Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина, О неразрешимости проблемы сопряженности подгрупп в группе крашенных кос R_5 , *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 15–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1023>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:05:52

УДК 519.4

О НЕРАЗРЕШИМОСТИ ПРОБЛЕМЫ СОПРЯЖЕННОСТИ ПОДГРУПП В ГРУППЕ КРАШЕНЫХ КОС R_5

В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина

Основная цель работы – доказательство неразрешимости проблемы сопряженности подгрупп в R_5 .

Библиография: 8 названий.

Группа кос B_{n+1} задается образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ и определяющими соотношениями

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad |i-j| > 1.$$

Известно, что существует гомоморфизм группы B_{n+1} в группу подстановок S_{n+1} , при котором образующие σ_i отображаются в транспозиции $(i, i+1)$, $i = 1, \dots, n$. Коса, реализующая единичную подстановку, называется *крашеной*. Через R_{n+1} обозначается подгруппа крашенных кос группы B_{n+1} , через $s_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq n+1$) – коса $\sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \dots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \dots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}$ группы B_{n+1} . В [1] В. Бурау доказал, что элементы $s_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq n+1$) порождают группу R_{n+1} . Через U_j ($j = 1, \dots, n$) обозначается подгруппа группы крашенных кос R_{n+1} , порожденная элементами $s_{1,j+1}, s_{2,j+1}, \dots, s_{j,j+1}$. В [2] Э. Артин доказал, что U_j – свободная группа, порожденная свободными образующими $s_{1,j+1}, s_{2,j+1}, \dots, s_{j,j+1}$, и что всякая крашенная коса из R_{n+1} однозначно представима в виде произведения $F_1 F_2 \dots F_n$, где $F_j \in U_j$ ($j = 1, \dots, n$).

Пусть U_{m-1} – свободная группа с образующими $s_{1,m}, s_{2,m}, \dots, s_{m-1,m}$. Для любых r, p ($1 \leq r < p < m$), любого i ($1 < i < m$) и любого $\xi = \pm 1$ справедливы соотношения [3]

$$s_{r,p}^{-\xi} s_{i,m} s_{r,p}^{\xi} = \begin{cases} s_{i,m}, & \text{если } r < p < i < m \text{ или } i < r < p < m, \\ (s_{r,m} s_{p,m})^{\xi} s_{i,m} (s_{r,m} s_{p,m})^{-\xi}, & \text{если } r < i = p < m \text{ или } r = i < p < m, \\ (s_{r,p} s_{p,m})^{\xi} (s_{p,m} s_{r,m})^{-\xi} s_{i,m} (s_{p,m} s_{r,m})^{\xi} (s_{r,m} s_{p,m})^{-\xi}, & \text{если } r < i < p < m. \end{cases} \quad (1)$$

В [4] доказана неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для групп R_{n+1} ($n \geq 5$). Цель данной работы – доказательство неразрешимости проблемы сопряженности подгрупп для группы R_5 . В работе используется следующая

ТЕОРЕМА 1 [5]. *Группа B_4 не содержит подгруппы вида $F_2 \times F_2$, где F_2 – свободная группа ранга 2.*

Обозначим через d слово $\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\sigma_4$, а через τ переписывающий процесс слов из R_5 в образующих $s_{i,j}$. Тогда $\tau(d) = s_{1,5}s_{2,5}s_{3,5}s_{4,5}$. Рассмотрим в B_5 подгруппы $\Pi = \langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle \times \langle \sigma_4^2, d \rangle$, $H_1 = \langle \sigma_1^4\sigma_4^2, \sigma_2^4d, R_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4), \dots, R_n(\sigma_1^4, \sigma_2^4) \rangle$, $H_2 = \langle W, H_1 \rangle$, где $W \in \Pi$ и $R_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$ ($i = 1, \dots, n$) – слова в образующих σ_1^4, σ_2^4 .

