Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Бер, Непрерывные дифференцирования на $*$ -алгебрах τ -измеримых операторов – внутренние, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 658–664

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:24:37

Непрерывные дифференцирования на $*$ -алгебрах τ -измеримых операторов – внутренние

А. Ф. Бер

Доказано, что любое непрерывное дифференцирование на $*$ -алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, является внутренним. Для собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ каждое дифференцирование на $*$ -алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ внутреннее.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10231

Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра над полем K . Линейное отображение $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ называется *дифференцированием*, если $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ при всех $a, b \in \mathcal{A}$. Для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ отображение $\delta_a(x) = [a, x] = ax - xa$ является дифференцированием на $\mathcal{A}$. Такие дифференцирования называются *внутренними*. Одной из важных задач в теории дифференцирований на алгебрах является нахождение тех классов алгебр, в которых каждое дифференцирование является внутренним. Хорошо известно, что произвольное дифференцирование на C^* -алгебре является непрерывным [1]. При этом, вообще говоря, не любое дифференцирование на произвольной C^* -алгебре является внутренним [1]. В то же время, на W^* - и AW^* -алгебрах все дифференцирования внутренние [1], [2]. Аналогичная задача рассматривалась и для различных алгебр измеримых операторов, присоединенных к AW^* -алгебрам и к алгебрам фон Неймана. В работах [3] и [4] показано, что любое дифференцирование на алгебре $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов, присоединенных к коммутативной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, является нулевым тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{M}$ атомическая. В случае, когда $\mathcal{M}$ коммутативная AW^* -алгебра, критерием существования ненулевых дифференцирований в $S(\mathcal{M})$ служит отсутствие свойства σ -дистрибутивности у булевой алгебры проекторов из $\mathcal{M}$ [5]. Для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ типа I задачи описания дифференцирований в алгебрах $S(\mathcal{M})$ всех измеримых, $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых и $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых операторов решены в работах [6] и [7]. В частности, для алгебр фон Неймана $\mathcal{M}$ типа I_∞ установлено, что любое дифференцирование на алгебрах $S(\mathcal{M})$, $S(\mathcal{M}, \tau)$, $LS(\mathcal{M})$ является внутренним. Отсюда следует, что любое дифференцирование на $S(\mathcal{M}, \tau)$ для алгебры $\mathcal{M}$ типа I_∞ непрерывно в топологии t_τ сходимости по мере, порожденной точным нормальным полуконечным следом τ . В работе [8] аналогичный результат получен и в случае произвольной собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$.

В настоящей работе показывается, что произвольное t_τ -непрерывное дифференцирование на алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ является внутренним. В частности, для собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ любое дифференцирование на $S(\mathcal{M}, \tau)$ является внутренним.

Используется терминология и обозначения теории алгебр фон Неймана из [1], [9] и теории измеримых операторов из [10].

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ , $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ – решетка всех проекторов в $\mathcal{M}$. Плотнo определенный замкнутый линейный оператор a , присоединенный к $\mathcal{M}$, называется τ -измеримым, если $\tau(e^{|a|}(\lambda, +\infty)) < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$, где $e^{|a|}(\lambda, +\infty)$ – спектральный проектор для $|a| = (a^*a)^{1/2}$, отвечающий промежутку $(\lambda, +\infty)$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых операторов является *-алгеброй относительно сильно определенных операций сложения и умножения. В алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ рассматривается отдeлимая метризуемая векторная топология t_τ сходимости по мере, базисом окрестностей нуля которой являются множества

$$U(\varepsilon, \eta) = \{a \in S(\mathcal{M}, \tau) : \exists p \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \quad \tau(\mathbf{1} - p) \leq \eta, \quad ap \in \mathcal{M}, \quad \|ap\| \leq \varepsilon\},$$

где $\|\cdot\|$ – C^* -норма на $\mathcal{M}$. Известно (см., например, [10]), что $(S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau)$ – топологическая *-алгебра и F -пространство.

