Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Зайцев, Об отображениях решениями эллиптических уравнений второго порядка, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 718–733

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:03:32

Об отображениях решениями эллиптических уравнений второго порядка

А. Б. Зайцев

В работе изучаются свойства отображений решениями эллиптических уравнений с частными производными второго порядка на плоскости. Найдены условия на функцию, непрерывную на единичной окружности, достаточные для того, чтобы решение задачи Дирихле в единичном круге для данного уравнения с данной граничной функцией являлось гомеоморфизмом единичного круга и некоторой жордановой односвязной области. Исследуются также свойства нулей решений данных уравнений. В частности, для полиномиальных решений доказан аналог основной теоремы алгебры.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10225

1. Введение. Пусть

$$L = \bar{\partial}\partial_\beta, \quad (1)$$

где $\bar{\partial}$ – оператор Коши–Римана, а $\partial_\beta = \partial/\partial x + \beta i \partial/\partial y$, β – вещественное число, не равное 0 и ± 1 . В данной работе исследуются свойства отображений на плоскости функциями, удовлетворяющими уравнению

$$Lu = 0, \quad (2)$$

которые мы будем называть *L-отображениями*.

Случай гармонических отображений ($\beta = -1$) рассмотрен в работе [1]. Гармоническое отображение u называется *сохраняющим ориентацию* в области D , если якобиан функции u (в дальнейшем коротко $I_u(z)$) положителен в каждой точке области D , где частная производная $\partial u/\partial z \neq 0$. Имеет место следующий принцип аргумента ([1; с. 9]).

Пусть u – гармоническое отображение, определенное и сохраняющее ориентацию в жордановой области $D \subset \mathbb{C}$. Предположим, что функция u непрерывна на замыкании $\bar{D}$ области D и $u \neq 0$ на границе ∂D данной области. Тогда приращение аргумента функции u при полном обходе контура ∂D против часовой стрелки ($\Delta_{\partial D} \arg u$) равно $2\pi N$, где N – число нулей u в D с учетом их порядков.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00434-а).

Имеет место следующая теорема Радо–Кнезера–Шоке [2; с. 33]: пусть функция u непрерывна на границе ∂B единичного круга B и отображает ∂B на некоторый выпуклый замкнутый контур Γ взаимно однозначно и с сохранением ориентации; тогда гармоническое продолжение функции u в B взаимно однозначно отображает B на область D , ограниченную контуром Γ .

Также имеют место следующие свойства гармонических отображений [1; с. 23–24].

Если гармоническое отображение комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на себя взаимно однозначно, то оно линейно.

Не существует взаимно однозначного гармонического отображения единичного круга B на $\mathbb{C}$.

Решения эллиптических уравнений второго порядка могут иметь неизолированные нули. Множества неизолированных нулей представляют собой объединения конечного числа аналитических кривых. В случае $\beta = 1$ верно следующее утверждение [2; с. 206]: целая бианалитическая функция u , имеющая неизолированный нуль в точке a , представляется в виде $u = MP$, где M – целая функция, а P – вещественнозначный многочлен одного из двух следующих видов:

$$e^{i\alpha}(z-a) + e^{-i\alpha}(\bar{z}-\bar{a}), \quad |z-a-c|^2 - |c|^2,$$

где a , α , c – константы, $c \neq 0$, $\operatorname{Im} \alpha = 0$.

В настоящей работе получены результаты, аналогичные приведенным выше, для отображений решениями уравнения (2).

2. Основные результаты и их доказательство.

ТЕОРЕМА 1. Пусть L – сильно эллиптический оператор вида (1) (т.е. $\beta < 0$), u – L -отображение, определенное в жордановой односвязной области $D \subset \mathbb{C}$. Предположим, что функция u непрерывна на $\bar{D}$, $u \neq 0$ на ∂D и $I_u(z) \geq 0$ при всех $z \in D$. Тогда u имеет в D конечное число нулей и $\Delta_{\partial D} \arg u = 2\pi N$, где N – число нулей u в D с учетом их порядков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала что u имеет в D конечное число нулей. Если это не так, то u имеет в D неизолированные нули и, таким образом, существует аналитическая кривая $\gamma \subset D$, такая, что $u(z) = 0$ при всех $z \in \gamma$. Так как $u \neq 0$ на Γ , то $\bar{\gamma} \subset D$. Но тогда γ является замкнутым жордановым контуром. В силу единственности решения задачи Дирихле для сильно эллиптических уравнений второго порядка [3; теорема 7.4] u тождественно равна нулю в D . Итак, u имеет в D конечное число нулей.

Пусть $c \in D$ – нуль порядка n функции u . Тогда в окрестности точки c имеем [4; предложение 2.1]

$$u = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k(z-c)^k + b_k(z_\beta - T_\beta c)^k), \quad (3)$$

где a_n и b_n одновременно не равны нулю, $z_\beta = x + (i/\beta)y$, T_β – линейное отображение плоскости $\mathbb{C}$, задаваемое формулой $T_\beta z = z_\beta$.

Через $\operatorname{ind}_c u$ обозначим $(1/(2\pi))\Delta_{|z-c|=\varepsilon} \arg u$ при всех достаточно малых ε . Аналогично [1; с. 9] доказывается, что $\Delta_{\partial D} \arg u = 2\pi \sum_{k=0}^m \operatorname{ind} c_k u$, где $c_1, \dots, c_m$ – все

нули функции u в D . Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что $\text{ind}_c u = n$.

Предположим сначала, что $n = 1$. Тогда существует такое вещественное число k , что градиент функции $U = l \operatorname{Re} u + \operatorname{Im} u$ в точке c не равен 0. Тогда пересечение множества $\{z \in D \mid U(z) = 0\}$ с достаточно малой окрестностью точки c представляет собой аналитическую кривую. При всех достаточно малых ε окружность $\{|z - c| = \varepsilon\}$ пересекается с данной кривой ровно два раза. Поэтому $\text{ind}_c u \leq 1$.

