Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Бекларян, Критерии существования инвариантной меры для групп гомеоморфизмов прямой, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 3, 335–339

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 03:57:31

Критерии существования инвариантной меры для групп гомеоморфизмов прямой

Л. А. Бекларян

В [1] (1975 г.) для конечно порожденной группы гомеоморфизмов прямой (окружности) Plante был получен критерий существования инвариантной меры. В представленной работе для группы гомеоморфизмов прямой (окружности), в которой каждая конечно порожденная подгруппа удовлетворяет условиям Plante, получен критерий существования инвариантной меры.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10227

Введение. В работе Plante [1] (1975) впервые был сформулирован критерий существования инвариантной меры (необходимое и достаточное условие), но только лишь для конечно порожденной группы гомеоморфизмов прямой (окружности). Такой критерий был сформулирован в терминах роста элементов орбит действия, и он не может быть распространен на группы, не являющиеся конечно порожденными.

В работе автора [2] (1993) для произвольной группы гомеоморфизмов прямой (окружности) также был получен критерий существования инвариантной меры. Полученный критерий, переформулированный в иных терминах, в случае окружности является неутраченным усилением теоремы Боголюбова–Крылова–Дейя о существовании инвариантной меры для аменабельной группы (признак существования инвариантной меры).

Вместе с тем, оставался открытым вопрос о существовании инвариантной меры для групп, имеющих инвариантную меру для каждой конечно порожденной подгруппы. Очевидно, что для исходной группы выполнение критерия Plante для каждой конечно порожденной подгруппы носит локальный характер. Заметим, что для конечно порожденных групп гомеоморфизмов прямой, а также групп с инвариантной мерой, минимальное множество не пусто [3]. Приведенный в статье пример показывает, что условие непустоты минимального множества исходной группы оказывается недостаточным для гарантирования существования инвариантной меры. Условие, гарантирующее существование инвариантной меры, является условием нелокального типа и имеет следующий вид: существует такой конечный интервал, что для каждой конечно порожденной подгруппы носитель этой инвариантной

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00768-а) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5998.2012.1).

меры имеет с ним непустое пересечение. Несколько видоизменив это условие на более легко проверяемое условие, мы можем вместо критерия существования инвариантной меры получить признак существования инвариантной меры (достаточное условие). Видоизмененное условие имеет следующую формулировку: существует конечно порожденная подгруппа с не дискретным минимальным множеством.

1. Предварительные сведения и основной результат. В дальнейшем через $\text{Номео}_+(\mathbb{X})$, $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1$ будем обозначать группу всех гомеоморфизмов $\mathbb{X}$, сохраняющих ориентацию. Определим подмножество G^S группы G как объединение стабилизаторов

$$G^S = \bigcup_{t \in \mathbb{X}} St_G(t).$$

Для группы $G \subseteq \text{Номео}_+(\mathbb{X})$ важной топологической характеристикой является минимальное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Минимальное множество* группы $G \subseteq \text{Номео}_+(\mathbb{X})$ – это замкнутое G -инвариантное подмножество $\mathbb{X}$, не содержащее собственных замкнутых G -инвариантных подмножеств. Если минимальное множество отсутствует, то по определению будем полагать, что оно пустое.

Важность минимальных множеств определяется тем, что в случае их “нетривиальности” орбиты действия обладают некоторыми каноническими свойствами, а сами минимальные множества определяют носители метрических инвариантов.

Другой топологической характеристикой является множество

$$\text{Fix } G^S = \{t \in \mathbb{X} : \forall g \in G^S, g(t) = t\}.$$

ТЕОРЕМА 1 [4]. Пусть $G \subseteq \text{Номео}_+(\mathbb{R})$. Тогда справедливо одно из следующих взаимоисключающих утверждений:

- а) любое минимальное множество $E_\alpha(G)$, $\alpha \in \mathcal{A}$, дискретно и принадлежит множеству $\text{Fix } G^S$, а множество $\text{Fix } G^S$ состоит из объединения минимальных множеств, т.е. $\text{Fix } G^S = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha(G)$;
- б) минимальное множество является совершенным нигде не плотным подмножеством $\mathbb{R}$; оно единственное, содержится в замыкании орбиты $\overline{G(t)}$ произвольной точки $t \in \mathbb{R}$ и обозначается через $E(G)$;
- в) минимальное множество $E(G)$ совпадает с $\mathbb{R}$;
- г) минимальное множество пустое.

