Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Доброхотов, С. Б. Медведев, Д. С. Миненков,
О заменах, приводящих одномерные системы уравнений
мелкой воды к волновому уравнению со скоростью звука
 $c^2 = x$, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 716–
727

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10232>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:19:11

УДК 517.95

О заменах, приводящих одномерные системы уравнений мелкой воды к волновому уравнению со скоростью звука $c^2 = x$

С. Ю. Доброхотов, С. Б. Медведев, Д. С. Миненков

Найдены точечные преобразования для трех одномерных систем: уравнений мелкой воды на ровном и наклонном дне и системы линейных уравнений, получающейся формальной линеаризацией уравнений мелкой воды на наклонном дне. Получен переход от этих систем к параметризации Кариера–Гринспена. Для линейных уравнений мелкой воды на наклонном дне найдено решение в виде бегущей волны с переменной скоростью. Показана связь найденного решения с решением двумерного волнового уравнения.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10232

1. Введение. Одномерные уравнения мелкой воды являются одной из простейших моделей распространения жидкости в каналах [1]. Кроме того, эти уравнения могут быть использованы для исследования цунами [2]. В случае ровного дна уравнения могут быть сведены к линейным уравнениям с помощью преобразования годографа [3]. При постоянном наклоне дна уравнения также могут быть сведены к линейным уравнениям с помощью преобразования годографа после приведения их к римановым инвариантам [1]. Однако возможны дальнейшие преобразования зависимых и независимых переменных, которые позволяют выразить параметрически решения исходных уравнений через два параметра и функцию от них [4]. При этом функция является решением линейного волнового уравнения. Преимущество такого представления состоит, во-первых, в том, что решение нелинейной системы первого порядка сводится к решению линейного волнового уравнения, во-вторых, подвижная точка уреза (точка, в которой глубина жидкости равна нулю) переходит в нулевую точку для линейного уравнения.

Ниже мы приводим точечные преобразования, связывающие три системы уравнений первого порядка: уравнения мелкой воды на ровном дне, уравнения мелкой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00973-а, 11-01-12075-офи-м, 12-01-00648-а) и грантами Правительства РФ для господдержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых, в ФГБОУ ВПО “Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова” по договору № 11.G34.31.0054 и для господдержки научных исследований коллективами под руководством приглашенных исследователей по соглашению № 12.740.11.1430.

воды на наклонном дне и линейную систему, которая получается формальной линейризацией. Все найденные преобразования сохраняют дивергентный вид уравнений. Также приведены преобразования, связывающие линейризованную систему и линейное волновое уравнение, выведенное в работе [4]. Кроме того, мы приводим формулы решения линейризованной системы в виде волны, бегущей с переменной скоростью, и показываем связь полученного решения с решением двумерного волнового уравнения с постоянной скоростью звука.

2. Системы нелинейных уравнений мелкой воды. Мы рассмотрим две одномерные системы уравнений мелкой воды (см. [1], [2]): одну – описывающую распространение поверхностных волн над ровным дном

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial[hu]}{\partial z} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} u & h \\ h + \frac{u^2}{2} & hu \end{pmatrix} = 0, \quad (2.1)$$

и вторую – описывающую распространение поверхностных волн над наклонным дном $D(x) = c^2(x) = x$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial[(\eta + x)v]}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \right) \begin{pmatrix} v & \eta \\ \eta + \frac{v^2}{2} & xv + \eta v \end{pmatrix} = 0.$$

Здесь x – пространственная координата, t – время, $h(x, t) = \eta(x, t) + D$ и $\eta = \eta(x, t)$ – превышение свободной поверхности, $u = u(x, t)$ – скорость.

Для обоих этих уравнений существуют преобразования, позволяющие выразить широкий класс их классических решений (но не всех) через системы линейных уравнений (см., например [4], [2]). В первом случае это преобразование годографа, во втором случае – преобразование Кариера–Гринспена [4] (также в форме точечного преобразования, представленного в [5]), близкое к преобразованию годографа, которое по существу позволяет выразить соответствующий класс решений через решения “наивно” линейризованной системы (2.2) (мы запишем ее в переменных $(\tau, y, N(\tau, y), U(\tau, y))$):

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial \tau} + \frac{\partial[yU]}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

очевидно, эквивалентной волновому уравнению с квадратом скорости $c^2 = y$:

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \tau^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial N}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Система (2.3) достаточно хорошо изучена, у нее построен широкий класс как осциллирующих, так и убывающих решений. Основная цель этой заметки – показать, что и “стандартная” система (2.1) также приводится к виду (2.3) достаточно явным преобразованием. Для полноты изложения мы приводим оба преобразования, относящиеся как к уравнению (2.1), так и к уравнению (2.2).