ТЕОРЕМА 1. *Если дифференцирование $\delta: S(\mathcal{M}, \tau) \rightarrow S(\mathcal{M}, \tau)$ непрерывно в топологии t_τ , то $\delta = [d, \cdot]$ для некоторого $d \in S(\mathcal{M}, \tau)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что дифференцирование δ является самосопряженным, т.е. $\delta(x^*) = \delta(x)^*$ при всех $x \in S(\mathcal{M}, \tau)$.

Через $l(a)$ и $r(a)$ обозначим, соответственно, левый и правый носитель элемента $a \in S(\mathcal{M}, \tau)$, положим также $s(a) := l(a) \vee r(a)$.

Далее используется следующая

ЛЕММА 1. *Если*

$$\lambda > 0, \quad p, q \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), \quad p\delta(q)p \geq \lambda p, \quad e = l(qp), \quad f = r(qp),$$

то $f\delta(e)f \geq \lambda f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$e = l(qp) = r((qp)^*) = r(pq) \leq q, \quad f = r(qp) = l((qp)^*) = l(pq) \leq p,$$

то

$$ef = eqpf = qp = eqp = ep = qpf = qf, \quad fe = fpqe = pq = pqe = fpq = fq.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f\delta(e)f &= f\delta(fe)f - f\delta(f)ef = f\delta(fq)f - f\delta(f)qf \\ &= f\delta(q)f = f(p\delta(q)p)f \geq f(\lambda p)f = \lambda f. \end{aligned}$$

Положим $\mathcal{M}_1 = \{a \in \mathcal{M} : \|a\|_{\mathcal{M}} \leq 1\}$ и обозначим через $\mathcal{M}_1^h$ эрмитовую часть $\mathcal{M}_1$.

Зафиксируем $\lambda > 0$. Множество пар

$$\mathcal{S} = \{(p_\alpha, a_\alpha) \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \times \mathcal{M}_1^h : p_\alpha \neq 0, \alpha \in J\}$$

назовем λ -системой, если

- (i) $(p_\alpha \vee s(a_\alpha))(p_\beta \vee s(a_\beta)) = 0$ и $(p_\alpha \vee s(a_\alpha))s(\delta(p_\beta)) = 0$ при $\alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in J$;
- (ii) проекторы $s(a_\alpha)$ и p_α эквивалентны для всех $\alpha \in J$ (запись: $s(a_\alpha) \sim p_\alpha$);
- (iii) $p_\alpha \delta(a_\alpha) p_\alpha \geq \lambda p_\alpha, \alpha \in J$.

Проектор

$$\bigvee_{\alpha \in J} (p_\alpha \vee s(a_\alpha) \vee s(\delta(p_\alpha)) \vee s(\delta(p_\alpha \vee s(a_\alpha))))$$

назовем *носителем* λ -системы $\mathcal{S}$ и обозначим его через $s(\mathcal{S})$. Если λ -система $\mathcal{S}$ пустая, то будем считать $s(\mathcal{S}) = 0$.

λ -Систему назовем *максимальной*, если она не содержится ни в какой большей λ -системе.

Для проектора $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ обозначим через δ_e дифференцирование из $eS(\mathcal{M}, \tau)e$ в $eS(\mathcal{M}, \tau)e$, задаваемое формулой $\delta_e(x) = e\delta(x)e$. Поскольку

$$\delta_e(e) = e\delta(e)e = e\delta(e^2)e = e\delta(e)ee + ee\delta(e)e = 2e\delta(e)e = 2\delta_e(e),$$

то $\delta_e(e) = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{S} = \{(p_\alpha, a_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ — максимальная λ -система, $g = s(\mathcal{S})^\perp$. Тогда

$$\delta_g(g\mathcal{M}g) \subset g\mathcal{M}g.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $\delta_g(q) \in g\mathcal{M}g$ и $\|\delta_g(q)\|_{\mathcal{M}} \leq \lambda$ для любого проектора $q \in \mathcal{P}(g\mathcal{M}g)$.