Из (3) следует, что $u(z) = f(z) + f_\beta(z_\beta)$, где функции f и f_β голоморфны соответственно в D и $T_\beta(D)$, $f(c) = f_\beta(T_\beta c) = 0$. Поэтому в общем случае функция u представляется в окрестности точки c в виде

$$u = \prod_{k=1}^n u_k, \quad u_k(z) = g(z) + e^{i(\pi+2\pi k)/n} g_\beta(z_\beta),$$

где функции g и g_β голоморфны соответственно в окрестностях точек c и $T_\beta c$, $g^n(z) = f(z)$, $g_\beta^n(z_\beta) = f_\beta(z_\beta)$. При этом градиент функции u_k , $k = 1, 2, \dots, n$, в точке c не равен 0. Поэтому $\text{ind}_c u_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$. Так как $\text{ind}_c u = \sum_{k=1}^n \text{ind}_c u_k$, то $\text{ind}_c u \leq n$.

Так как

$$I_u(z) = \left| \frac{\partial u}{\partial z}(z) \right|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z) \right|^2, \quad z_\beta = \frac{1+\beta}{2\beta} z + \frac{\beta-1}{2\beta} \bar{z},$$

из условия теоремы после элементарных преобразований следует, что

$$\inf_D \left| \frac{f'(z)}{f'_\beta(z_\beta)} + \frac{1+\beta}{2\beta} \right| \geq \frac{\beta-1}{2\beta}.$$

Используя дробно-линейное отображение $w \rightarrow 1/w$ плоскости $\mathbb{C}$, получаем

$$\sup_D \left| \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} + \frac{1+\beta}{2} \right| \leq \frac{1-\beta}{2}. \quad (4)$$

Рассмотрим функцию $u_t(z) = f(z) + t f_\beta(z_\beta)$, $0 \leq t \leq 1$. Так как круг

$$\left| w + \frac{1+\beta}{2} \right| < \frac{1-\beta}{2}$$

содержит точку 0, при $0 \leq t < 1$ имеем

$$\sup_D \left| \frac{t f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} + \frac{1+\beta}{2} \right| < \frac{1-\beta}{2}. \quad (5)$$

Следовательно, $I_{u_t}(z) \geq 0$ при $0 \leq t < 1$, $z \in D$, причем, если градиент функции u не равен нулю в точке z , то $I_{u_t}(z) > 0$. Докажем, что $\text{ind}_c u_t = n$ при $0 \leq t < 1$. Из (5) следует, что $a_n \neq 0$. Поэтому, не ограничивая общности, положим $c = 0$, $a_n = 1$. Из (5) и (3) следует, что

$$\left| \frac{t b_n z_\beta^{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{1+\beta}{2} \right| < \frac{1-\beta}{2} \quad (6)$$

при всех $0 \leq t < 1$, $z \neq 0$.

Таким образом, $I_{z^n + tb_n z_\beta^n}(z) > 0$ при $0 \leq t < 1$, $z \neq 0$. Значит, $z^n + tb_n z_\beta^n \neq 0$ при $0 \leq t < 1$, $z \neq 0$. Следовательно,

$$|z^n + tb_n z_\beta^n| > \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k z^k + b_k z_\beta^k) \right|$$

при всех $0 \leq t < 1$ и z , достаточно близких к 0. Поэтому при $0 \leq t < 1$ имеем

$$\text{ind}_0 u_t = \text{ind}_0(z^n + tb_n z_\beta^n) = \text{ind}_0 z^n = n.$$

Так как $I_{u_t}(\xi) > 0$ при всех $\xi \neq 0$, лежащих достаточно близко к точке 0, используя аналогичные рассуждения, при всех таких ξ получаем $\text{ind}_\xi u_t > 0$. Поэтому при всех $t < 1$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{|z|=\varepsilon} \arg u_t(z) \geq \text{ind}_0 u_t = n.$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $t < 1$, что

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{|z|=\varepsilon} \arg u(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{|z|=\varepsilon} \arg u_t(z).$$

Следовательно, $\text{ind}_0 u \geq n$. В то же время ранее было доказано, что $\text{ind}_0 u \leq n$. Следовательно, $\text{ind}_0 u = n$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Пусть $\beta < 0$, $\beta \neq -1$, функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (1) в круге $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, непрерывна на $\overline{B}$, отображает границу ∂B круга B на замкнутый жорданов контур Γ взаимно однозначно и с сохранением ориентации. При каких условиях функция u взаимно однозначно отображает B на область D , ограниченную контуром Γ ?

Имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\beta < 0$, функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (2) в B , непрерывна на $\overline{B}$, отображает ∂B на замкнутый жорданов контур Γ взаимно однозначно и с сохранением ориентации. Тогда если $I_u(z) > 0$ при $z \in B$, то u взаимно однозначно отображает B на область D , ограниченную контуром Γ . Обратное, если u взаимно однозначно отображает B на D , то $I_u(z) \geq 0$ при $z \in B$.

Предложение 1 следует из аддитивности топологической степени гладких отображений (см., например, [5]).