3. Линеаризация систем уравнений мелкой воды, основанная на точечных преобразованиях. Рассмотрим нелинейную систему над наклонным дном (2.2) и произведем замену переменных:

$$\begin{aligned} t = \tau + U, \quad x = y - N + \frac{U^2}{2}, \quad \eta = N - \frac{U^2}{2}, \quad v = U \\ \iff \tau = t - v, \quad y = x + \eta - \frac{v^2}{2}, \quad N = \eta + \frac{v^2}{2}, \quad U = v. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Якобианы прямой и обратной замен равны соответственно:

$$\begin{aligned} J &\equiv \frac{\partial(\tau, y)}{\partial(t, x)} = 1 + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ J^{-1} &\equiv \frac{\partial(t, x)}{\partial(\tau, y)} = 1 - \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial N}{\partial \tau} \frac{\partial U}{\partial y} + U \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При указанной замене координат система преобразуется согласно формулам

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial[\eta + v^2/2]}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial[(\eta + x)v]}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\tau, y)}{\partial(t, x)} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial \tau} + \frac{\partial[yU]}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

В случае нелинейной системы над ровным дном (2.1) рассмотрим замену переменных

$$\begin{aligned} t = \tau + U, \quad z = y - \frac{\tau^2}{2} - N - \tau U, \quad h = y, \quad u = -\tau \\ \iff \tau = -u, \quad N = h - z + \frac{u^2}{2} + tu, \quad y = h, \quad U = t + u. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Якобианы прямой и обратной замен

$$\begin{aligned} \tilde{J} &\equiv \frac{\partial(\tau, y)}{\partial(t, z)} = \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \tilde{J}^{-1} &\equiv \frac{\partial(t, z)}{\partial(\tau, y)} = 1 - \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial N}{\partial \tau} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial y} = J^{-1}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Справедливы равенства

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial[h + u^2/2]}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial[hu]}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial(\tau, y)}{\partial(t, z)} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial N}{\partial y} \\ \frac{\partial N}{\partial \tau} + \frac{\partial[yU]}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из простых соотношений (3.2), (3.4) легко увидеть, что не всем решениям нелинейных систем соответствуют решения линейной системы. Некоторые из них дают решения уравнений

$$\frac{\partial(\tau, y)}{\partial(t, x)} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial(\tau, y)}{\partial(t, z)} = 0$$

соответственно. Обратно, если якобианы $\partial(t, x)/\partial(\tau, y)$ и $\partial(t, z)/\partial(\tau, y)$ обращаются в 0, то глобальные решения линейной системы могут не быть решениями нелинейных систем, которые “опрокидываются” и становятся многозначными. Подробнее см. примеры в п. 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 2 (Некоторые промежуточные преобразования). Можно связать преобразование (3.3) с преобразованием (3.1) следующим образом: замена

$$t = \tau + U, \quad x = y - N + \frac{U^2}{2}, \quad \eta = N - \frac{U^2}{2}, \quad v = U. \quad (3.5)$$

переводит систему (2.2) в нелинейную систему с внешней силой

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} - 1 = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial[hv]}{\partial x} = 0. \quad (3.6)$$

Замена, состоящая в переходе в “падающую” систему координат [6], [7]

$$z = x - \frac{t^2}{2}, \quad u = v - t, \quad (3.7)$$

приводит последнюю систему к системе (2.1). Если отбросить все промежуточные преобразования, то получится преобразование (3.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 3 (Связь с преобразованием годографа). Преобразование (3.3) можно представить как композицию преобразования годографа

$$t = u', \quad z = h', \quad u = t', \quad h = z', \quad (3.8)$$

где штрихами обозначены новые переменные, и преобразования

$$u' = \tau + U, \quad h' = y - \frac{\tau^2}{2} - N - \tau U, \quad t' = -\tau, \quad z' = y. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЙ 1 и 2 легко проводится прямым расчетом.