Предположим, что $p = e^{\delta_g(q)}(\lambda, +\infty) > 0$. Тогда $p\delta(q)p \geq \lambda p > 0, p \leq s(\delta_g(q)) \leq g$. Поскольку

$$\delta(pq)p - \delta(p)(pq)^* = \delta(pq)p - \delta(p)qp = p\delta(q)p > 0,$$

то $qp = (pq)^* \neq 0$. Согласно лемме 1 $f\delta(e)f \geq \lambda f$, где $e = l(qp) \neq 0, f = r(qp) \neq 0$, при этом $e \sim f$. Так как $f \leq p \leq g$ и $e \leq g$, то $(f \vee e)s(\delta(p_\alpha)) = 0$ и

$$(p_\alpha \vee s(a_\alpha))\delta(f) = \delta((p_\alpha \vee s(a_\alpha))f) - \delta(p_\alpha \vee s(a_\alpha))f = 0$$

для любого $\alpha \in J$. Следовательно, семейство $\mathcal{S} \cup \{(f, e)\}$ является λ -системой, что противоречит максимальнойности $\mathcal{S}$. Таким образом, $e^{\delta_g(q)}(\lambda, +\infty) = 0$, т.е. $\delta_g(q) \leq \lambda \mathbf{1}$. Заменив q на $g - q$, получим $-\delta_g(q) = \delta_g(g - q) \leq \lambda \mathbf{1}$, т.е. $\delta_g(q) \geq -\lambda \mathbf{1}$. Следовательно, $\delta_g(q) \in g\mathcal{M}g$ и $\|\delta_g(q)\|_{\mathcal{M}} \leq \lambda$.

Предположим, что утверждение леммы 2 неверно. Тогда найдется такой элемент $a \in \mathcal{M}_1^h \cap g\mathcal{M}g$, что $p = e^{\delta_g(a)}(3\lambda, +\infty) > 0$. В этом случае $p\delta(a)p \geq 3\lambda p > 0$. Ясно, что $p \leq s(\delta_g(a)) \leq g$. Рассмотрим элемент $b = rap$ и проектор $q = s(b)$. Поскольку $\|\delta_g(p)\|_{\mathcal{M}} \leq \lambda$, то $\|p\delta(p)ap + pa\delta(p)p\|_{\mathcal{M}} \leq 2\lambda$. Поэтому $p\delta(p)ap + pa\delta(p)p \geq -2\lambda p$. Тогда

$$p\delta(b)p = p\delta(rap)p = p\delta(p)ap + pa\delta(p)p + p\delta(a)p \geq \lambda p > 0.$$

В частности, $b = rap \neq 0$ и $q \neq 0$. Поскольку $q \leq p$, то $q\delta(b)q \geq \lambda q$. Кроме того, $q\delta(p_\alpha) = 0$ и

$$(p_\alpha \vee s(a_\alpha))\delta(q) = \delta((p_\alpha \vee s(a_\alpha))q) - \delta(p_\alpha \vee s(a_\alpha))q = 0$$

для любого $\alpha \in J$, так как $q \leq g$. Это означает, что множество $\mathcal{S} \cup \{(q, b)\}$ является λ -системой, что противоречит максимальнойности $\mathcal{S}$.

Используем теперь t_τ -непрерывность дифференцирования δ , которая означает, что для любых $\varepsilon_1, \eta_1 > 0$ найдутся такие $\varepsilon_2, \eta_2 > 0$, что $\delta(U(\varepsilon_2, \eta_2)) \subset U(\varepsilon_1, \eta_1)$. Поскольку $\mathcal{M}_1 \subset U(1, \eta_2) = \varepsilon_2^{-1}U(\varepsilon_2, \eta_2)$, то $\delta(\mathcal{M}_1) \subset \varepsilon_2^{-1}U(\varepsilon_1, \eta_1) = U(\varepsilon_1/\varepsilon_2, \eta_1)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N_\delta(\varepsilon) > 0$, что $\delta(\mathcal{M}_1) \subset U(N_\delta(\varepsilon), \varepsilon)$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{S} = \{(p_\alpha, a_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ — $2N_\delta(\varepsilon)$ -система. Тогда $\tau(s(\mathcal{S})) \leq 8\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное конечное подмножество $F \subset J$ и положим $p_F = \sum_{\alpha \in F} p_\alpha$, $a_F = \sum_{\alpha \in F} a_\alpha$. Поскольку $s(a_\alpha)s(a_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$, то $a_F \in \mathcal{M}_1^h$, и поэтому $\delta(a_F) \in U(N_\delta(\varepsilon), \varepsilon)$. Следовательно,

$$\tau(e^{\delta(a_F)}[2N_\delta(\varepsilon), +\infty)) \leq \tau(e^{\delta(a_F)}(N_\delta(\varepsilon), +\infty)) \leq \varepsilon$$

[10; лемма 3.4.4].

