Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Широков, Число Шмидта и каналы, частично разрушающие сцепленность, в бесконечномерных квантовых системах, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 5, 775–789

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 16:57:33

УДК 519.248.3

Число Шмидта и каналы, частично разрушающие сцепленность, в бесконечномерных квантовых системах

М. Е. Широков

Дано определение числа Шмидта состояния составной квантовой системы бесконечной размерности и рассмотрены свойства соответствующих классов Шмидта. Показано существование состояний с заданным числом Шмидта, любое счетное выпуклое разложение которых не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта. Рассмотрены классы бесконечномерных каналов, частично разрушающих сцепленность. Получены обобщения некоторых свойств таких каналов, установленных ранее в конечномерном случае. В то же время, доказано существование частично разрушающих сцепленность каналов (в частности, разрушающих сцепленность каналов), у которых все операторы в любом представлении Крауса имеют бесконечный ранг.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10234

1. Введение

Ранг Шмидта чистого состояния и его “обобщение” на смешанные состояния, называемое *числом Шмидта*, являются важными количественными характеристиками сцепленности в составных квантовых системах.

Ранг Шмидта чистого состояния составной системы AB , описываемого единичным вектором $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ (где $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ – гильбертовы пространства, соответствующие системам A и B), определяется как число ненулевых слагаемых в разложении Шмидта

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |\alpha_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle$$

этого вектора; он совпадает с рангом частичных состояний $\text{Tr}_{\mathcal{H}_B} |\psi\rangle\langle\psi|$ и $\text{Tr}_{\mathcal{H}_A} |\psi\rangle\langle\psi|$.

Число Шмидта смешанного состояния ω конечномерной составной квантовой системы AB определено в [1] как максимальный ранг Шмидта в ансамбле чистых состояний со средним состоянием ω , минимизированный по всем таким ансамблям

Работа выполнена при поддержке научной программы РАН “Математическая теория управления и динамических систем”, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00319-а, 13-01-00295-а).

(см. раздел 3). В [1] показано, что число Шмидта не возрастает при действии ЛОСС-операций и что множество состояний с числом Шмидта, не превосходящим k , (класс Шмидта порядка k) можно охарактеризовать в терминах k -положительных отображений.¹ В последующих статьях [2]–[4] рассмотрены различные свойства числа Шмидта и классов Шмидта.

Число Шмидта существенно используется в определении квантового канала, частично разрушающего сцепленность [5]. Недавно обнаружена связь этого понятия с необходимым условием равенства в законе невозрастания величины Холево ансамбля квантовых состояний при действии квантового канала [6; теорема 1].

Эта статья посвящена бесконечномерным обобщениям рассмотренных выше понятий. Ее частичной мотивацией является желание автора расширить упомянутый выше результат из [6] на бесконечномерные квантовые системы и каналы.

В разделе 3 рассмотрено определение числа Шмидта для состояний составной квантовой системы бесконечной размерности. Поскольку существование счетно-неразложимых сепарабельных состояний (см. [7]) показывает некорректность конечномерной формулы для числа Шмидта, предложена “непрерывная” модификация этой формулы, основанная на понятии существенного супремума функции относительно заданной меры. Показано, что эта формула дает адекватное определение числа Шмидта в том смысле, что соответствующие классы Шмидта (множества состояний с числом Шмидта $\leq k$) совпадают с выпуклыми замыканиями множеств чистых состояний с рангом Шмидта $\leq k$.

Свойства классов Шмидта в бесконечномерном случае рассмотрены в разделе 4. В частности, доказана характеристика класса Шмидта порядка k в терминах k -положительных отображений (обобщающая теорему 1 в [1]). Показано, что произвольное состояние класса Шмидта порядка k является барицентром некоторой вероятностной меры с носителем в множестве чистых состояний с рангом Шмидта $\leq k$. В то же время показано существование состояний с заданным числом Шмидта, любое счетное выпуклое разложение которых не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта.

Определение и некоторые свойства бесконечномерных квантовых каналов, частично разрушающих сцепленность, рассмотрены в разделе 5. Установлено, что, в отличие от конечномерного случая, класс частично разрушающих сцепленность каналов порядка k не совпадает с классом каналов, имеющих представление Крауса с операторами ранга $\leq k$ (последний класс является собственным подклассом первого). Более того, показано существование частично разрушающих сцепленность каналов (в частности, разрушающих сцепленность каналов), у которых все операторы в любом представлении Крауса имеют бесконечный ранг.