1. Проведем его сначала для преобразования (3.1), для краткости записи будем обозначать частные производные нижним индексом.

Матрица Якоби замены имеет вид

$$\mathcal{J} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial t} & \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial \tau} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + U_\tau & U_y \\ -N_\tau + UU_\tau & 1 - N_y + UU_y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{J} = (\mathcal{J}^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} J(1 - N_y + UU_y) & -JU_y \\ J(N_\tau - UU_\tau) & J(1 + U_\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Производные меняются так:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\partial \tau} & \frac{1}{\partial y} \end{pmatrix} \mathcal{J} \begin{pmatrix} y \\ \tau \end{pmatrix}.$$

В новых переменных левая часть системы (2.2) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x}\right) \begin{pmatrix} \eta & v \\ xv + \eta v & \eta + \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\partial\tau} & \frac{1}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{a} & \frac{2}{b} \\ \frac{2}{c} & \frac{2}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N - \frac{U^2}{2} & U \\ yU & N \end{pmatrix},$$

где цифры над операторами дифференцирования и сомножителями y, τ, a, b, c, d означают порядок их действия: после перемножения вектора и матрицы операторы дифференцирования нужно поставить справа от коэффициентов a, b, c, d . Далее имеем

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\partial\tau} & \frac{1}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{a} \left(N - \frac{U^2}{2}\right) + \frac{2}{by}U & \frac{2}{a}U + \frac{2}{b}N \\ \frac{2}{c} \left(N - \frac{U^2}{2}\right) + \frac{2}{dy}U & \frac{2}{c}U + \frac{2}{d}N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & g \end{pmatrix},$$

и

$$\begin{aligned} f &= a \frac{\partial}{\partial\tau} \left[N - \frac{U^2}{2} \right] + b \frac{\partial}{\partial\tau} [yU] + c \frac{\partial}{\partial y} \left[N - \frac{U^2}{2} \right] + d \frac{\partial}{\partial y} [yU] \\ &= J(1 - N_y + UU_y)(N_\tau - UU_\tau) + J(-U_y)(yU_\tau) \\ &\quad + J(N_\tau - UU_\tau)(N_y - UU_y) + J(1 + U_\tau)(yU)_y \\ &= J(N_\tau - UU_\tau + UU_\tau + (yU)_y) = J(N_\tau + (yU)_y), \\ g &= aU_\tau + bN_\tau + cU_y + dN_y \\ &= J((1 - N_y + UU_y)U_\tau + (-U_y)N_\tau + (N_\tau - UU_\tau)U_y + (1 + U_\tau)N_y) \\ &= J(U_\tau + N_y). \end{aligned}$$

2. Проведем аналогичные вычисления для преобразования (3.3). Матрица Якоби замены имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}} &\equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial\tau}{\partial t} & \frac{\partial\tau}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{J}}^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial\tau} & \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial\tau} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial U}{\partial\tau} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ -\tau - \frac{\partial N}{\partial\tau} - \frac{\partial[\tau U]}{\partial\tau} & 1 - \frac{\partial N}{\partial y} - \tau \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \tilde{\mathcal{J}} &= (\tilde{\mathcal{J}}^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{J}} \left(1 - \frac{\partial N}{\partial y} - \tau \frac{\partial U}{\partial y}\right) & -\tilde{\mathcal{J}} \frac{\partial U}{\partial y} \\ \tilde{\mathcal{J}} \left(\tau + \frac{\partial N}{\partial\tau} + \frac{\partial[\tau U]}{\partial\tau}\right) & \tilde{\mathcal{J}} \left(1 + \frac{\partial U}{\partial\tau}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Производные меняются так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\partial\tau} & \frac{1}{\partial y} \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{J}} \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & \frac{2}{\tau} \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \tilde{\mathcal{J}} \left(1 - \frac{\partial N}{\partial y} - \tau \frac{\partial U}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial\tau} + \tilde{\mathcal{J}} \left(\tau + \frac{\partial N}{\partial\tau} + \frac{\partial[\tau U]}{\partial\tau}\right) \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \tilde{\mathcal{J}} \left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial\tau} + \tilde{\mathcal{J}} \left(1 + \frac{\partial U}{\partial\tau}\right) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