Известно, что на случай $\beta \neq -1$ теорема Радо–Кнезера–Шоке не распространяется [6; теорема 1.4]. Приведем следующий пример.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$u(z) = x - \varepsilon i y + \alpha(z^3 + \beta^2 z_\beta^3),$$

где $\beta = -1/3$, $\alpha = 1/200$, $0 < \varepsilon < 2\alpha$. Тогда $u(z)$ взаимно однозначна и сохраняет ориентацию на ∂B , $\Gamma = u(\partial B)$ – выпуклый контур, но $u(z)$ не является взаимно однозначной в B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $|z| = 1$ имеем

$$u(z) = (1 - 6\alpha)x + \frac{64}{9}\alpha x^3 + i(2\alpha - \varepsilon)y.$$

Так как $1 - 6\alpha > 0$, $\alpha > 0$, функция $(1 - 6\alpha)x + (64/9)\alpha x^3$ возрастает на $[-1, 1]$. Отсюда и из условия $(2\alpha - \varepsilon) > 0$ следует, что функция $u(z)$ взаимно однозначна и сохраняет ориентацию на ∂B . Выпуклость контура Γ достаточно доказать при $y > 0$. В точке $u(x + i\sqrt{1 - x^2})$ тангенс угла наклона к Γ равен

$$-\frac{(2\alpha - \varepsilon)x}{\sqrt{1 - x^2}((1 - 6\alpha) + (64/3)\alpha x^2)}.$$

Очевидно, что точка $i(2\alpha - \varepsilon)$ не является точкой перегиба контура γ . Поэтому достаточно доказать выпуклость данного контура при $0 < x < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{(2\alpha - \varepsilon)x}{\sqrt{1 - x^2}((1 - 6\alpha) + (64/3)\alpha x^2)} \right)' \\ &= -(2\alpha - \varepsilon) \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}((1 - 6\alpha) + (64/3)\alpha x^2)} \\ & \quad \times \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{1 - x^2} - \frac{128}{3} \frac{\alpha x}{(1 - 6\alpha) + (64/3)\alpha x^2} \right). \end{aligned}$$

При $0 < x < 1$ и $\alpha = 1/200$ имеем

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{1 - x^2} \geq \frac{27}{8}, \quad \frac{128}{3} \frac{\alpha x}{(1 - 6\alpha) + (64/3)\alpha x^2} < \frac{27}{8}.$$

Поэтому

$$\left(-\frac{(2\alpha - \varepsilon)x}{\sqrt{1 - x^2}((1 - 6\alpha) + (64/3)\alpha x^2)} \right)' \neq 0 \quad \text{при } 0 < x < 1.$$

Итак Γ – выпуклый контур. В то же время имеем $I_u(0) = -\varepsilon < 0$. Из предложения 1 следует, что функция $u(z)$ не является взаимно однозначной в B .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\beta < 0$, и пусть функция $u(z)$ удовлетворяет уравнению (2) в B , непрерывна на $\bar{B}$ и непрерывно дифференцируема на ∂B , отображает ∂B на жорданов контур Γ взаимно однозначно и с сохранением ориентации. Пусть $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ – ряд Фурье функции $u(e^{it})$. Тогда если

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} 2n|c_{-n}|}{\left| \frac{du(e^{it})}{dt} \right|} < \frac{\min(1, -\beta)}{1 - \beta}$$

при $0 \leq t \leq 2\pi$, то $u(z)$ взаимно однозначно отображает B на область D , ограниченную Γ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При всех $z \in B$ $u(z) = f(z) + f_\beta(z_\beta)$, где функции f и f_β голоморфны соответственно в B и $T_\beta(B)$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2n|c_{-n}|$ сходится, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_{-n} \left(\left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^n e^{int} - e^{-int} \right), \quad (7)$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^n e^{int} + e^{-int} \right) \quad (8)$$

сходятся равномерно на $[0; 2\pi]$.

Докажем что ряд (8) является рядом Фурье для функции $f_\beta(T_\beta(e^{it}))$, являющейся граничной для функции f_β . Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^n e^{int} + e^{-int} \right) (T_\beta(e^{it}))^m d(T_\beta(e^{it})) \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{(T_\beta(e^{it}))^{m+1}}{m+1} d \left(\left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^n e^{int} + e^{-int} \right) \\ &= - \frac{in}{m+1} \int_0^{2\pi} (T_\beta(e^{it}))^{m+1} \left(\left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^n e^{int} - e^{-int} \right) dt. \end{aligned}$$

Так как

$$(T_\beta(e^{it}))^{m+1} = \left(\frac{\beta+1}{2\beta} e^{it} + \frac{\beta-1}{2\beta} e^{-it} \right)^{m+1},$$

при $m+1 < n$ последний интеграл равен нулю; то же самое, если $m+1$ четное, а n нечетное или наоборот. Если же числа $m+1$ и n одновременно четные или нечетные, то имеем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\beta+1}{2\beta} e^{it} + \frac{\beta-1}{2\beta} e^{-it} \right)^{m+1} \\ &= \dots + \frac{(m+1)! ((\beta+1)^{(m+1+n)/2} (\beta-1)^{(m+1-n)/2} e^{int})}{((m+1+n)/2)! ((m+1-n)/2)! (2\beta)^{m+1}} \\ &+ \frac{(m+1)! ((\beta-1)^{(m+1+n)/2} (\beta+1)^{(m+1-n)/2} e^{-int})}{((m+1+n)/2)! ((m+1-n)/2)! (2\beta)^{m+1}} + \dots \end{aligned}$$

Поэтому в этом случае

$$\begin{aligned} & - \frac{in}{m+1} \int_0^{2\pi} (T_\beta(e^{it}))^{m+1} \left(\left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^n e^{int} - e^{-int} \right) dt \\ &= - \frac{inm! (\beta-1)^{(m+1+n)/2} (\beta+1)^{(m+1-n)/2}}{((m+1+n)/2)! ((m+1-n)/2)! (2\beta)^{m+1}} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^n e^{int} + e^{-int} \right) \left(\left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^n e^{int} - e^{-int} \right) dt \\ &= - \frac{inm! (\beta-1)^{(m+1+n)/2} (\beta+1)^{(m+1-n)/2}}{((m+1+n)/2)! ((m+1-n)/2)! (2\beta)^{m+1}} \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^{2n} e^{2int} - \left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^{2n} e^{-2int} \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд (8) равномерно на $[0; 2\pi]$ сходится к функции, являющейся граничной для некоторой функции $g(z_\beta)$, где g голоморфна в $T_\beta(B)$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n - c_{-n} \left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^n \right) e^{int}. \quad (9)$$

Так как ряд (9) является разностью ряда Фурье для функции $u(e^{it})$ и ряда (8), он является рядом Фурье функции, являющейся граничной для некоторой голоморфной в B функции. Поэтому можем положить