ЛЕММА 1. *Подгруппы $\langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle$, $\langle \sigma_4^2, d \rangle$ группы B_5 являются свободными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi: B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2; \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle \rightarrow G = \langle x, y; x^3, y^2 \rangle$, отображающий σ_1 в x^2y , σ_2 в yx^2 . Заметим, что в произведениях $\varphi(\sigma_i^{4\xi_1})\varphi(\sigma_j^{4\xi_2})$ ($i, j = 1, 2$ и $i \neq j$ при $\xi_1 = -\xi_2$) максимум сокращается по одному слогу из $\varphi(\sigma_i^{4\xi_1})$ и $\varphi(\sigma_j^{4\xi_2})$ и по одному – объединяется.

Пусть $\langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle$ не является свободной. Тогда несократимое слово, записанное в образующих σ_1^4, σ_2^4 , равно 1 в группе B_3 . Поэтому образ этого слова равен 1 и в G . Но из сделанного выше замечания следует, что это невозможно.

Группа $\langle \sigma_4^2, d \rangle$ является подгруппой U_4 , причем σ_4^2 и d могут быть включены в систему свободных образующих U_4 , поэтому $\langle \sigma_4^2, d \rangle$ свободна.

ТЕОРЕМА 2. *Если $z^{-1}H_1z = H_2$, где $z \in R_5$, то существует $z^* = L_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4) \times L_2(\sigma_4^2, d)$ такое, что $z^{*-1}H_1z^* = H_2$ в R_5 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим z в виде $z = F_1F_2F_3F_4$, где $F_j \in U_j$.

Из равенства $z^{-1}H_1z = H_2$ следует выполнение равенств системы:

$$F_4^{-1}F_3^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^4\sigma_2^2F_1F_2F_3F_4 = \varphi_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4)\varphi_2(\sigma_4^2, d), \quad (2)$$

$$F_4^{-1}F_3^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^4dF_1F_2F_3F_4 = \varphi_3(\sigma_1^4, \sigma_2^4)\varphi_4(\sigma_4^2, d),$$

$$F_4^{-1}F_3^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}R_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4)F_1F_2F_3F_4 = \varphi_{5,i}(\sigma_1^4, \sigma_2^4)\varphi_{6,i}(\sigma_4^2, d), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Заметим, что в (2), (3) все слова F_j ($j = 1, \dots, 4$) записаны в образующих σ_i ($i = 1, \dots, 4$).

ЛЕММА 2. *В R_5 подсистема (2) системы (2), (3) эквивалентна системе*

$$F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^4F_1F_2 = \varphi_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4), \quad F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^4F_1F_2 = \varphi_3(\sigma_1^4, \sigma_2^4); \quad (4)$$

$$(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^{-4}F_1F_2)F_3^{-1}(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^4F_1F_2)F_3 = 1, \quad (5)$$

$$(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{-4}F_1F_2)F_3^{-1}(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^4F_1F_2)F_3 = 1;$$

$$(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^{-4}F_1F_2)F_4^{-1}(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^4F_1F_2)F_3^{-1}\sigma_4^2F_3F_4 = \varphi_2(\sigma_4^2, d), \quad (6)$$

$$(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{-4}F_1F_2)F_4^{-1}(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^4F_1F_2)F_3^{-1}dF_3F_4 = \varphi_4(\sigma_4^2, d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем систему (2) следующим образом:

$$\begin{aligned} & (F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^4F_1F_2)(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^{-4}F_1F_2)F_3^{-1}(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^4F_1F_2)F_3 \\ & \times (F_3^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^{-4}F_1F_2F_3)F_4^{-1}(F_3^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^4F_1F_2F_3)F_3^{-1}\sigma_4^2F_3F_4 \\ & = \varphi_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4)\varphi_2(\sigma_4^2, d), \\ & (F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^4F_1F_2)(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{-4}F_1F_2)F_3^{-1}(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^4F_1F_2)F_3 \\ & \times (F_3^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{-4}F_1F_2F_3)F_4^{-1}(F_3^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^4F_1F_2F_3)F_3^{-1}dF_3F_4 \\ & = \varphi_3(\sigma_1^4, \sigma_2^4)\varphi_4(\sigma_4^2, d). \end{aligned} \quad (7)$$