поэтому в новых переменных левая часть системы (2.1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial[h + u^2/2]}{\partial z} &= \tilde{J}\left(1 - \frac{\partial N}{\partial y} - \tau \frac{\partial U}{\partial y}\right) \frac{\partial[-\tau]}{\partial \tau} + \tilde{J}\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) \frac{\partial[\tau^2/2]}{\partial \tau} + \tilde{J}\left(1 + \frac{\partial U}{\partial \tau}\right) \frac{\partial y}{\partial y} \\ &= \tilde{J}\left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial N}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial[hu]}{\partial z} &= \tilde{J}\left(\tau + \frac{\partial N}{\partial \tau} + \frac{\partial[\tau U]}{\partial \tau}\right) \frac{\partial y}{\partial y} + \tilde{J}\left(-\frac{\partial U}{\partial y}\right) \frac{\partial[-y\tau]}{\partial \tau} + \tilde{J}\left(1 + \frac{\partial U}{\partial \tau}\right) \frac{\partial[-y\tau]}{\partial y} \\ &= \tilde{J}\left(\frac{\partial N}{\partial \tau} + \frac{\partial[yU]}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

4. Преобразования Кариера–Гринспена и близкие исследования. Из системы (2.3) можно получить уравнение второго порядка различными способами. Если исключить переменную U , то получим уравнение (2.4), которое также называется уравнением тяжелой нити [8].

Если в системе (2.3) исключить N , то получим другое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (4.1)$$

Другой способ получения уравнения второго порядка состоит во введении потенциалов. Если ввести потенциал Ψ

$$N = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad yU = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau},$$

то получим для него уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} = y \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}. \quad (4.2)$$

Если ввести потенциал Φ

$$N = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \quad U = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

то получим для него уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \quad (4.3)$$

которое совпадает с уравнением (2.4).

Уравнения (2.4) и (4.1)–(4.3) являются уравнениями смешанного типа второго рода в отличие от известных уравнений. Например, уравнение Трикоми и уравнение Чаплыгина являются уравнениями первого рода [9]. В цитированной книге на с.18 даются ссылки на работы Кароль [10], в которых доказывались теоремы существования и единственности для аналогичного уравнения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Можно сказать, что область эллиптичности $h = y < 0$ соответствует неустойчивому случаю. Например, если рассматривать “мелкую воду на потолке”, то в уравнениях движения производная для h меняет знак. Аналогичные модельные неустойчивые уравнения рассматривались в книгах [11], [12].

Чтобы получить параметризацию (2.16)–(2.20) из работы [4], необходимо сделать замену независимой переменной $y = \rho^2/4$. Эта замена преобразует уравнение (4.3) в уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad (4.4)$$

которое совпадает с уравнением (2.20) из работы [4] с точностью до обозначений. Преобразование, выражающее исходные переменные t, x, η, v системы (2.2) через параметры τ, ρ и функцию Φ , которая удовлетворяет уравнению (4.4), принимает вид, аналогичный параметризации из [4]:

$$t = \tau + U, \quad x = y - N + \frac{U^2}{2}, \quad \eta = N - \frac{U^2}{2}, \quad v = U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \quad N = -\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}. \quad (4.5)$$

В книге [11] методом годографа получено линейное уравнение для неустойчивых сред. Поиск решений этого линейного уравнения был сведен к поиску специальных решений трехмерного уравнения Лапласа, для которого решения находятся стандартным методом. Часть этих результатов изложена в гл. 9 учебника [12]. В нашем случае заметим, что уравнение (4.4) является волновым уравнением второго порядка с осевой симметрией [13], поскольку выражение в правой стороне (4.4) есть радиальная часть двумерного оператора Лапласа в полярных координатах. Таким образом, поиск решений уравнения (4.4) можно свести к поиску осесимметричных решений двумерного волнового уравнения с постоянной скоростью звука. Далее будет предъявлено одно такое решение.

5. Точные решения линейной системы. Некоторые решения системы (2.2) были получены на основе решения уравнения (4.4) в книге [2]. Здесь будут построены явные решения системы (2.3). Из построенного решения можно получить частное явное решение уравнения (4.4), которое не представлено в [2], [13].

Заметим, что линейная система (2.3) допускает сдвиг по τ . В то время как нелинейная система (2.1) не допускает сдвиг по скорости u , хотя эти переменные связаны линейно в преобразовании (3.3). Это наблюдение позволяет построить новые решения для линейной системы (2.3).