2. Предварительные сведения

Будем использовать следующие обозначения:

- $\mathcal{H}, \mathcal{H}', \mathcal{K}$ – сепарабельные гильбертовы пространства;
- $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – банахово пространство всех ограниченных операторов в $\mathcal{H}$;
- $\mathfrak{I}(\mathcal{H})$ – банахово пространство всех ядерных операторов в $\mathcal{H}$;
- $\mathfrak{I}_+(\mathcal{H})$ – конус всех положительных ядерных операторов в $\mathcal{H}$;

¹Определения ЛОСС-операций и k -положительных отображений, а также некоторых других понятий некоммутативной теории вероятностей, даны в разделе 2.

- $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – подмножество конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$, состоящее из операторов с единичным следом.

Замыкание, выпуклую оболочку, выпуклое замыкание и множество крайних точек подмножества $\mathcal{A}$ топологического линейного пространства будем обозначать $\text{cl}(\mathcal{A})$, $\text{co}(\mathcal{A})$, $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ и $\text{ext}(\mathcal{A})$ соответственно [8]–[10].

Операторы из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ будем обозначать $\rho, \sigma, \omega, \dots$ и называть *операторами плотности* или *состояниями*, поскольку каждый оператор плотности однозначно определяет нормальное состояние на алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Состояния, соответствующие операторам плотности ранга 1, называются *чистыми*. Множество чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ совпадает с $\text{ext} \mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Для векторов и операторов ранга 1 в гильбертовом пространстве будем использовать дираковские обозначения $|\varphi\rangle, |\chi\rangle\langle\psi|, \dots$ (в которых действие оператора $|\chi\rangle\langle\psi|$ на вектор $|\varphi\rangle$ – это вектор $\langle\psi, \varphi\rangle |\chi\rangle$).

Единичный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и тождественное преобразование пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ будем обозначать $I_{\mathcal{H}}$ и $\text{Id}_{\mathcal{H}}$ соответственно.

Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ – множество борелевских вероятностных мер на замкнутом подмножестве $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, снабженное топологией слабой сходимости [11], [12]. Это множество можно считать полным сепарабельным метрическим пространством [12]. Барицентр $\mathbf{b}(\mu)$ меры μ из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ – это состояние из $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$, определяемое интегралом Бохнера

$$\mathbf{b}(\mu) = \int_{\mathcal{A}} \rho \mu(d\rho).$$

Для произвольного подмножества $\mathcal{B} \subseteq \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ подмножество множества $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, состоящее из мер с барицентром в $\mathcal{B}$, будем обозначать $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$.

Конечный или счетный набор состояний $\{\rho_i\} \subset \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ с соответствующим распределением вероятностей $\{\pi_i\}$ традиционно называется *ансамблем* и обозначается $\{\pi_i, \rho_i\}$. Ансамбль состояний можно рассматривать как атомическую (дискретную) меру из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Барицентр этой меры – это среднее состояние $\sum_i \pi_i \rho_i$ соответствующего ансамбля.

Линейное отображение $\Phi: \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ называется *k-положительным*, если для k-мерного гильбертова пространства $\mathcal{K}$ отображение $\Phi^* \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}^*$ C^* -алгебры $\mathfrak{B}(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$ в C^* -алгебру $\mathfrak{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ является положительным. Если отображение Φ является k-положительным при любом k, то оно называется *вполне положительным*. Вполне положительное сохраняющее след линейное отображение называется *квантовым каналом* [13], [14]. Множество всех квантовых каналов из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ будем обозначать $\mathfrak{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$.

Состояние $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ называется *сепарабельным* или *несцепленным*, если оно принадлежит выпуклому замыканию множества всех чистых состояний-произведений из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ (т.е. состояний вида $\rho \otimes \sigma$, где $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{K})$), в противном случае оно называется *сцепленным*.

Ключевым в теории сцепленности является понятие *LOCC-операции*, т.е. такого преобразования состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, которое сводится к последовательности локальных операций (Local Operation) над каждой из подсистем и обмену классической информацией между этими подсистемами (Classical Communication) [14], [15]. Простейшие примеры LOCC-операций – это квантовые каналы вида $\Phi \otimes \Psi$, где $\Phi \in \mathfrak{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ и $\Psi \in \mathfrak{F}(\mathcal{K}, \mathcal{K})$.

3. Число Шмидта

Ранг Шмидта $\text{SR}(\omega)$ чистого состояния ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ можно определить как ранг изоморфных состояний $\text{Tr}_{\mathcal{K}} \omega$ и $\text{Tr}_{\mathcal{H}} \omega$.