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n - c_{-n} \left(\frac{\beta+1}{\beta-1} \right)^n \right) z^n, \quad f(z_\beta) = g(z_\beta), \quad z \in B.$$

В силу равномерной сходимости ряда (8) граничные значения функций f и f_β непрерывны на ∂B . Более того, из непрерывной дифференцируемости функции $u(e^{it})$ и равномерной сходимости ряда (7) следует непрерывная дифференцируемость на ∂B , а значит, и на $\overline{B}$, функций f и f_β . При этом имеет место равенство

$$ie^{it} f'(e^{it}) + \left(-\sin t + i \frac{\cos t}{\beta} \right) f'_\beta(T_\beta(e^{it})) = \frac{du(e^{it})}{dt}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (10)$$

Очевидно, что функция

$$\left(-\sin t + i \frac{\cos t}{\beta} \right) f'_\beta(T_\beta(e^{it}))$$

является суммой ряда (7). Поэтому

$$\left| \left(-\sin t + i \frac{\cos t}{\beta} \right) f'_\beta(T_\beta(e^{it})) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2n |c_{-n}|.$$

Отсюда и из условия теоремы следует, что

$$\frac{\max_{[0; 2\pi]} |f'_\beta(T_\beta(e^{it}))|}{|du(e^{it})/dt|} < \frac{-\beta}{1-\beta}. \quad (11)$$

Из (10) и условия теоремы следует, что

$$\frac{|f'(e^{it})|}{|du(e^{it})/dt|} \geq 1 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} 2n |c_{-n}|}{|du(e^{it})/dt|} > \frac{\max(1, -\beta)}{1-\beta}.$$

Отсюда и из (11) следует, что

$$\frac{\max_{[0; 2\pi]} |f'_\beta(T_\beta(e^{it}))|}{|f'(e^{it})|} < \min(1, -\beta) \quad (12)$$

при $0 \leq t \leq 2\pi$.

Докажем, что $f'(z) \neq 0$ в B . Так как u отображает ∂B на Γ взаимно однозначно с сохранением ориентации, то

$$\Delta_{\partial B} \arg \frac{du}{dt} = 2\pi.$$

Отсюда, из (10) и (12) следует, что

$$\Delta_{\partial B} \arg i e^{it} f'(e^{it}) = \Delta_{\partial B} \arg \frac{du}{dt} = 2\pi.$$

Таким образом, $\Delta_{\partial B} \arg f'(e^{it}) = 0$, т.е. $f'(z) \neq 0$ в B . Отсюда и из (12) следует, что

$$\frac{|f'_\beta(z_\beta)|}{|f'(z)|} < \min(1, -\beta) \quad (13)$$

при всех $z \in B$.

Из (13) следует, что при всех $z \in B$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{f'_\beta(z_\beta)}{f'(z)} + \frac{1+\beta}{2} \right| < \frac{1-\beta}{2}.$$

Но тогда $I_u(z) > 0$ при всех $z \in B$. По предложению 1 u отображает B на D взаимно однозначно. Теорема доказана.

Приведем пример. Пусть $u(e^{it}) = \sqrt{e^{2it} - a^2}$, где $|a| < 1$. Данная функция непрерывно дифференцируема, взаимно однозначна и сохраняет ориентацию на ∂B . Нетрудно показать, что

$$u(e^{it}) = e^{it} - \frac{a^2}{2} e^{-it} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!! a^{2n}}{2^n n!} e^{-i(2n-1)t},$$

т.е.

$$c_{-1} = -\frac{a^2}{2}, \quad c_{2n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad c_{1-2n} = -\frac{(2n-3)!! a^{2n}}{2^n n!}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Так как $(2n-1)|c_{1-2n}| \leq |a|^{2n}/2$, $n = 1, 2, \dots$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2(2n-1)|c_{1-2n}| \leq \frac{|a|^2}{1-|a|^2}.$$

Далее,

$$\left| \frac{d\sqrt{e^{2it} - a^2}}{dt} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{e^{2it} - a^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1+|a|^2}}.$$

Поэтому при

$$\frac{|a|^2 \sqrt{1+|a|^2}}{1-|a|^2} < \frac{\min(-1, \beta)}{1-\beta}$$

функция $u(e^{it})$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2, а значит, функция $u(z)$ взаимно однозначна в B .

Пусть теперь $\beta > 0$, $\beta \neq 1$. Используя метод доказательства теоремы 2, докажем следующее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ – ряд Фурье функции $u(e^{it})$, непрерывной на ∂B . Тогда задача Дирихле в круге B для уравнения (2) с граничной функцией $u(e^{it})$ разрешима, если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} < \frac{|1 - \beta|}{1 + \beta}$$

и неразрешима, если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} > \frac{|1 - \beta|}{1 + \beta}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} < \frac{|1 - \beta|}{1 + \beta}.$$

Тогда ряд (8) сходится равномерно на ∂B , а ряд (9) является рядом Фурье непрерывной функции, граничной для некоторой голоморфной в B функции. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n - c_{-n} \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^n \right) z^n, \quad z \in B,$$

f_β – голоморфная в $T_\beta(B)$ функция такая, что ряд (8) представляет функцию, граничную для $f_\beta(z_\beta)$. Очевидно, что функции $f(z)$ и $f_\beta(z_\beta)$ продолжают непрерывно на $\overline{B}$. Тогда функция $f(z) + f_\beta(z_\beta)$, удовлетворяющая в B уравнению (1), непрерывно продолжается на $\overline{B}$ и $u(e^{it})$ – ее граничная функция.