Установим связь между минимальными множествами исходной группы и ее подгруппы.

ТЕОРЕМА 2 [3]. Пусть $G \subseteq \text{Номео}_+(\mathbb{X})$. Если для подгруппы $\Gamma \subseteq G$ минимальное множество $E(\Gamma)$ не пусто и не дискретно, то $E(\Gamma) \subseteq E(G)$.

Сформулируем критерий существования инвариантной меры в терминах топологических характеристик.

ТЕОРЕМА 3 [2]. Пусть $G \subseteq \text{Номео}_+(\mathbb{X})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) существует борелевская (вероятностная, в случае $\mathbb{X} = \mathbb{S}^1$) мера μ , конечная на компактах и инвариантная относительно группы G ;
- 2) множество $\text{Fix } G^S$ не пусто.

Для конечно порожденных групп гомеоморфизмов прямой Plante [1] удалось сформулировать критерий в терминах асимптотических характеристик исходной группы: существование инвариантной борелевской меры эквивалентно наличию орбиты действия субэкспоненциального роста.

Перейдем к формулировке основного результата. Существование инвариантной борелевской меры для подгруппы $\Gamma \subseteq G$, эквивалентное условию $\text{Fix } \Gamma^S \neq \emptyset$ (теорема 3), носит локальный характер по отношению к исходной группе G . Для существования инвариантной меры для исходной группы G потребуется условие на саму группу G , что может гарантировать непустоту носителя меры.

ТЕОРЕМА А. Пусть $G \subseteq \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G , необходимо и достаточно, чтобы нашелся конечный замкнутый интервал I , для всякой конечно порожденной подгруппы $\Gamma \subseteq G$ существовала инвариантная мера и выполнялось условие

$$\text{Fix } \Gamma^S \cap I \neq \emptyset. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Пусть $\{\Gamma_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ множество всех конечно порожденных подгрупп группы G . Очевидно, что

$$\text{Fix } G^S = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} \text{Fix } \Gamma_\alpha^S. \quad (2)$$

Из условия (1) следует, что $\text{Fix } \Gamma_\alpha^S \cap I$, $\alpha \in \mathcal{A}$, является центрированной системой компактов. Следовательно, $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (\text{Fix } \Gamma_\alpha^S \cap I) \neq \emptyset$. Тогда в силу условия (2) выполняется соотношение $\text{Fix } G^S \neq \emptyset$ и по теореме 3 для группы G существует инвариантная мера.

Необходимость. Пусть для группы G существует инвариантная мера. Тогда эта же мера будет инвариантной для любой конечно порожденной подгруппы. По теореме 3 имеет место условие $\text{Fix } G^S \neq \emptyset$. Так как для любой подгруппы $\Gamma \subseteq G$ имеет место вложение $\text{Fix } G^S \subseteq \text{Fix } \Gamma^S$, отсюда и следует условие (1).

Для групп $G \subseteq \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ из более узкого класса условие (1) может быть опущено.

ТЕОРЕМА В. Пусть $G \subseteq \text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ и имеется некоторая конечно порожденная подгруппа $Q \subseteq G$ с не дискретным минимальным множеством. Для существования борелевской меры, конечной на компактах и инвариантной относительно группы G , необходимо и достаточно, чтобы для всякой конечно порожденной подгруппы $\Gamma \subseteq G$ существовала инвариантная мера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть для группы G существует инвариантная мера. Тогда эта же мера будет инвариантной для любой конечно порожденной подгруппы.

Достаточность. Пусть $\{\Gamma_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ множество всех конечно порожденных подгрупп группы G . Очевидно, что при некотором $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ имеет место равенство $\Gamma_{\bar{\alpha}} = Q$.

Для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ группа $\langle \Gamma_\alpha, \Gamma_{\bar{\alpha}} \rangle$ также является конечно порожденной и поэтому при некотором $\beta \in \mathcal{A}$ справедливо равенство $\Gamma_\beta = \langle \Gamma_\alpha, \Gamma_{\bar{\alpha}} \rangle$. По теореме 2 имеет место вложение $E(\Gamma_{\bar{\alpha}}) \subseteq E(\Gamma_\beta)$, а по теореме 1 будет справедливым вложение $E(\Gamma_\beta) \subseteq \text{Fix } \Gamma_\beta^S$. В таком случае получим вложение $E(\Gamma_{\bar{\alpha}}) \subseteq \text{Fix } \Gamma_\beta^S$. Очевидно, что имеет место и другое вложение $\text{Fix } \Gamma_\beta^S \subseteq \text{Fix } \Gamma_\alpha^S$. Окончательно получим, что для всякого $\alpha \in \mathcal{A}$ справедливо вложение $E(\Gamma_{\bar{\alpha}}) \subseteq \text{Fix } \Gamma_\alpha^S$.