В силу однозначности представления всякого элемента $y \in R_{n+1}$ в виде $y = y_1 y_2 \cdots y_n$, где $y_j \in U_j$, из (7) получаем систему (4), (5) и систему

$$\begin{aligned} (F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^{-4} F_1 F_2 F_3) F_4^{-1} (F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_1^4 F_1 F_2 F_3) F_3^{-1} \sigma_4^2 F_3 F_4 &= \varphi_2(\sigma_4^2, d), \\ (F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^{-4} F_1 F_2 F_3) F_4^{-1} (F_3^{-1} F_2^{-1} F_1^{-1} \sigma_2^4 F_1 F_2 F_3) F_3^{-1} d F_3 F_4 &= \varphi_4(\sigma_4^2, d). \end{aligned} \quad (8)$$

Используя (5), преобразуем систему (8) к виду (6). Обратное утверждение очевидно.

Фундаментальный элемент

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_n \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1} \cdots \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$$

группы B_{n+1} обозначается через Δ [5] и Δ^2 лежит в центре B_{n+1} . Графическое равенство слов будем обозначать через “ $\equiv$ ”.

ЛЕММА 3. Пусть H_1, H_2 – две конечно порожденные подгруппы из $\langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle$ и ни одна из них не сопряжена с подгруппами вида $\langle \sigma_j^{4t} \rangle$ ($j = 1, 2, t \in \mathbb{Z}$). Если при этом существует $z^* \in B_3$ такое, что $z^* H_1 z^{*-1} = H_2$ в B_3 , то $z^* = \Delta^k S(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$, $k \in \mathbb{Z}$, где Δ – фундаментальный элемент B_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2; \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi: B_3 \rightarrow G = \langle x, y; x^3, y^2 \rangle$, переводящий σ_1 в $x^2 y$, σ_2 в yx^2 . Тогда

$$\varphi(\sigma_1^4) = (x^2 y)^4; \quad \varphi(\sigma_2^4) = (yx^2)^4.$$

Обозначим через z слово $\varphi(z^*)$.

В подгруппе $\varphi(H_1)$ выберем циклически несократимое в образующих $\varphi(\sigma_1^4), \varphi(\sigma_2^4)$ слово T . Этого всегда можно добиться, сопрягая $\varphi(H_1), \varphi(H_2)$ элементами подгруппы $\langle \varphi(\sigma_1^4), \varphi(\sigma_2^4) \rangle$.

Исходя из условия леммы, считаем, что T не есть слово σ_j^{4t} ($j = 1, 2, t \in \mathbb{Z}$). Возведем T в степень m , где $m \in \mathbb{N}$ и $m > 1$, и пусть $W = T^m$.

Из равенства $z\varphi(H_1)z^{-1} = \varphi(H_2)$ следует, что z можно выбрать минимальным в двойном смежном классе $\varphi(H_1)z^{-1}\langle \varphi(\sigma_1^4), \varphi(\sigma_2^4) \rangle$, при необходимости сопрягая обе части данного равенства словами из $\langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle$. Из равенства $zWz^{-1} = V$, где $V \in \varphi(H_2)$, получаем, что zWz^{-1} записывается через $\varphi(\sigma_1^4), \varphi(\sigma_2^4)$.

Возможны случаи:

- 1) $W \equiv (x^2 y)^{4\xi} W' (yx^2)^{4\eta}$, $\xi = \pm 1, \eta = \pm 1$;
- 2) $W \equiv (yx^2)^{4\xi} W' (yx^2)^{4\xi}$, $\xi = \pm 1$;
- 3) $W \equiv (yx^2)^{4\xi} W' (x^2 y)^{4\eta}$, $\xi = \pm 1, \eta = \pm 1$;
- 4) $W \equiv (x^2 y)^{4\xi} W' (x^2 y)^{4\xi}$, $\xi = \pm 1$.

