Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Р. Гайнуллова, Т. Н. Фоменко, Функционалы, подчиненные сходящимся рядам, и некоторые приложения, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 314–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10224>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 13:20:25

Функционалы, подчиненные сходящимся рядам, и некоторые приложения

С. Р. Гайнуллова, Т. Н. Фоменко

В работах [1]–[4] было введено понятие (α, β) -поискового функционала, рассмотрены его свойства и применения к проблемам существования и дискретного (каскадного) поиска общих неподвижных точек, точек совпадения, общих прообразов заданного замкнутого подпространства, общих корней конечных наборов отображений метрических пространств.

В данном кратком сообщении вводится понятие функционала, подчиненного сходящемуся ряду, являющееся в некотором смысле обобщением понятия (α, β) -поискового функционала. Рассматриваются применения таких функционалов к решению перечисленных выше задач. Некоторые из представленных результатов анонсированы в [5].

Обозначения и терминология. Далее $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ – множество неотрицательных вещественных чисел; (X, ρ) , (Y, d) – метрические пространства; $P(Y)$ – совокупность всевозможных непустых подмножеств пространства Y ; $C(Y)$ – совокупность непустых замкнутых подмножеств пространства Y ; $U(M, r) = \{x \in X \mid \rho(x, M) \leq r\}$ – окрестность множества M радиуса $r > 0$ в X , $U(x, r)$ – замкнутый шар радиуса r с центром в точке x . Метрика D в пространстве $Y^n = \underbrace{Y \times \cdots \times Y}_n$ задается формулой:

$$D(y, z) := \sum_{i=1}^n d(y_i, z_i),$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in Y^n$; $\Delta_n = \{\tilde{y} = (y, \dots, y) \in Y^n \mid y \in Y\}$ – диагональ в Y^n , $n \geq 2$; $\Delta_n(H) = \{\tilde{y} = (y, \dots, y) \in \Delta_n \mid y \in H\}$ – часть диагонали “над H ”, где H – замкнутое подпространство в Y . В частности, $\Delta_n = \Delta_n(Y)$.

Пусть $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow Y$ – отображения метрических пространств (X, ρ) , (Y, d) ,

$$f = f_1 \times \cdots \times f_n: X \rightarrow Y^n.$$

Множество $f^{-1}(\Delta_n(H)) = \{x \in X \mid f_1(x) = \cdots = f_n(x) \in H\}$ будем называть *множеством общих прообразов* подпространства H при действии $f_1, \dots, f_n$.

Будем говорить, что график $\text{Gr}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}$ отображения $f: X \rightarrow Y$ является *H -полным*, если всякая фундаментальная последовательность

$$\{(x_m, y_m)\}_{m=0,1,\dots} \subseteq \text{Gr}(f),$$

где $d(y_m, H) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, имеет предел $(\xi, \eta) \in \text{Gr}(f)$. График $\text{Gr}(f)$ называется *H -замкнутым*, если все его предельные точки вида (x, y) , где $y \in H$, содержатся в $\text{Gr}(f)$.

Пусть задана неубывающая функция $\mu: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, $\mu(0) = 0$. Отображение f называется $\mu(t)$ -*накрывающим* в X , если $U(f(x), \mu(r)) \subseteq f(U(x, r))$ для всех $x \in X$, $r > 0$. Отображение $g: X \rightarrow Y$ называется $\mu(t)$ -*сжимающим*, если $d(g(x), g(x')) \leq \mu(\rho(x, x'))$ для всех $x, x' \in X$.

Мультикаскадом на X называется многозначная дискретная динамическая система с фазовым пространством X и аддитивной полугруппой сдвигов $(\mathbb{Z}_+, +)$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, представленной неотрицательными итерациями некоторого (вообще говоря, многозначного) отображения $\mathcal{G}: X \rightarrow P(X)$, называемого *генератором мультикаскада*. *Траекторией* мультикаскада называется всякая последовательность $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$, где $x_{n+1} \in \mathcal{G}(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Пределы траекторий (если они существуют) составляют *предельное множество* этого мультикаскада.