Обратно, пусть данная задача Дирихле разрешима, и ее решение представляется в виде $u(z) = f(z) + f_\beta(z_\beta)$, где функции f и f_β голоморфны соответственно в B и $T_\beta(B)$. Если предположить, что ряд (9) равномерно сходится на $[0; 2\pi]$, то

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(c_n - c_{-n} \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^n \right) z^n \right)$$

при $z \in B$, а если $|z| < |1 - \beta|/(1 + \beta)$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{it}) e^{it} dt}{e^{it} - z} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{it}) e^{-it} dt}{e^{-it} - (\beta + 1)/(\beta - 1)z}. \quad (14)$$

В частности, это верно, когда $u(z)$ является полиномиальным решением уравнения (2), или коротко, L -полиномом. В общем случае $u(z)$ равномерно на $\overline{B}$ приближается L -полиномами, поэтому (14) также имеет место при $|z| < |1 - \beta|/(1 + \beta)$. Но тогда функция выражаемая при $|z| < |1 - \beta|/(1 + \beta)$ формулой

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{it}) e^{-it} dt}{e^{-it} - (\beta + 1)/(\beta - 1)z},$$

продолжается до функции, голоморфной в B , т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right)^n z^n$$

сходится при $z \in B$. Следовательно, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} \leq |1 - \beta|/(1 + \beta)$. Предложение доказано.

Приведем пример. Пусть

$$u(e^{it}) = \frac{1}{e^{it} - a}, \quad |a| < 1.$$

Тогда $u(e^{it}) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} e^{-int}$. Из предложения 2 следует, что задача Дирихле для уравнения (1) с граничной функцией $u(e^{it})$ разрешима, если $|a| < (1 - \beta)/(1 + \beta)$ и неразрешима, если $|a| > (1 - \beta)/(1 + \beta)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\beta < 0$, u – взаимно однозначное L -отображение плоскости $\mathbb{C}$ на себя. Тогда u – линейная функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы $u(z) = f(z) + f_{\beta}(z_{\beta})$, где f и f_{β} – целые функции. Так как u – взаимно однозначно, то можно предположить, что $I_u \geq 0$ в $\mathbb{C}$. Кроме того, градиент функции u нигде не равен нулю. Поэтому $f'(z) \neq 0$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, функция $f(z)$ линейная или целая трансцендентная.

Так как $I_u \geq 0$ в $\mathbb{C}$, то

$$\sup_{\mathbb{C}} \left| \frac{f'_{\beta}(z_{\beta})}{f'(z)} + \frac{1 + \beta}{2} \right| \leq \frac{1 - \beta}{2},$$

т.е. выражение

$$\left| \frac{f'_{\beta}(z_{\beta})}{f'(z)} \right|$$

равномерно ограничено в $\mathbb{C}$. Если $f(z)$ – линейная функция, то функция $f'_{\beta}(z_{\beta})$ ограничена в $\mathbb{C}$, и следовательно, является константой. Таким образом, в этом случае функция f_{β} , а значит и u , линейна.

Пусть $f(z)$ – целая трансцендентная функция. Рассмотрим некоторую ветвь $(f^{-1})_0$ многозначной функции f^{-1} , определенную в окрестности произвольной точки $\tilde{w} \in \mathbb{C}$. Пусть $a \in \mathbb{C}$ – ближайшая к $\tilde{w}$ особая точка функции $(f^{-1})_0$. Обозначим через σ отрезок с концами в точках $\tilde{w}$ и a . Существует $\lim_{w \rightarrow a} (f^{-1})_0(w)$ при $w \rightarrow a$, $w \in \sigma$. Пусть этот предел конечный; обозначим его через $(f^{-1})_0(a)$. Но тогда функция $(f^{-1})_0$ аналитически продолжается в точку a , так как $f'((f^{-1})_0(a)) \neq 0$. Поэтому $\lim_{w \rightarrow a, w \in \sigma} (f^{-1})_0(w) = \infty$. Следовательно, существует гладкая кривая γ без самопересечений, уходящая в бесконечность в одном из направлений, такая, что $f(\gamma)$ лежит на некоторой прямой (будем считать, что на вещественной) и $\lim_{z \in \gamma, z \rightarrow \infty} f(z) = a$.

Пусть $z = z(t)$, $0 \leq t < \infty$, – уравнение кривой γ ,

$$z'(t) \neq 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \infty, \quad g(t) = f(z(t)), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = a, \quad g_{\beta}(t) = f_{\beta}(z_{\beta}(t)).$$

Так как $f'(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{C}$, то $g'(t) \neq 0$, $0 \leq t < \infty$. Далее, функция $g(t)$ вещественнозначна. Поэтому по теореме Коши для любых точек t_1 и t_2 , $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$, существует точка t_3 , $t_1 < t_3 < t_2$, такая, что

$$\frac{\operatorname{Re}(g_{\beta}(t_2) - g_{\beta}(t_1))}{g(t_2) - g(t_1)} = \operatorname{Re} \frac{g'_{\beta}(t_3)}{g'(t_3)}. \quad (15)$$

Так как $|f'_{\beta}(z_{\beta})/f'(z)|$ равномерно ограничено в $\mathbb{C}$, а $|z'_{\beta}(t)/z'(t)|$ равномерно ограничено при $0 \leq t < \infty$, то функция $g'_{\beta}(t)/g'(t)$ также равномерно ограничена при $0 \leq$

$t < \infty$. Далее, так как функция $g(t)$ равномерно ограничена при $t \rightarrow \infty$, то из (15) следует, что функция $\operatorname{Re} g_\beta(t)$ также равномерно ограничена при $t \rightarrow \infty$. Аналогично доказывается, что функция $\operatorname{Im} g_\beta(t)$ равномерно ограничена при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, функция $g_\beta(t)$, а значит и $u(z(t))$, равномерно ограничена при $t \rightarrow \infty$. Это противоречит тому, что u – взаимно однозначное отображение плоскости $\mathbb{C}$ на себя. Итак, u – линейная функция. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\beta < 0$. Тогда не существует взаимно однозначного L -отображения единичного круга B на плоскость $\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует взаимно однозначное L -отображение u круга B на $\mathbb{C}$. По условию теоремы $u(z) = f(z) + f_\beta(z_\beta)$, где f и f_β – функции, голоморфные в B и $T_\beta(B)$ соответственно. Так как u взаимно однозначно, то можно предположить, что $I_u \geq 0$ в B . Кроме того, градиент функции u нигде не равен нулю. Поэтому $f'(z) \neq 0$ при всех $z \in B$.

