьмем в качестве параметра τ величину угла $A_1 M_0 A$, где $A = A(\tau)$ – точка на дуге $A_1 A_2$ окружности (9) равна $2R\beta$ ($= 2\theta_1$), и при $\tau \in [-R\beta, R\beta]$ следующие уравнения дают натуральную параметризацию этой дуги:

$$\begin{cases} x(\tau) = \frac{R^2}{\sin \alpha} \cdot \left(\sqrt{2} \sin \alpha \cos \frac{\tau}{R} + \cot \alpha \right), \\ y(\tau) = \frac{R^2}{\sin \alpha} \cdot \left(1 - \cos \left(\frac{\tau}{R} - \beta \right) \right), \\ z(\tau) = \frac{R^2}{\sin \alpha} \cdot \left(1 - \cos \left(\frac{\tau}{R} + \beta \right) \right). \end{cases} \quad (10)$$

Перейдем в уравнениях (10) к сферическим координатам (r, φ, ψ) , $-\pi < \varphi \leq \pi$, $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$. Поскольку наша кривая расположена в первом октанте, параметризация дуги $A_1 A_2$ окружности (9) будет задаваться следующими уравнениями ($\tau \in [-R\beta, R\beta]$):

$$\begin{cases} r(\tau) = 1, \\ \varphi(\tau) = \arctan \frac{1 - \cos(\tau/R - \beta)}{\sqrt{2} \sin \alpha \cos(\tau/R) + \cot \alpha}, \\ \psi(\tau) = \arcsin \left(\frac{R^2}{\sin \alpha} \cdot \left(1 - \cos \left(\frac{\tau}{R} + \beta \right) \right) \right). \end{cases} \quad (11)$$

Отметим, что $\varphi(-R\beta) = \alpha$, $\psi(-R\beta) = 0$, а $\varphi(R\beta) = 0$, $\psi(R\beta) = \alpha$.

Итак, мы явным образом построили граф G_s . Отметим, что гладкость построенного графа можно довести до C^∞ .

После того как граф G_s , обладающий нужными свойствами, построен, вложение рассматриваемого кольца осуществляется по общей схеме с помощью уравнений вида (8). На рис. 6 изображены два вложения одного и того же кольца ($r_1 = 1$, $R_1 = 2$) с разными значениями параметра d : $d = 5$ на левом чертеже и $d = 5/2$ на правом.

Рис. 6

5. Нерешенные задачи. В заключение хотелось бы сформулировать несколько нерешенных задач.

Задача 1. Построенное вложение имеет класс гладкости C^∞ . Можно ли усилить результат и доказать существование *аналитического* вложения?

Задача 2. В нашей работе вложение найдено в виде конической поверхности; в работе [1] – в виде цилиндрической поверхности. Можно ли найти вложение в виде тора?

Задача 3. Для одной и той же метрики в нашей работе и в работе [1] найдены два различных вложения: в виде областей на конической и цилиндрической поверхностях. Полученные области, таким образом, будут изометричны. А верно ли вообще, что любой области на произвольной конической поверхности соответствует изометричная область на некоторой цилиндрической поверхности, и наоборот?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Х. Сабитов, “Изометрическое погружение локально-евклидовых метрик в $\mathbb{R}^3$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **26**:3 (1985), 156–167.
- [2] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, Физматгиз, М., 1959.

С. Н. Михалев

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: mikhalev@bk.ru

Поступило

29.12.2012

И. Х. Сабитов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: isabitov@mail.ru