Неотрицательный функционал $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется (α, β) -поисковым на X , $0 < \beta < \alpha$, если для любого $x \in X$ существует $x' \in X$, для которого

$$\rho(x, x') \leq \frac{\varphi(x)}{\alpha}, \quad \varphi(x') \leq \frac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi(x).$$

Пусть на X заданы функционал $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ и сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A, \quad 0 < a_{n+1} < a_n, \quad n \geq 1. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что функционал φ подчинен ряду (1), если для любой точки $x \in X$, где $\varphi(x) > 0$, существует такая точка $x' \in X$, что $\rho(x, x') \leq \varphi(x)$, и $I(x') > I(x)$, где индекс $I(x)$ точки x относительно пары (функционал φ , ряд (1)) определен равенством

$$I(x) := \begin{cases} 0, & \varphi(x) > a_1, \\ \max\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi(x) \leq a_k\}, & \text{существует } k \in \mathbb{N} \text{ такой, что } 0 < \varphi(x) \leq a_k, \\ \infty, & \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Простейший пример такого функционала – непрерывная кусочно-линейная функция

$$\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

где $\varphi(0) = a_1$, $\varphi(\sum_{j=1}^{n-1} a_j) = a_n$, $n \geq 2$, линейная на отрезках $[0; a_1]$, $\{[\sum_{j=1}^{n-1} a_j; \sum_{j=1}^n a_j]\}_{n \geq 2}$, и $\varphi(x) = 0$ при $x \geq A$.

Несложно проверить, что если $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n) = 1$, то построенный выше функционал $\varphi(x)$ не является поисковым ни для каких (α, β) , $0 < \beta < \alpha$. С другой стороны, всякий ограниченный (α, β) -поисковый функционал $\varphi(x)$ ($0 < \beta < \alpha$, существует $C > 0$ такое, что $\varphi(x) \leq C$, $x \in X$) на (X, ρ) подчинен ряду $C \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\beta/\alpha)^k$ на пространстве $(X, \alpha\rho)$ с метрикой $\alpha\rho$, эквивалентной ρ .

В этом смысле класс функционалов, подчиненных сходящимся рядам вида (1), существенно шире класса (α, β) -поисковых функционалов.

Отметим, что аналогично можно определить подчиненность функционала сходящемуся функциональному ряду. В данном сообщении мы ограничимся понятием подчиненности функционала числовому ряду.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функционал $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ подчинен ряду (1) и выполнено одно из следующих условий:

- 1) график $\text{Gr}(\varphi)$ является $\{0\}$ -полным;
- 2) пространство X полно и график $\text{Gr}(\varphi)$ является $\{0\}$ -замкнутым.

Тогда на X определен мультикаскад, все траектории которого сходятся, и его предельное множество равно $\text{Nil}(\varphi) := \{x \in X \mid \varphi(x) = 0\}$. Для любого $x_0 \in X$, где $\varphi(x_0) > 0$, и любой траектории $\{x_j\}_{j=0,1,\dots}$, выходящей из x_0 и сходящейся к $\xi \in \text{Nil}(\varphi)$, верно, что

$$\rho(x_0, \xi) \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_{I(x_0)+j}.$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Для любой точки $x_0 \in X$, где $\varphi(x_0) > 0$, условие подчиненности функционала φ ряду (1) позволяет построить фундаментальную последовательность $\{(x_m, \varphi(x_m))\}_{m=0,1,\dots}$, которая в силу условий 1) или 2) сходится к некоторой паре $(\xi, 0) \in \text{Gr}(\varphi)$, т.е. $\xi \in \text{Nil}(\varphi)$. Оценка расстояния $\rho(x_0, \xi)$ получается стандартно.

Теорема 1 обобщает результат [1; теорема 1.3], но с другой оценкой $\rho(x_0, \xi)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow Y$, $f = f_1 \times \dots \times f_n: X \rightarrow Y^n$. Пусть f_1 переводит всякую фундаментальную последовательность в фундаментальную, функционал $\varphi(x) := D(f(x), \Delta_n(H))$ подчинен ряду (1) и выполнено одно из условий:

- 1) график $\text{Gr}(f)$ является $\Delta_n(H)$ -полным;
- 2) график $\text{Gr}(f_1)$ H -полон, и график $\text{Gr}(f)$ $\Delta_n(H)$ -замкнут.