5.1. Автомоделное решение. При масштабном преобразовании переменных

$$\tau \rightarrow T\tau, \quad y \rightarrow Yy, \quad U \rightarrow \lambda U, \quad N \rightarrow \mu N \quad (5.1)$$

уравнения сохраняют свой вид при условии

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{Y}{T} = T. \quad (5.2)$$

Учитывая однородность по τ , ищем решение в виде

$$\xi = \frac{y}{(b\tau + a)^2}, \quad U = f(\xi), \quad N = (b\tau + a)g(\xi), \quad (5.3)$$

где a и b – некоторые константы. Подстановка в исходные уравнения дает

$$\left[-2b\xi \frac{df}{d\xi} + \frac{dg}{d\xi} \right] (b\tau + a)^{-1} = 0, \quad (5.4)$$

$$\xi \frac{df}{d\xi} - 2b\xi \frac{dg}{d\xi} + f + bg = 0. \quad (5.5)$$

Поскольку определитель для матрицы при производных $4b^2\xi^2 - \xi$ равен нулю только при $\xi = 0$, получаются только постоянные решения $f = -bg_0$ и $g = g_0$, которые соответствуют следующему очевидному решению:

$$U = -bg_0, \quad N = (b\tau + a)g_0. \quad (5.6)$$

5.2. Бегущие решения. Кроме автомодельных решений можно строить бегущие решения [14]. Для неоднородной среды это означает, что ищется решение, зависящее от $y - V(\tau)$, где $V(\tau)$ – сдвиг решения. Для однородного случая решение зависит от $V = c\tau$ и дает обычное решение бегущей волны со скоростью c .

Учитывая автомодельные зависимости (5.2), будем искать решение в следующем виде:

$$\xi = y - (b\tau + a)^2, \quad U = f(\xi), \quad N = (b\tau + a)g(\xi), \quad (5.7)$$

где a и b – некоторые константы. Подстановка в исходные уравнения дает

$$\left[-2b \frac{df}{d\xi} + \frac{dg}{d\xi} \right] (b\tau + a) = 0, \quad (5.8)$$

$$y \frac{df}{d\xi} - 2b(b\tau + a)^2 \frac{dg}{d\xi} + f + bg = 0. \quad (5.9)$$

Решение первого уравнения имеет вид $g = 2bf + g_0$, где g_0 – константа. Подставляя его во второе уравнение, получаем

$$(y - 4b^2(b\tau + a)^2) \frac{df}{d\xi} + (1 + 2b^2)f + bg_0 = 0. \quad (5.10)$$

Условие, что это уравнение зависит только от автомодельной переменной ξ , имеет вид $4b^2 = 1$. Знак b не влияет на окончательное уравнение

$$\xi \frac{d(f + f_0)}{d\xi} + \frac{3}{2}(f + f_0) = 0, \quad (5.11)$$

где константа $f_0 = g_0/3$ дает сдвиг функции f . Общее решение уравнения (5.11) имеет вид

$$f + f_0 = 2A\xi^{-3/2}. \quad (5.12)$$

Здесь выбрана константа в виде $2A$, чтобы она совпадала с аналогичной константой A для этого решения из работы [5]. Окончательный вид решения

$$U = \frac{2A}{\xi^{3/2}} - \frac{g_0}{3}, \quad N = \frac{(\tau + 2a)}{2} \left(\frac{2A}{\xi^{3/2}} + \frac{2g_0}{3} \right), \quad \xi = y - \left(\frac{\tau + 2a}{2} \right)^2. \quad (5.13)$$

Учитывая линейность уравнений и произвол констант g_0 , a и A , их можно полагать комплексными и брать вещественную и мнимую части для получившихся выражений. В силу однородности по τ дифференцирование по τ порождает новое решение.

Если положить в формулах (5.13) $g_0 = 0$ и $2a = ib$, то получим в точности решение утверждения 2 из работы [5].