Случай 1) при $\xi = \eta = -1$ сводится к случаю 1) при $\xi = \eta = 1$ сопряжением подгрупп $\varphi(H_1), \varphi(H_2)$ элементом y и заменой W словом W^{-1} , так как сопряжение элементом $y = \varphi(\Delta)$ в группе $\varphi(B_3)$ является инволютивным автоморфизмом.

Случай 2) при $\xi = -1$ сводится к случаю 2) при $\xi = 1$ заменой W словом W^{-1} .

Случай 3) сводится к случаю 1) сопряжением подгрупп $\varphi(H_1), \varphi(H_2)$ элементом y . Тем же способом случай 4) сводится к случаю 2).

Заметим, как и в доказательстве леммы 1, что в произведениях $\varphi(\sigma_i^{4\xi_1})\varphi(\sigma_j^{4\xi_2})$ ($i, j = 1, 2$ и $i \neq j$ при $\xi_1 = -\xi_2$) максимум сокращается по одному слогу из $\varphi(\sigma_i^{4\xi_1})$ и $\varphi(\sigma_j^{4\xi_2})$ и по одному – объединяется.

Будем считать, что в произведении $zW^\xi z^{-1}$, $\xi = \pm 1$, сокращения происходят в подслове $W^\xi z^{-1}$.

Рассмотрим случай 1) при $\xi = \eta = 1$, т.е. $W = (x^2y)^4W'(yx^2)^4$.

При этом возможно:

- а) $z = z'yx$;
- б) $z = z'yx^2$.

Рассмотрим случай а). Имеем $zWz^{-1} = z'yx(x^2y)^4W'(yx^2)^4x^{-1}y^{-1}z'^{-1}$. Возьмем обратное:

$$zW^{-1}z^{-1} = z'yx(x^{-2}y)^4W'(yx^{-2})^4x^{-1}yz'^{-1} = z'yx^2yxyxyxyW'^{-1}(yx^{-2})^3z'^{-1}.$$

В силу выбора z и W следует, что в данном равенстве сокращения не затрагивают z' . Так как $zW^{-1}z^{-1}$ переписывается в образующих $\varphi(\sigma_1^4)$, $\varphi(\sigma_2^4)$, в силу минимальности z и сделанного выше замечания слоговая длина z' не превосходит 4 и z' является подсловом $\varphi(\sigma_i^{2\xi})$ ($i = 1, 2$, $\xi = \pm 1$). Таким образом, z' может быть равным 1, x , x^2 , yx , yx^2 , x^2yx^2 , $yxux$, yx^2yx^2 , xyx , x^2yx , yx^2yx .

Если z' есть 1, x , x^2 , yx , yx^2 , то легко убедиться, что слово zWz^{-1} нельзя переписать в образующих $\varphi(\sigma_1^4)$, $\varphi(\sigma_2^4)$.

Если z' равно x^2yx^2 , $yxux$, yx^2yx^2 , xyx , x^2yx , yx^2yx , то z не является минимальным в классе $\varphi(H_1)z^{-1}\langle\varphi(\sigma_1^4)\varphi(\sigma_2^4)\rangle$.

Аналогично рассматривается случай б).

В случае 1) при $\xi = -1$, $\eta = 1$ и $\xi = 1$, $\eta = -1$ и в случае 2) при $\xi = 1$ в слове zWz^{-1} либо z , либо z^{-1} не затрагивается сокращениями, поэтому слоговая длина z не превосходит 4 и z , как и выше, есть подслово $\varphi(\sigma_i^{2\xi})$ ($i = 1, 2$, $\xi = \pm 1$).

Проверка таких z не дает положительных результатов.

Если в произведении zWz^{-1} ни z , ни z^{-1} не вступают с W в сокращения, то в силу равенства $zWz^{-1} = V$, где $V \in \varphi(H_2)$, z является подсловом $\varphi(\sigma_i^{2\xi})$ ($i = 1, 2$, $\xi = \pm 1$). Рассматривая эти подслова, получаем, что z может быть либо 1, либо y , где $y = \varphi(\Delta)$.