Пусть f взаимно однозначна в B . Тогда существует жорданова область $G \subset B$, такая, что ∂G содержит некоторую дугу $\gamma_0 \subset \partial B$ и функция f ограничена в G . Пусть $\zeta \in \gamma_0$. Так как $\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in B} u(z) = \infty$, то $\lim_{z \rightarrow \zeta, z \in B} f_\beta(z_\beta) = \infty$. Следовательно, при некотором $c \in \mathbb{C}$ функция $1/(f_\beta(z_\beta) - c)$ равномерно ограничена при всех $z \in B$, лежащих достаточно близко к γ_0 , и всюду на γ_0 имеет нулевые радиальные пределы. Таким образом, данная функция тождественно равна нулю, что невозможно. Поэтому f не является взаимно однозначной в B .

Так как $f'(z) \neq 0$ при $z \in B$, то, повторяя рассуждения доказательства теоремы 3, получим, что существуют точка $a \in \mathbb{C}$, интервал σ некоторой прямой, имеющий один из концов в точке a , и определенная на σ ветвь $(f^{-1})_0$ многозначной функции f^{-1} , такие, что $\lim_{w \rightarrow a, w \in \sigma} (f^{-1})_0(w) = \zeta_0$, где $\zeta_0 \in \partial B$. Следовательно, существует открытая жорданова кривая $\gamma \subset B$ с одним из концов в точке ζ_0 , такая, что $f(\gamma)$ лежит на некоторой прямой (будем считать, что на вещественной) и $\lim_{z \rightarrow \zeta_0, z \in \gamma} f(z) = a$. Снова повторяя доказательство теоремы 3, получим, что функция $f_\beta(z)$, а значит, и u , ограничена при $z \in \gamma$, $z \rightarrow \zeta_0$. Это противоречит тому, что u – взаимно однозначное отображение B на $\mathbb{C}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Исследуем теперь нули L -отображений. Докажем сначала две леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $\beta \neq \pm 1$. Тогда любой однородный L -полином может обращаться в нуль максимум на двух прямых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что однородный L -полином имеет вид $P = z_\beta^n - a^n z^n$. Тогда каждый его делитель имеет вид $z_\beta - ae^{2\pi ki/n} z$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Пусть множество $\{z \in \mathbb{C} : z_\beta - ae^{2\pi ki/n} z = 0\}$ – прямая. Тогда $I_{z_\beta - ae^{2\pi ki/n} z}(z) = 0$ при всех z . Это эквивалентно тому, что

$$\left| \frac{1+\beta}{2\beta} - ae^{2\pi ki/n} \right| = \left| \frac{1-\beta}{2\beta} \right|. \quad (16)$$

Точка $ae^{2\pi ki/n}$ является точкой пересечения окружностей

$$|w| = a \quad \text{и} \quad \left| \frac{w - (1+\beta)}{2\beta} \right| = \left| \frac{1-\beta}{2\beta} \right|.$$

Так как две окружности пересекаются не более чем в двух точках, то равенство (16) может выполняться максимум при двух значениях k . Утверждение леммы следует из [7; лемма 4].

ЛЕММА 2. Пусть L – сильно эллиптический оператор вида (1). Тогда ни одна положительно определенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами не может быть делителем однородного L -полинома.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если указанная квадратичная форма существует, то она пропорциональна выражению

$$(z_\beta - ae^{2\pi k_1 i/n} z)(z_\beta - ae^{2\pi k_2 i/n} z),$$

где $0 \leq k_j < n$, $j = 1, 2$, $k_1 \neq k_2$. Имеем

$$\begin{aligned} & (z_\beta - ae^{2\pi k_1 i/n} z)(z_\beta - ae^{2\pi k_2 i/n} z) \\ &= (1 - ae^{2\pi k_1 i/n})(1 - ae^{2\pi k_2 i/n})x^2 \\ &+ i\left(\left(\frac{1}{\beta} - ae^{2\pi k_1 i/n}\right)(1 - ae^{2\pi k_2 i/n}) + \left(\frac{1}{\beta} - ae^{2\pi k_2 i/n}\right)(1 - ae^{2\pi k_1 i/n})\right)xy \\ &- \left(\frac{1}{\beta} - ae^{2\pi k_1 i/n}\right)\left(\frac{1}{\beta} - ae^{2\pi k_2 i/n}\right)y^2. \end{aligned}$$

Итак, можно считать, что данная квадратичная форма имеет вид

$$x^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)xy + \gamma_1\gamma_2y^2, \quad \text{где} \quad \gamma_j = i \frac{1/\beta - ae^{2\pi k_j i/n}}{1 - ae^{2\pi k_j i/n}}, \quad j = 1, 2.$$

Так как она имеет вещественные коэффициенты, то $\text{Im}(\gamma_1 + \gamma_2) = 0$, $\text{Im}(\gamma_1\gamma_2) = 0$; отсюда в силу положительной определенности имеем $\gamma_2 = \overline{\gamma_1}$.