Выберем конечный замкнутый интервал I со свойством $E(\Gamma_{\bar{\alpha}}) \cap I \neq \emptyset$. Тогда для всякого $\alpha \in \mathcal{A}$ будет выполняться условие $\text{Fix } \Gamma_\alpha^S \cap I \neq \emptyset$, т.е. для группы G выполняется условие (1) и по теореме А для группы G существует инвариантная мера.

В теореме В условие о существовании конечно порожденной подгруппы с не дискретным минимальным множеством не может быть опущено.

ПРИМЕР 1. Определим группу $G = \langle g_1, g_2, \dots \rangle$, где при любом $i = 1, 2, \dots$ гомеоморфизм g_i определяется следующим образом:

$$g_i(t) = \begin{cases} t, & t \in (-\infty, -(i+1)), \\ \frac{3}{2}t + \frac{(i+1)}{2}, & t \in [-(i+1), -i], \\ t + \frac{1}{2}, & t \in [-i, i], \\ \frac{1}{2}t + \frac{(i+1)}{2}, & t \in (i, i+1], \\ t, & t \in (i+1, +\infty). \end{cases}$$

Для всякой конечно порожденной подгруппы $\Gamma \subseteq G$ выполняется условие $\text{Fix } \Gamma^S \neq \emptyset$ и поэтому существует инвариантная мера. Минимальные множества конечно порожденных подгрупп $\Gamma \subseteq G$ дискретные. Для исходной группы G справедливо условие $\text{Fix } G^S = \emptyset$ и поэтому не существует инвариантной меры. Следовательно, в теореме В условие о существовании конечно порожденной подгруппы $Q \subseteq G$ с не дискретным минимальным множеством является неустранимым.

Более того, построенная группа G обладает еще рядом свойств, необходимых для существования инвариантной меры – для группы G минимальное множество также не пусто и совпадает со всей прямой $\mathbb{R}$. Чтобы установить этот факт, заметим, что точка $\bar{t} = 2$ принадлежит замыканию орбиты любой точки $t \in \mathbb{R}$. Тогда минимальное множество исходной группы G , если оно непустое, должно совпадать с замыканием орбиты точки $\bar{t} = 2$. В свою очередь, не сложно заметить, что орбита точки $\bar{t} = 2$ совпадает со всей прямой. Поэтому в теореме А условие (1) не может быть заменено на условие топологического характера в виде непустого минимального множества всей исходной группы G , даже если минимальное множество совпадает со всей прямой $\mathbb{R}$.

ПРИМЕР 2. Определим группу $G = \langle 1/n, n = 1, 2, \dots \rangle$.

Мера Лебега является инвариантной для группы G , поэтому она инвариантна и для любой подгруппы. Более того, минимальное множество такой группы G совпадает со всей прямой. С другой стороны, для любой конечно порожденной подгруппы минимальное множество дискретное. Следовательно, условие в теореме В

о существовании конечно порожденной подгруппы с не дискретным минимальным подмножеством, в множестве всех групп с инвариантной мерой выделяет собственное подмножество.

Автор признателен всем участникам семинара “Динамические системы и эргодическая теория” и его руководителям Д. В. Аносову и А. М. Степину за полезные советы и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. F. Plante, “Foliations with measure preserving holonomy”, *Ann. of Math.* (2), **102**:2 (1975), 327–361.
- [2] Л. А. Бекларян, “Инвариантные и проективно инвариантные меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию”, *Докл. РАН*, **332**:6 (1993), 679–681.
- [3] Л. А. Бекларян, “К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. III. ω -проективно-инвариантные меры”, *Матем. сб.*, **190**:4 (1999), 43–62.
- [4] Л. А. Бекларян, “К вопросу о классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию. II. Проективно-инвариантные меры”, *Матем. сб.*, **187**:4 (1996), 3–28.

Л. А. Бекларян

Центральный экономико-математический

институт РАН, г. Москва

E-mail: beklaryan@mailfrom.ru

Поступило

12.10.2012

Исправленный вариант

04.06.2013