Возвращаясь в группу B_3 , получаем, что $z^* = \Delta^k S(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть H_1, H_2 – две конечно порожденные подгруппы из $\langle\sigma_1^4, \sigma_2^4\rangle$, и ни одна из них не сопряжена с подгруппами вида $\langle\sigma_j^{4t}\rangle$ ($j = 1, 2$, $t \in \mathbb{Z}$). Если при этом существует $z^* \in R_3$ такое, что $z^*H_1z^{*-1} = H_2$ в R_3 , то $z^* = \Delta^{2k} S(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$, $k \in \mathbb{Z}$, где Δ – фундаментальный элемент B_3 .

ЛЕММА 4. Если $z' = F_1F_2$ ($F_i \in U_i$, $i = 1, 2$) удовлетворяет системе (4), то существует коса $z'' = L_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$, являющаяся решением (4).

Доказательство непосредственно следует из следствия леммы 3.

ЛЕММА 5. Если $F_3 \in U_3$ является решением системы (5), то $\tau(F_3) = (s_{1,4}, s_{2,4}, s_{3,4})^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, коса $F_3 = (\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3)^k$, $k \in \mathbb{Z}$, является решением системы (5), причем $\tau(F_3) = (s_{1,4}s_{2,4}s_{3,4})^k$. Если существует коса $X \in U_3$, являющаяся решением (5) и не равная степени элемента $\sigma_3\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3$, то в силу принадлежности X и F_3 свободной группе U_3 и в силу равенства (5) в B_4 содержится прямое произведение двух свободных групп ранга 2 $\langle F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^4F_1F_2, F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^4F_1F_2 \rangle \times \langle X, F_3 \rangle$, что противоречит теореме 1.

ЛЕММА 6. В R_5 имеет место соотношение $\tau(d)(s_{1,4}s_{2,4}s_{3,4}) = (s_{1,4}s_{2,4}s_{3,4})\tau(d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно используя равенства (1) получаем доказательство данного утверждения.

ЛЕММА 7. В R_5 имеет место соотношение

$$(s_{1,4}s_{2,4}s_{3,4})^{-k}s_{4,5}(s_{1,4}s_{2,4}s_{3,4})^k = \tau^k(d)s_{4,5}\tau^{-k}(d), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство проводится по индукции, используя соотношения (1) и лемму 6.

ЛЕММА 8. Пусть имеет место система (2) и соответственно выполнена эквивалентная ей система (4)–(6). Тогда если $F_4 \in U_4$ удовлетворяет системе (6), то $F_4 = F_4(\sigma_4^2, d)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $|F_4|$ длину слова $F_4 \in U_4$ в свободных образующих $s_{4,5}, s_{3,5}, s_{2,5}, \tau(d)$. Возьмем $k \in \mathbb{N}$ такое, что k намного больше $2|F_4|$. Возведем равенства (2) в k -ю степень. Получим

$$\begin{aligned} F_4^{-1}F_3^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^{4k}\sigma_4^{2k}F_1F_2F_3F_4 &= \varphi_1^k(\sigma_1^4, \sigma_2^4)\varphi_2^k(\sigma_4^2, d), \\ F_4^{-1}F_3^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{4k}d^kF_1F_2F_3F_4 &= \varphi_3^k(\sigma_1^4, \sigma_2^4)\varphi_4^k(\sigma_4^2, d). \end{aligned} \quad (9)$$

Проводя рассуждения, изложенные в лемме 2, легко показать, что система (9) эквивалентна системе

$$F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^{4k}F_1F_2 = \varphi_1^k(\sigma_1^4, \sigma_2^4), \quad F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{4k}F_1F_2 = \varphi_3^k(\sigma_1^4, \sigma_2^4); \quad (10)$$

$$(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^{-4k}F_1F_2)F_3^{-1}(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^{4k}F_1F_2)F_3 = 1, \quad (11)$$

$$(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{-4k}F_1F_2)F_3^{-1}(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{4k}F_1F_2)F_3 = 1; \quad (12)$$

$$(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^{-4k}F_1F_2)F_4^{-1}(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_1^{4k}F_1F_2)F_3^{-1}\sigma_4^{2k}F_3F_4 = \varphi_2^k(\sigma_4^2, d),$$

$$(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{-4k}F_1F_2)F_4^{-1}(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{4k}F_1F_2)F_3^{-1}d^kF_3F_4 = \varphi_4^k(\sigma_4^2, d).$$