Если $\alpha, \beta \in F$, $\alpha \neq \beta$, то

$$p_\alpha\delta(a_\beta) = \delta(p_\alpha a_\beta) - \delta(p_\alpha)a_\beta = 0, \quad \delta(a_\beta)p_\alpha = (p_\alpha\delta(a_\beta))^* = 0.$$

Поэтому

$$p_F\delta(a_F)p_F = \sum_{\alpha \in F} p_\alpha\delta(a_\alpha)p_\alpha \geq 2N_\delta(\varepsilon) \sum_{\alpha \in F} p_\alpha = 2N_\delta(\varepsilon)p_F,$$

что влечет неравенство

$$p_F \preceq e^{\delta(a_F)}\left(2N_\delta(\varepsilon) - \frac{1}{n}, +\infty\right)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ [11; лемма 4.2]. Поскольку

$$e^{\delta(a_F)}\left(2N_\delta(\varepsilon) - \frac{1}{n}, +\infty\right) \downarrow e^{\delta(a_F)}[2N_\delta(\varepsilon), +\infty)$$

при $n \rightarrow \infty$ и след τ нормальный, то

$$\tau(p_F) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tau\left(e^{\delta(a_F)}\left(2N_\delta(\varepsilon) - \frac{1}{n}, +\infty\right)\right) = \tau(e^{\delta(a_F)}[2N_\delta(\varepsilon), +\infty)) \leq \varepsilon.$$

Далее,

$$l(\delta(p_\alpha)p_\alpha) \sim r(\delta(p_\alpha)p_\alpha) \leq p_\alpha$$

и

$$\delta(p_\alpha) = \delta(p_\alpha^2) = \delta(p_\alpha)p_\alpha + p_\alpha\delta(p_\alpha) = \delta(p_\alpha)p_\alpha + (\delta(p_\alpha)p_\alpha)^*,$$

поэтому

$$s(\delta(p_\alpha)) \leq p_\alpha \vee l(\delta(p_\alpha)p_\alpha)$$

и

$$\tau(s(\delta(p_\alpha))) \leq \tau(p_\alpha \vee l(\delta(p_\alpha)p_\alpha)) \leq \tau(p_\alpha) + \tau(l(\delta(p_\alpha)p_\alpha)) \leq 2\tau(p_\alpha).$$

Аналогично,

$$\tau(s(\delta(p_\alpha \vee s(a_\alpha)))) \leq 2\tau(p_\alpha \vee s(a_\alpha)) \leq 4\tau(p_\alpha).$$

Следовательно,

$$\tau\left(\bigvee_{\alpha \in F} (p_\alpha \vee s(a_\alpha) \vee s(\delta(p_\alpha))) \vee s(\delta(p_\alpha \vee s(a_\alpha)))\right) \leq 8 \sum_{\alpha \in F} \tau(p_\alpha) = 8\tau(p_F) \leq 8\varepsilon.$$

Поскольку проектор $s(\mathcal{S})$ есть супремум проекторов вида

$$\bigvee_{\alpha \in F} (p_\alpha \vee s(a_\alpha) \vee s(\delta(p_\alpha)) \vee s(\delta(p_\alpha \vee s(a_\alpha))))),$$

где F пробегает направление всех конечных подмножеств из J , то в силу нормальности следа τ получим, что $\tau(s(\mathcal{S})) \leq 8\varepsilon$.Следующая лемма является важным шагом для построения элемента $d \in S(\mathcal{M}, \tau)$, удовлетворяющего равенству $\delta = [d, \cdot]$.