Тогда на X определен мультикаскад с непустым предельным множеством $f^{-1}(\Delta_n(H))$, все траектории которого сходятся, и для любого $x_0 \in X$, где $\varphi(x_0) > 0$, и любой траектории $\{x_j\}_{j=0,1,\dots}$, выходящей из x_0 и сходящейся к $\xi \in f^{-1}(\Delta_n(H))$, верно, что

$$\rho(x_0, \xi) \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_{I(x_j)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_{I(x_0)+j}.$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Можно показать, что любое из условий теоремы 1) или 2) обеспечивает $\{0\}$ -полноту графика функционала $\varphi(x) := D(f(x), \Delta_n(H))$. Поэтому утверждение следует из теоремы 1.

Теорема 2 является обобщением [1; теорема 1.7], однако с другой оценкой расстояния $\rho(x_0, \xi)$. В качестве следствий из теоремы 2 получаются утверждения о существовании и аппроксимации совпадений заданного набора отображений (при $H = Y$), а также общих корней, соответствующих общему значению c заданного набора отображений (при $H = \{c\}$).

Пусть функции $\mu, \tau: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ не убывают, $\mu(0) = \tau(0) = 0$, $\mu(t)$ обратима и непрерывна в нуле справа. Пусть также $(\mu^{-1} \circ \tau)(t) \leq a_n$ при $a_n < t \leq a_{n-1}$, $n \geq 2$, и $(\mu^{-1} \circ \tau)(t) \leq a_1$ при $t > a_1$.

ТЕОРЕМА 3 (Т.Н. Фоменко). Пусть $f, g: X \rightarrow Y$. Пусть отображение f является $\mu(t)$ -накрывающим, а отображение $g - \tau(t)$ -сжимающим. Пусть также одно из отображений f, g переводит всякую фундаментальную последовательность в фундаментальную, и его график полон, а график второго отображения замкнут. Тогда на X существует мультикаскад с предельным множеством

$$\text{Coin}(f, g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \neq \emptyset,$$

все траектории которого сходятся. Если $\mu^{-1}(d(f(x_0), g(x_0))) \leq a_{k_0}$ для некоторых $x_0 \in X$, $k_0 \in \mathbb{N}$, то для любой траектории $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$, начинающейся из x_0 и сходящейся к $\xi \in \text{Coin}(f, g)$, верно

$$\rho(x_0, \xi) \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_{k_0+j}.$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Условия теоремы обеспечивают подчиненность функционала $\varphi(x) := \mu^{-1}(d(f(x), g(x)))$, $x \in X$, ряду (1) и $\{0\}$ -полноту его графика. Поэтому утверждение следует из теоремы 1.

Отметим, что теорема 3 представляет обобщение [6; теорема 1], но с другой оценкой на расстояние $\rho(x_0, \xi)$.

Если отображение f тождественно, а отображение g является $\tau(t)$ -сжимающим, то из теоремы 3 получается утверждение, близкое к результату [7; лемма 2], для случая однозначных отображений.

Отметим, что применение функционалов, подчиненных сходящимся рядам, к задаче о совпадениях семейства пар отображений, параметризованных элементами некоторого топологического пространства, содержится в статье [8]. Близкое понятие функционалов, строго подчиненных сходящимся рядам, и их применение к решению некоторых уравнений в метрических пространствах дано в [9].

Авторы искренне благодарят рецензента за ряд полезных замечаний и предложений по улучшению изложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. N. Fomenko, *Topology Appl.*, **157**:4 (2010), 760–773. [2] Т. Н. Фоменко, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:5 (2010), 171–190. [3] Т. Н. Фоменко, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2010, № 5, 3–9. [4] Т. Н. Фоменко, *Матем. заметки*, **93**:1 (2013), 127–143. [5] С. Р. Гайнуллова, “Каскадный поиск нулей функционала, подчиненного сходящемуся ряду”, *XIX Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов-2012”*, Сб. тезисов, М., 2012, 74–75. [6] А. В. Арутюнов, *Докл. РАН*, **416**:2 (2007), 151–155. [7] П. В. Семенов, *Функц. анализ и его прил.*, **36**:2 (2002), 89–92. [8] С. Р. Гайнуллова, *Int. J. Open Inform. Tech.*, **2**:5 (2014), 10–16. [9] T. N. Fomenko, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **14**:1 (2013), 21–40.

С. Р. Гайнуллова

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: gajnullova-sr@yandex.ru

Поступило

14.09.2012

Исправленный вариант

11.11.2013

Т. Н. Фоменко

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: tn-fomenko@yandex.ru