Решения систем (10) и (11) удовлетворяют соответственно леммам 4 и 5. Используя лемму 6 и переписывающий процесс τ , второе равенство из (12) перепишем следующим образом:

$$\tau(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{-4k}F_1F_2)\tau^{-1}(F_4)\tau(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{4k}F_1F_2)\tau^k(d)\tau(F_4) = \tau^k(\varphi_4(\sigma_4^2, d)).$$

Используя равенство $\tau(F_2^{-1}F_1^{-1}\sigma_2^{4k}F_1F_2) = \varphi_3^k(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2)$, преобразуем данное соотношение к виду

$$\varphi_3^{-k}(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2)\tau^{-1}(F_4)\varphi_3^k(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2)\tau^k(d)\tau(F_4) = \varphi_4^k(s_{4,5}, \tau(d)). \quad (13)$$

Пусть теперь

$$\tau(F_4) = \prod_{i=1}^n Q_i(s_{4,5}, \tau(d)) P_i(s_{2,5}, s_{3,5}),$$

где $Q_1(s_{4,5}, \tau(d))$ и $P_n(s_{2,5}, s_{3,5})$ могут быть равны 1.

Применяя соотношения (1) к произведению

$$\begin{aligned} & \varphi_3^{-k}(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2) \tau^{-1}(F_4) \varphi_3^k(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2) \\ &= \varphi_3^{-k}(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2) \left(\prod_{i=n}^1 P_i^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) Q_i^{-1}(s_{4,5}, \tau(d)) \right) \varphi_3^k(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2), \end{aligned}$$

получаем

$$\varphi_3^{-k}(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2) \tau^{-1}(F_4) \varphi_3^k(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2) = \prod_{i=n}^1 P_i^{-1}(s_{1,5}, s_{2,5}, s_{3,5}) Q_i^{-1}(s_{4,5}, \tau(d)),$$

где

$$P_i'^{-1}(s_{1,5}, s_{2,5}, s_{3,5}) = \varphi_3^{-k}(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2) P_i^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) \varphi_3^k(s_{1,2}^2, s_{2,3}^2), \quad i = 1, \dots, n.$$

Элемент $s_{1,5}$ можно записать как $s_{1,5} = \tau(d) s_{4,5}^{-1} s_{3,5}^{-1} s_{2,5}^{-1}$. Поэтому

$$P_i'^{-1}(s_{1,5}, s_{2,5}, s_{3,5}) = P_i'^{-1}(\tau(d) s_{4,5}^{-1} s_{3,5}^{-1} s_{2,5}^{-1}, s_{2,5}, s_{3,5}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Представим теперь каждое $P_i'^{-1}$ в несократимой форме в свободных образующих $s_{4,5}, s_{3,5}, s_{2,5}, \tau(d)$ подгруппы U_4 , т.е.

$$\begin{aligned} P_i'^{-1}(s_{1,5}, s_{2,5}, s_{3,5}) &= (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,1}} P_{i,1}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,2}} \\ &\quad \times P_{i,2}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) \cdots (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,m_i}} P_{i,m_i}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}), \end{aligned} \quad (14)$$

где $t_{i,1}$ может быть равно 0, а $P_{i,m_i}'^{-1}$ — равно 1.