ЛЕММА 4. *Существует такая последовательность проекторов $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и последовательность $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, что $p_n \uparrow \mathbf{1}$, $\tau(p_n^\perp) \downarrow 0$, $d_n \in p_n \mathcal{M} p_n$ и $\delta_{p_n}(x) = [d_n, x]$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in p_n S(\mathcal{M}, \tau) p_n$. Кроме того, $p_n d_m p_n = d_n$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует (возможно, пустая) максимальная $2N_\delta(2^{-n})$ -система $\mathcal{S}_n$. Согласно леммам 2 и 3 $\tau(s(\mathcal{S}_n)) \leq 8 \cdot 2^{-n}$ и $\delta_{q_n}(q_n \mathcal{M} q_n) \subset q_n \mathcal{M} q_n$, где $q_n = s(\mathcal{S}_n)^\perp$.

Для $p_n = \bigwedge_{k=n+1}^\infty q_k$ имеем, что

$$\tau(p_n^\perp) = \tau\left(\bigvee_{k=n+1}^\infty q_k^\perp\right) \leq \sum_{k=n+1}^\infty \tau(q_k^\perp) \leq 8 \cdot 2^{-n},$$

т.е. $p_n \uparrow \mathbf{1}$.Если $x \in p_n \mathcal{M} p_n$, то $x \in q_{n+1} \mathcal{M} q_{n+1}$ и

$$\delta_{p_n}(x) = p_n \delta(x) p_n = p_n q_{n+1} \delta(x) q_{n+1} p_n = p_n \delta_{q_{n+1}}(x) p_n \subset p_n q_{n+1} \mathcal{M} q_{n+1} p_n = p_n \mathcal{M} p_n.$$

Следовательно, $\delta_{p_n}(p_n \mathcal{M} p_n) \subset p_n \mathcal{M} p_n$, т.е. $\delta_{p_n}|_{p_n \mathcal{M} p_n}$ есть дифференцирование на W^* -алгебре $p_n \mathcal{M} p_n$. Согласно теореме Сакаи–Кадисона [1; теорема 4.1.6], существует такой элемент $c_n \in p_n \mathcal{M} p_n$, что $\delta_{p_n}(x) = [c_n, x]$ для любого $x \in p_n \mathcal{M} p_n$.

Построим теперь последовательность $\{d_n\}$ следующим способом. Положим $d_1 = c_1$ и предположим, что элементы $d_1, \dots, d_n$ уже построены. Поскольку $\delta_{p_n}(p_n x p_n) = p_n \delta_{p_{n+1}}(p_n x p_n) p_n$, то

$$[d_n, p_n x p_n] = p_n [c_{n+1}, p_n x p_n] p_n = [p_n c_{n+1} p_n, p_n x p_n]$$

для любого $x \in \mathcal{M}$. Следовательно, элемент $d_n - p_n c_{n+1} p_n$ принадлежит центру алгебры $p_n \mathcal{M} p_n$. Согласно [12; следствие, с. 18] существует такой элемент z из

центра алгебры $p_{n+1}\mathcal{M}p_{n+1}$, что $d_n - p_n c_{n+1} p_n = z p_n$. Положим $d_{n+1} = c_{n+1} + z$. Тогда $\delta_{p_{n+1}}|_{p_{n+1}\mathcal{M}p_{n+1}} = [c_{n+1}, \cdot] = [d_{n+1}, \cdot]$ и

$$p_n d_{n+1} p_n = p_n c_{n+1} p_n + z p_n = d_n,$$

при этом, если $k \in \mathbb{N}$, $k < n + 1$, то

$$p_k d_{n+1} p_k = p_k p_n d_{n+1} p_n p_k = p_k d_n p_k = d_k.$$

В силу t_τ -плотности $p_n \mathcal{M} p_n$ в $p_n S(\mathcal{M}, \tau) p_n$ и t_τ -непрерывности отображения δ_{p_n} получим, что $\delta_{p_n}(x) = [d_n, x]$ для любого $x \in p_n S(\mathcal{M}, \tau) p_n$.

Следующая лемма завершает доказательство теоремы 1.