Дробно-линейное отображение $i(1/\beta - aw)/(1 - aw)$ переводит окружность $|w| = 1$ в окружность C с центром в точке $i(1/\beta - |a|^2)/(1 - |a|^2)$. Данная точка лежит на мнимой прямой и при $\beta < 0$ не может быть равной нулю. Таким образом, на C нет двух различных точек γ_1 и γ_2 с условием $\gamma_2 = \overline{\gamma_1}$. Следовательно, однородный L -полином нельзя разделить на положительно определенную квадратичную форму с вещественными коэффициентами. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть L – сильно эллиптический оператор вида (1), $\beta \neq -1$. Тогда любой L -полином степени больше 2 может принимать неизолированно не более одного значения из плоскости $\mathbb{C}$. При этом множество, на котором данный L -полином принимает это значение, является либо гиперболой, либо прямой, либо парой пересекающихся прямых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P(z)$ – L -полином степени больше 2, $P(z) = 0$ при всех z , таких, что $P_1(z) = 0$, где $P_1(z)$ – неприводимый вещественнозначный полином. Из [7; лемма 4] следует, что $P(z) = P_1(z)P_2(z)$, где $P_2(z)$ – некоторый полином. Тогда старшая степень полинома $P(z)$ делится на старшую степень полинома $P_1(z)$. Из лемм 1 и 2 следует, что полином $P_1(z)$ имеет степень не больше 2, а множество его нулей не может быть эллипсом. Параболой это множество также быть не может, так как старшая степень полинома $P_1(z)$ не является квадратом линейного

выражения. Итак, множество неизоллированных нулей полинома $P(z)$ – прямые или гиперболы. Если $P(z) = 0$ на двух различных кривых $\{P_{11}(z) = 0\}$ и $\{P_{12}(z) = 0\}$, где вещественнозначные полиномы P_{11} и P_{12} неприводимы, то $P(z)$ делится и на $P_{11}(z)$, и на $P_{12}(z)$, а так как эти полиномы взаимно простые, то $P(z)$ делится на полином $P_{11}(z)P_{12}(z)$, который, таким образом, имеет степень не больше 2. Итак, $P(z) = 0$ не больше, чем на двух кривых, причем гипербола может быть только одна. При этом старшая степень полинома $P_{11}(z)P_{12}(z)$ не является квадратом линейного выражения, поэтому множество нулей полинома не может содержать две параллельные прямые. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть существуют кривые l_1 и l_2 , такие, что $P = 0$ на l_1 и $P = 1$ на l_2 . Предположим, что $\{P_1(z) = 0\}$ – уравнение кривой l_1 . Тогда $P(z) = P_1(z)P_2(z)$, где $P_2(z)$ – некоторый полином. Возможны следующие варианты.

1) l_1 и l_2 – параллельные прямые. Прямая l_2 выражается уравнением $\{P_1(z) = c\}$, где c – некоторая ненулевая константа. Тогда $cP_2(z) = 1$ при $z \in l_2$, т.е. $P_2 - 1/c = 0$ на l_2 . Далее, старшие степени полиномов P_1 и P_2 – взаимно простые многочлены. Поэтому старшая степень полинома $P_2 - 1/c$ не делится на старшую степень полинома $P_1 - c$. Следовательно, l_2 не может быть линией уровня полинома P_2 , а значит, и полинома P .

2) l_1 – гипербола, l_2 – прямая. Так как $(P_1P_2)|_{l_2} = 1$, то $P_1|_{l_2} = 1/P_2|_{l_2}$. Но функции P_1 и P_2 совпадают на l_2 с некоторыми голоморфными полиномами. Из последнего равенства следует, что $P_2|_{l_2}$ – тождественная константа. Из лемм 1 и 2 следует, что старшая степень полинома P_2 не может быть разделена на вещественнозначный полином, а значит, P_2 не имеет линий уровня. Из полученного противоречия следует что l_2 не может быть линией уровня для полинома P .

3) l_1 и l_2 – гиперболы. Уравнение каждой из асимптот к данным гиперболам имеет вид $z + bz_\beta = c$, где b и c – константы, а $z + bz_\beta$ – делитель старшей степени полинома $P(z)$. Из леммы 1 следует, что таких делителей существует не больше двух. Поэтому асимптоты l_2 параллельны соответствующим асимптотам l_1 . Следовательно, полином P_1 совпадает на l_2 с некоторым линейным полиномом. Так же как и в случае 2), P_2 не имеет линий уровня. Поэтому $P_1|_{l_2}$ не может быть константой. Итак, $P_1|_{l_2}$ совпадает с некоторым полиномом первой степени. Так как l_2 имеет две асимптоты, то $P_1(z) \rightarrow \infty$ при $z \in l_2$, $z \rightarrow \infty$ некоторым способом. Так как старшая степень полинома P_2 не равна нулю при $z \neq 0$, то $P_2(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$. Итак, $P(z) \rightarrow \infty$ при $z \in l_2$, $z \rightarrow \infty$ некоторым способом. Это противоречит тому, что $P = 1$ на l_2 .

Итак, если $P = 0$ на некоторой кривой, то не существует таких кривых, на которых $P = c, c \neq 0$. Теорема доказана.

Пусть теперь $\beta > 0$, $\beta \neq 1$. Предположим, что существует положительно определенная квадратичная форма, являющаяся делителем полинома $z_\beta^n - a^n z^n$. Повторяя доказательство леммы 2, получаем, что $(1\beta - |a|^2)/(1 - |a|^2) = 0$, т.е. $a = e^{it_0}/\sqrt{\beta}$. Так как $\gamma_2 = \overline{\gamma_1}$, то

$$\frac{1/\beta - (e^{it_0}/\sqrt{\beta})e^{2\pi k_2 i/n}}{1 - e^{it_0}/\sqrt{\beta}e^{2\pi k_2 i/n}} = -\frac{1/\beta - e^{-it_0}/\sqrt{\beta}e^{-2\pi k_1 i/n}}{1 - e^{-it_0}/\sqrt{\beta}e^{-(-2\pi k_1 i)/n}}.$$

Преобразуя данное равенство, получаем

$$\frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta} = \frac{\cos(t_0 + \pi(k_1 + k_2)/n)}{\cos \pi/n(k_2 - k_1)}.$$

Пусть полином $z_\beta^n - a^n z^n$ делится на произведение двух положительно определенных квадратичных форм. Предположим, что эти формы пропорциональны выражениям

$$(z_\beta - ae^{2\pi k_1 i/n} z)(z_\beta - ae^{2\pi k_2 i/n} z) \quad \text{и} \quad (z_\beta - ae^{2\pi k_3 i/n} z)(z_\beta - ae^{2\pi k_4 i/n} z).$$

Используя предыдущие рассуждения, получаем

$$\frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta} = \frac{\cos(t_0 + \pi(k_1 + k_2)/n)}{\cos \pi/n(k_2 - k_1)} = \frac{\cos(t_0 + \pi(k_3 + k_4)/n)}{\cos \pi/n(k_4 - k_3)}.$$

Пусть $n = 5$. Тогда при $t_0 = \pi$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$, $k_4 = 4$ из полученного двойного равенства следует, что

$$\frac{2\sqrt{\beta}}{1+\beta} = \frac{\cos 2(\pi/5)}{\cos(\pi/5)}. \quad (17)$$

Очевидно, что $\beta > 0$, $\beta \neq 1$.