Подставим полученное выражение (14) в левую часть (13). Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=n}^1 (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,1}} P_{i,1}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,2}} P_{i,2}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) \cdots (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,m_i}} \right. \\ & \quad \times P_{i,m_i}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}), Q_i^{-1}(s_{4,5}, \tau(d)) \Big) \tau^k(d) \left(\prod_{i=n}^1 Q_i(s_{4,5}, \tau(d)) P_i(s_{2,5}, s_{3,5}) \right) \\ &= \varphi_4^k(s_{4,5}, \tau(d)). \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть

$$\begin{aligned} & \prod_{i=n}^1 (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,1}} P_{i,1}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,2}} P_{i,2}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}) (\tau(d) s_{4,5}^{-1})^{t_{i,m_i}} \\ & \quad \times P_{i,m_i}'^{-1}(s_{2,5}, s_{3,5}), Q_i^{-1}(s_{4,5}, \tau(d)) = T, \\ & \prod_{i=1}^n Q_i(s_{4,5}, \tau(d)) P_i(s_{2,5}, s_{3,5}) = S. \end{aligned}$$

Тогда (15) примет вид $T \tau^k(d) D = \varphi_4^k(s_{4,5}, \tau(d))$.

Выполним сокращения в T в свободной группе $\langle \tau(d), s_{2,5}, s_{3,5}, s_{4,5} \rangle$, причем сокращения между Q_i и $(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^t$ будем выполнять следующим образом. Если

$$(Q_i(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^t)^\eta = (Q'_i s_{4,5}^{-1}(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^{t'})^\eta,$$

где $|t'| < |t|$ и $\eta = \pm 1$, либо

$$(Q_i(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^t)^\xi = (Q'_i \tau^{-1}(d)(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^{t'})^\xi,$$

где $|t'| < |t|$ и $\xi = \pm 1$, то в первом случае к Q'_i присоединяем $s_{4,5}^{-1}$, во втором — $\tau^{-1}(d)$. При этом $|Q'_i| \leq |Q_i|$. В результате выполненных сокращений возможны следующие случаи:

- 1) $T = 1$;
- 2) $T = T_1 P(s_{2,5}, s_{3,5})$;
- 3) $T = T_1 P(s_{2,5}, s_{3,5}) (\tau(d)s_{4,5}^{-1})^p Q'(\tau(d), s_{4,5})$;
- 4) $T = T_1 (\tau(d)s_{4,5}^{-1})^p, p \neq 0$.

В случае 1) (15) примет вид

$$\tau^k(d) \left(\prod_{i=1}^n Q_i(s_{4,5}, \tau(d)) P_i(s_{2,5}, s_{3,5}) \right) = \varphi_4^k(s_{4,5}, \tau(d)).$$

Так как $\sum_{i=1}^n |Q_i| < 2|F_4| \ll k$, в последнем равенстве $\tau^k(d)$ не может полностью сократиться; более того, это равенство рассматривается в свободной группе со свободными образующими $\tau(d), s_{2,5}, s_{3,5}, s_{4,5}$, поэтому для того чтобы оно было справедливо, все $P_i(s_{2,5}, s_{3,5})$ должны быть равны 1.

Случай 2) аналогичен случаю 1).

В случае 3) (15) имеет вид

$$T_1 P(s_{2,5}, s_{3,5}) (\tau(d)s_{4,5}^{-1})^p Q'(\tau(d), s_{4,5}) \tau^k(d) S = \varphi_4^k(s_{4,5}, \tau(d)).$$

Заметим, что из сказанного выше $Q' \leq \sum_{i=1}^n |Q_i| \leq |F_4| \ll k/2$, поэтому при сокращении в произведении $Q'(\tau(d), s_{4,5}) \tau^k(d) S$ останется какая-либо степень $\tau^{k'}(d)$, $k' > 1$, а при сокращении в произведении $(\tau(d)s_{4,5}^{-1})^p \tau^{k'}(d)$ может сократиться лишь один образующий $\tau^\xi(d)$, $\xi = \pm 1$. Поэтому и в данном случае все $P_i(s_{2,5}, s_{3,5})$ должны быть равны 1.

Случай 4) аналогичен случаю 3).

Из приведенных рассуждений следует доказательство леммы.