Если перейти от переменной y к переменной ρ , которая была введена выше равенством $4y = \rho^2$, то получим, что функция $N(\tau, \rho)$ удовлетворяет волновому уравнению (4.4). Это уравнение является радиальной частью полного двумерного волнового уравнения с единичной скоростью звука; следовательно, функция

$$N(\tau, \rho) = \frac{(\tau + 2a)}{2} \left(\frac{2A}{\xi^{3/2}} + \frac{2g_0}{3} \right), \quad \xi = \frac{\rho^2}{4} - \left(\frac{\tau + 2a}{2} \right)^2, \quad \rho^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad (5.14)$$

является точным решением двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial x_2^2} . \tag{5.15}$$

Если в формуле (3) из [15], без потери общности, положить $\mathfrak{c} = \mathcal{A} = 1$, то решение (5.15) переходит в эту формулу, если

$$a = -\frac{i\mu}{2}, \quad A = \frac{i\mu^2}{8}$$

и взять вещественную часть. Таким образом, формула (3) из [15] является частным случаем решения (5.15).

Рис. 1. Превышение свободной поверхности $N(\tau, y)$ (сплошная) и $\eta(t, x)$ (штрих) для систем (2.3) и (2.2): соответственно для времен τ и t равных 0,1,2,3,4,5 (слева направо и сверху вниз). Сплошная прямая изображает дно $c^2 = x$.

Эти решения любопытны тем, что они явным образом описывают метаморфозу профиля (обнаруженную в [16]) падающей “уединенной” волны при отражении от

Рис. 2. График якобиана J^{-1} (сверху) и профилей решений $N(\tau, y)$ (посередине, сплошная), $\eta(t, x)$ (посередине, штрих) и $h(t, z)$ (снизу, штрих). Также изображена асимптотическая прямая $z + t^2/2$ (снизу, сплошная) для $h(t, z)$. Профили решений указаны для времен: $\tau = \tau_{\text{cr}}^1 - 0.2$, $t = t_{\text{cr}}^1 - 0.2$ (слева) и $\tau = \tau_{\text{cr}}^2 + 0.2$, $t = t_{\text{cr}}^2 + 0.2$ (справа); где критические времена: $\tau_{\text{cr}}^1 \approx -0.6$, $t_{\text{cr}}^1 \approx -0.9$ и $\tau_{\text{cr}}^2 \approx t_{\text{cr}}^2 \approx 5.3$. Якобиан $J^{-1} \neq 0$ при $\tau < \tau_{\text{cr}}^1$ и при $\tau > \tau_{\text{cr}}^2$.

точки $x = 0$, которая является фокальной точкой специального типа [17], [5]. Эта метаморфоза описывается преобразованием Гильберта и состоит в том, что “размазанное” δ -образное падающее решение переходит в так называемую N -волну¹ (см. рис. 1), что связано со сменой индекса Маслова при прохождении фокальной точки. Наличие явных формул решения линейной задачи и преобразование Карьера–Гринспена позволяют детально проанализировать аналогичное явление и для нелинейной системы [18], [19].

6. Нули якобианов и “дополнительные” решения. а) Якобиан $\partial(\tau, y)/\partial(t, z)$ обращается в нуль для решений типа простой волны $h = \Phi(u)$. Эти решения дают

¹В пределе, когда длина волны стремится к нулю ($\mu \rightarrow +0$), падающая волна переходит в δ -функцию $\delta(x)$, а отраженная – в функцию Сохоцкого $1/x$.

также решения нелинейной системы (2.1), если $(\Phi')^2 = \Phi$, а u удовлетворяет соответствующему уравнению простой волны (уравнению Хопфа) [20]:

$$h(u) \equiv 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

или

$$h(u) = \left(\frac{u}{2} + C\right)^2 \neq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{3u}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + C \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

где C – константа.

б) Теперь рассмотрим ситуацию, когда на решении линейной системы U, N якобиан $J^{-1}(\tau, y) = \tilde{J}^{-1}(\tau, y)$ обращается в нуль в некоторой точке $(\tau_{\text{кр}}, y_{\text{кр}})$, которой соответствует критическое время $t_{\text{кр}}$ для нелинейных систем. Обращение в нуль этого якобиана означает, что одной и той же точке t, x (или t, z) могут соответствовать различные τ, y . В этом случае в точке $(t_{\text{кр}}, x_{\text{кр}})$ (или $(t_{\text{кр}}, z_{\text{кр}})$) соответствующее решение нелинейной системы v, η (или u, h) “опрокидывается”. Пусть при этом $J^{-1} \neq 0$ при $\tau < \tau_{\text{кр}}$; тогда при “закритических” временах $t > t_{\text{кр}}$ функции v, η (или u, h), которые определяются параметрически по формулам замены (3.1) (или (3.3)), становятся многозначными по (x, t) (или (z, t)).