Рассмотрим кривую

$$(x^2 + i(\gamma_1 + \gamma_2)xy - \gamma_1\gamma_2 y^2)(x^2 + i(\gamma_3 + \gamma_4)xy - \gamma_3\gamma_4 y^2) = 1,$$

где

$$\gamma_k = \frac{1/\beta + 1/\sqrt{\beta}e^{2\pi ki/5}}{1 + 1/\sqrt{\beta}e^{2\pi ki/5}}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

β удовлетворяет условию (17).

Умножая обе части уравнения данной кривой на $z_\beta + 1/\sqrt{\beta}z$, получаем, что

$$\frac{z_\beta^5 + 1/(\sqrt{\beta})^5 z^5}{\prod_{k=1}^4 (1 + 1/\sqrt{\beta}e^{2\pi ki/5})} = z_\beta + \frac{1}{\sqrt{\beta}} z.$$

Итак данная кривая является линией уровня L -полинома

$$z_\beta^5 + \frac{1}{(\sqrt{\beta})^5} z^5 - \left(\prod_{k=1}^4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{2\pi ki/5} \right) \right) \left(z_\beta + \frac{1}{\sqrt{\beta}} z \right).$$

Докажем аналог основной теоремы алгебры для L -полиномов. Через $\mu_u(z)$ обозначим выражение $((\partial u/\partial \bar{z})(z))/((\partial u/\partial z)(z))$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть L – сильно эллиптический оператор вида (1), P – L -полином степени $n > 0$, существует число R_0 такое, что $\sup_{|z| > R_0} |\mu_P(z)| < 1$. Тогда P имеет конечное число нулей $c_1, c_2, \dots, c_m$, и $\sum_{k=1}^m \text{ind}_{c_k} P = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P(z) = \sum_{k=1}^n (a_k z^k + b_k z_\beta^k)$. Будем считать, что $a_n = 1$. Из условия теоремы следует (аналогично доказательству теоремы 1), что

$$z^n + b_n z_\beta^n \neq 0, \quad z \neq 0.$$

Тогда $\lim_{z \rightarrow \infty} (z^n + b_n z_\beta^n) = \infty$; следовательно, $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$. Поэтому $P(z)$ не имеет линий уровня, а значит, имеет лишь конечное число нулей. При всех достаточно больших R имеем

$$\sum_{k=1}^m \text{ind}_{c_k} P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{|z|=R} P(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{|z|=R} (z^n + b_n z_\beta^n).$$

Аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что $(1/(2\pi)) \Delta_{|z|=R} (z^n + b_n z_\beta^n) = n$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 6 полином P принимает все значения из плоскости $\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w_0 \in \mathbb{C}$. Из теоремы 6 следует, что полином $P(z) - w_0$ имеет нули в $\mathbb{C}$. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следствие 1 остается верным, если условия теоремы 6 заменить на следующие: старшая степень $a_n z^n + b_n z_\beta^n$ полинома P не равна 0 при $z \neq 0$ и $\text{ind}_0(a_n z^n + b_n z_\beta^n) \neq 0$.

В то же время существуют L -полиномы, отображающие плоскость $\mathbb{C}$ на множество $\{\text{Re } w > 0\} \cup \{0\}$. Рассмотрим полином

$$P = z^2 - \beta^2 z_\beta^2, \quad -1 < \beta < 0.$$

Имеем $\text{Re } P = (1 - \beta^2)x^2 \geq 0$. В то же время $I_P = 0$ только при $x = 0$, т.е. отображение P взаимно однозначно в любой точке с условием $x \neq 0$. Поэтому любая точка полуплоскости $\{\text{Re } w > 0\}$ является внутренней точкой образа плоскости при отображении полиномом P . Так как $P = 0$ при $x = 0$, P отображает $\mathbb{C}$ на множество $\{\text{Re } w > 0\} \cup \{0\}$.

Автор выражает искреннюю благодарность П. В. Парамонову, К. Ю. Федоровскому и рецензенту за внимание к работе и ценные указания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge Tracts in Math., **156**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [2] М. Б. Балк, “Полианалитические функции и их обобщения”, *Комплексный анализ. Одна переменная – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **85**, ВИНТИ, М., 1991, 187–246.
- [3] G. C. Verchota, A. L. Vogel, “Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**:11 (1997), 4501–4535.
- [4] П. В. Парамонов, К. Ю. Федоровский, “О равномерной и C^1 -приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка”, *Матем. сб.*, **190**:2 (1999), 123–144.

- [5] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [6] G. Alessandrini, V. Nes, “Elliptic systems and material interpretation”, *Funct. Approx. Comment. Math.*, **40**, Part 1 (2009), 105–115.
- [7] M. B. Balk, M. Ya. Mazalov, “On uniqueness conditions for entire polyharmonic functions”, *Partial Differential and Integral Equations*, Int. Soc. Anal. Appl. Comput., **2**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999, 219–232.

А. Б. Зайцев

Московский государственный технический
университет радиотехники, электроники
и автоматики

E-mail: abzai75@mail.ru

Поступило

23.12.2012

Исправленный вариант

12.04.2013