ЛЕММА 9. *Если имеет место (4)–(6), то существует коса $L_2(\sigma_4^2, d)$, удовлетворяющая системе*

$$L_2^{-1} \sigma_4^2 L_2 = \varphi_2(\sigma_4^2, d), \quad L_2^{-1} d L_2 = \varphi_4(\sigma_4^2, d). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 следует, что существует коса F_3 , являющаяся решением (5), такая, что $\tau(F_3) = (s_{1,4} s_{2,4} s_{3,4})^k$, $k \in \mathbb{Z}$. По лемме 7 $\tau^{-1}(F_3) s_{4,5} \tau(F_3) = \tau^k(d) s_{4,5} \tau^{-k}(d)$ или в B_5 $F_3^{-1} \sigma_4^2 F_3 = d^k \sigma_4^2 d^{-k}$. По лемме 8 $F_4 = F_4(\sigma_4^2, d)$. Положим $L_2 = d^{-k} F_4(\sigma_4^2, d)$. Тогда L_2 удовлетворяет системе (16).

Из лемм 4 и 9 следует доказательство теоремы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. В группе G неразрешима проблема сопряженности подгрупп, если не существует алгоритма, позволяющего для любых двух ее конечно порожденных подгрупп установить, сопряжены ли они в G или нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В группе G разрешима частная проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любой ее конечно порожденной подгруппы H и фиксированной конечно порожденной подгруппы H_0 установить, сопряжены ли они в G или нет.

ТЕОРЕМА 3. В группе R_5 неразрешима проблема сопряженности подгрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как указывалось выше, R_5 содержит в качестве подгруппы прямое произведение $\langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle \times \langle \sigma_4^2, d \rangle$ двух свободных групп ранга 2. Пусть

$$\{a_1, a_2; R_1(a_1, a_2), \dots, R_n(a_1, a_2)\}$$

– группа П. С. Новикова [6]. Возьмем в качестве фиксированной подгруппы

$$H_1 = \langle \sigma_1^4 \sigma_2^4, \sigma_4^2 d, R_1(\sigma_1^4, \sigma_2^4), \dots, R_n(\sigma_1^4, \sigma_2^4) \rangle,$$

где $R_i(\sigma_1^4, \sigma_2^4)$, $i = 1, \dots, n$, получены из определяющих слов группы Новикова. В [7] доказано, что если в прямом произведении двух свободных групп ранга 2 разрешима частная проблема сопряженности подгрупп, то разрешима частная проблема вхождения. А именно, для того чтобы определить, принадлежит ли произвольное слово W группы $\langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle \times \langle \sigma_4^2, d \rangle$ фиксированной подгруппе H_1 или нет, достаточно знать, будут ли сопряжены подгруппы H_1 и $\langle W, H_1 \rangle$. Из [7] и [8] следует, что в $\langle \sigma_1^4, \sigma_2^4 \rangle \times \langle \sigma_4^2, d \rangle$ неразрешима проблема сопряженности подгрупп. Из этого факта и теоремы 2 следует утверждение теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Burau W. Über Zopf-invarianten // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1932. V. 9. P. 117–124.
- [2] Artin E. Theory of braids // Ann. of Math. 1947. V. 48. P. 101–126.
- [3] Марков А. А. Основы алгебраической теории кос // Тр. МИАН. 1945. Т. 16. С. 1–54.
- [4] Добрынина И. В. О неразрешимости проблемы сопряженности подгрупп в группе крашенных кос R_{n+1} ($n \geq 5$) // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: ТГПИ, 1994. С. 62–70.
- [5] Акименков А. М. О подгруппах группы кос B_5 // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 6. С. 3–13.
- [6] Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп // Тр. МИАН. 1955. Т. 44. С. 3–143.
- [7] Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с объединением // Сб. научн. тр. кафедры высшей математики. Вып. 3. Тула: ТГПИ, 1975. С. 90–94.
- [8] Михайлова К. А. Проблема вхождения для прямых произведений групп // Матем. сб. 1966. Т. 70. № 2. С. 241–251.

Тульский государственный педагогический университет
им. Л. Н. Толстого

Поступило
14.04.95
Исправленный вариант
12.12.97