На рис. 1 и 2 представлены графики решения $N(\tau, y)$ системы (2.3) и соответствующих решений $\eta(t, x)$ и $h(t, z)$ нелинейных систем (2.2) и (2.1). Для $N(\tau, y)$ взята действительная часть формулы (5.14) при следующих значениях констант:

- 1) на рис. 1 – решение с малой амплитудой: $A = 0.025(1 + i)$, $2a = -2 - i$, $g_0 = 0$; здесь якобиан $J^{-1}(\tau, y) > 0$ положителен при $y \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, поэтому решение линейной задачи переходит в решения нелинейных для всех $t \in \mathbb{R}$;
- 2) на рис. 2 – решение с большой амплитудой: $A = 0.25(1 + i)$, $2a = -2 - i$, $g_0 = 0$; якобиан обращается в нуль, и решения нелинейных задач опрокидываются, хотя решение линейной системы определено для всех τ (рассматриваем область $y \geq 0$); профили решений изображены для моментов времени, близких к критическим.

Авторы благодарны Е. А. Кузнецову и Е. Н. Пелиновскому за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. J. Stoker, *Water Waves. The Mathematical Theory with Applications*, Wiley Classics Lib., John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [2] Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 1996.
- [3] R. Courant, *Methods of Mathematical Physics. Vol. II. Partial Differential Equations*, Interscience Publ., New York, 1962.
- [4] G. F. Carrier, H. P. Greenspan, “Water waves of finite amplitude on a sloping beach”, *J. Fluid Mech.*, **4**:1 (1958), 97–109.
- [5] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироци, “Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$ ”, *УМН*, **65**:1(391) (2010), 185–186.
- [6] С. Б. Медведев, “Законы сохранения нулевого порядка для одномерных уравнений гидродинамики с правой частью”, *Вестн. Новосибирск. гос. ун-та. Сер. Матем., мех., информ.*, **10**:1 (2010), 70–88.

- [7] I. Didenkulova, E. Pelinovsky, “Rogue waves in nonlinear hyperbolic systems (shallow-water framework)”, *Nonlinearity*, **24**:3 (2011), R1–R18.
- [8] М. М. Смирнов, *Задачи по уравнениям математической физики*, Наука, М., 1975.
- [9] М. М. Смирнов, *Уравнения смешанного типа*, Наука, М., 1970.
- [10] И. Л. Кароль, “К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа”, *Матем. сб.*, **38(80)**:3 (1956), 261–282.
- [11] С. К. Жданов, Б. А. Трубников, *Квазигазовые неустойчивые среды*, Наука, М., 1991.
- [12] Б. А. Трубников, *Теория плазмы*, Энергоатомиздат, М., 1996.
- [13] А. Д. Полянин, *Справочник по линейным уравнениям математической физики*, Физматлит, М., 2001.
- [14] Г. И. Баренблатт, *Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике*, Гидрометеоиздат, Л., 1982.
- [15] С. Ю. Доброхотов, С. Я. Секерж-Зенькович, “Один класс точных алгебраических локализованных решений многомерного волнового уравнения”, *Матем. заметки*, **88**:6 (2010), 942–945.
- [16] E. N. Pelinovsky, R. Kh. Mazova, “Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles”, *Natural Hazards*, **6**:3 (1992), 227–249.
- [17] T. Vukašinac, P. Zhevandrov, “Geometric asymptotics for a degenerate hyperbolic equation”, *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:3 (2002), 371–381.
- [18] S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, B. Tirozzi, “Asymptotic solution of the one-dimensional wave equation with localized initial data and with degenerating velocity: I”, *Russ. J. Math. Phys.*, **17**:4 (2010), 434–447.
- [19] Д. С. Миненков, “Асимптотики решений одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды с вырождающейся скоростью”, *Матем. заметки*, **92**:5 (2012), 721–730.
- [20] Л. В. Овсянников, *Лекции по основам газовой динамики*, Наука, М., 1981.

С. Ю. Доброхотов

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: dobr@ipmnet.ru

Поступило

24.05.2012

Исправленный вариант

06.12.2012

С. Б. Медведев

Институт вычислительных технологий СО РАН,
г. Новосибирск,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: medvedev@ict.nsc.ru

Д. С. Миненков

Институт проблем механики
им. А. Ю. Ишлинского РАН,
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: minenkov.ds@gmail.com