ЛЕММА 5. Пусть $\{d_n\}$ и $\{p_n\}$ – те же, что и в лемме 4. Тогда последовательность $\{d_n\}$ сходится в топологии t_τ к некоторому элементу $d \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $\delta(x) = [d, x]$ для любого $x \in S(\mathcal{M}, \tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, то

$$d_m - d_n = d_m - p_n d_m p_n = (p_m - p_n) d_m p_m + p_n d_m (p_m - p_n).$$

Поскольку

$$r((p_m - p_n) d_m p_m) \sim l((p_m - p_n) d_m p_m) \leq p_n^\perp,$$

то

$$\tau(r(d_m - d_n)) \leq \tau(r((p_m - p_n) d_m p_m) \vee p_n^\perp) \leq 2\tau(p_n^\perp),$$

т.е.

$$d_m - d_n \in U(0, 2\tau(p_n^\perp)) \subset U\left(\frac{1}{n}, 2\tau(p_n^\perp)\right).$$

Следовательно, $\{d_n\}$ – последовательность Коши в $(S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau)$. В силу полноты $(S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau)$ существует предел этой последовательности, который мы обозначим через d .

Поскольку $(S(\mathcal{M}, \tau), t_\tau)$ – топологическая алгебра, дифференцирование δ t_τ -непрерывно и последовательность p_n сходится к $\mathbf{1}$ в топологии t_τ , то для каждого $x \in S(\mathcal{M}, \tau)$ имеем, что

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_n (p_n \delta(p_n x p_n) p_n) = \lim_n \delta_{p_n}(p_n x p_n) \\ &= \lim_n [d_n, p_n x p_n] = \left[\lim_n d_n, \lim_n p_n x p_n \right] = [d, x]. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось выше, в работе [8] было показано, что для произвольной собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ любое дифференцирование на алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ является t_τ -непрерывным. Отсюда и из теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 2. Если $\mathcal{M}$ – собственно бесконечная алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконачным следом τ , то любое дифференцирование δ на алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ является внутренним.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Sakai, *C*-Algebras and W*-Algebras*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **60**, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [2] D. Olesen, “Derivations of AW*-algebras are inner”, *Pacific J. Math.*, **53**:2 (1974), 555–561.
- [3] А. Ф. Бер, В. И. Чилин, Ф. А. Сукочев, “Дифференцирования в коммутативных регулярных алгебрах”, *Матем. заметки*, **75**:3 (2004), 453–454.
- [4] A. F. Ber, V. I. Chilin, F. A. Sukochev, “Non-trivial derivations on commutative regular algebras”, *Extracta Math.*, **21**:2 (2006), 107–147.
- [5] А. Г. Кусраев, “Автоморфизмы и дифференцирования в расширенной комплексной f -алгебре”, *Сиб. матем. журн.*, **47**:1 (2006), 97–107.
- [6] S. Albeverio, Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaibergenov, “Structure of derivations on various algebras of measurable operators for type I von Neumann algebras”, *J. Funct. Anal.*, **256**:9 (2009), 2917–2943.
- [7] A. F. Ber, B. de Pagter, F. A. Sukochev, “Derivations in algebras of operator-valued functions”, *J. Operator Theory*, **66**:2 (2011), 261–300.
- [8] А. Ф. Бер, “Непрерывность дифференцирований на собственно бесконечных $*$ -алгебрах τ -измеримых операторов”, *Матем. заметки*, **90**:5 (2011), 776–780.
- [9] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*. Vol. II. *Advanced Theory*, Pure Appl. Math., **100**, Academic Press, Orlando, FL, 1986.
- [10] М. А. Муратов, В. И. Чилин, *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов*, Праці Ін-ту матем. НАН України, **69**, Ін-т матем. НАН України, Київ, 2007.
- [11] А. Ф. Бер, Б. де Пагтер, Ф. А. Сукочев, “Некоторые замечания о дифференцированиях в алгебрах измеримых операторов”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 502–513.
- [12] J. Dixmier, *Les algèbres d’opérateurs dans l’espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*, 2e ed. revue et augmentée, Cahiers scientifiques, **XXV**, Gauthier–Villars, Paris, 1969.

А. Ф. Бер

DCF Technologies Ltd., Ташкент, Узбекистан

E-mail: ber@ucd.uz

Поступило

14.12.2012