Если пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ конечномерны, то число Шмидта произвольного состояния ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ определяется выражением

$$\text{SN}(\omega) = \inf_{\sum_i \pi_i \omega_i = \omega} \sup_i \text{SR}(\omega_i), \quad (3.1)$$

в котором инфимум берется по всем ансамблям $\{\pi_i, \omega_i\}$ чистых состояний со средним состоянием ω [1]. Используя теорему Каратеодори, нетрудно показать, что для каждого натурального k множество $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) = \{\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \mid \text{SN}(\omega) \leq k\}$ замкнуто и совпадает с выпуклой оболочкой чистых состояний с рангом Шмидта $\leq k$. Это означает, что функция $\omega \mapsto \text{SN}(\omega)$ полунепрерывна снизу на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. Таким образом, имеем следующую возрастающую конечную последовательность²

$$\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3 \subset \dots \subset \mathfrak{S}_{n-1} \subset \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$$

замкнутых подмножеств, где $\mathfrak{S}_1$ – множество сепарабельных (нечепленных) состояний и $n = \min\{\dim \mathcal{H}, \dim \mathcal{K}\}$.

Если пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ бесконечномерны, то правая часть (3.1) определена корректно, но она не дает адекватного определения числа Шмидта. Это следует из существования сепарабельных состояний в $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ (называемых счетно-неразложимыми), которые нельзя представить в виде счетной выпуклой комбинации чистых состояний-произведений [7]. Из счетной неразложимости сепарабельного состояния ω следует, что правая часть (3.1) больше единицы для каждого такого состояния вопреки естественному требованию, которому должно удовлетворять число Шмидта.³

Ниже будет показано, что разумное обобщение определения (3.1) на бесконечномерный случай дает следующая формула:

$$\text{SN}(\omega) = \inf_{\mu \in \mathcal{P}_{\{\omega\}}(\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}))} \text{ess sup}_{\mu} \text{SR}(\cdot), \quad (3.2)$$

где “ess sup _{μ} ” – существенный супремум по отношению к мере μ [9; п. 13.1]. Заметим, что $\text{ess sup}_{\mu} \text{SR}(\cdot) = \|\text{SR}\|_{\infty}$ – это норма функции SR в пространстве $L^{\infty}(X, \mu)$, где $X = \text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. А) Функция $\text{SN}(\omega)$, определенная формулой (3.2), полунепрерывна снизу на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. Для каждого состояния $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ инфимум в (3.2) достигается на некоторой мере из $\text{extr } \mathcal{P}_{\{\omega\}}(\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}))$.

В) Для каждого натурального k множество $\mathfrak{S}_k = \{\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \mid \text{SN}(\omega) \leq k\}$, где $\text{SN}(\omega)$ определяется формулой (3.2), замкнуто и выпукло. Оно совпадает с выпуклым замыканием множества чистых состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, имеющих ранг Шмидта $\leq k$.

²Здесь и далее будем для краткости писать $\mathfrak{S}_k$ вместо $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$.

³Эта проблема аналогична проблеме, возникающей при бесконечномерном обобщении метода выпуклой надстройки, используемого для построения монотонных характеристик сцепленности (the convex roof construction of entanglement monotones [15]): существование счетно-неразложимых сепарабельных состояний приводит к некорректности дискретной версии этой конструкции (см. замечание 9 в [16]).

С) Если ω – состояние конечного ранга в $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, то значения $\text{SN}(\omega)$, определяемые формулами (3.1) и (3.2), совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку неотрицательная функция $\omega \mapsto \text{SR}(\omega)$ полунепрерывна снизу на множестве $\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, первое утверждение предложения следует из предложения 9 в приложении.

Второе утверждение следует из первого и леммы 1 из [7].

Для доказательства третьего утверждения заметим, что если правая часть (3.2) равна $k < +\infty$, то и правая часть (3.1) равна k в силу совпадения выпуклой оболочки и выпуклого замыкания замкнутого подмножества

$$\mathfrak{S}_k^\omega = \{\varpi \in \text{extr } \mathfrak{S}(\text{supp } \omega) \mid \text{SR}(\varpi) \leq k\}$$

конечномерного пространства $\mathfrak{T}(\text{supp } \omega)$ (см. [9; следствие 5.33]).

Следующее предложение обобщает предложение 1 из [1] на бесконечномерный случай.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Число Шмидта состояния бесконечномерной составной квантовой системы, определяемое формулой (3.2), не возрастает под действием ЛОСС-операций.

Это утверждение сводится к утверждению предложения 1 из [1] с помощью следующего аппроксимативного результата.

ЛЕММА 1. Пусть $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ – возрастающие последовательности проекторов конечного ранга, сильно сходящиеся к $I_{\mathcal{H}}$ и к $I_{\mathcal{K}}$ соответственно. Для произвольного состояния $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ пусть

$$\omega_n = (\text{Tr } P_n \otimes Q_n \cdot \omega)^{-1} P_n \otimes Q_n \cdot \omega \cdot P_n \otimes Q_n.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{SN}(\omega_n) = \text{SN}(\omega).$$

Если $\text{SN}(\omega) < +\infty$, то существует n_0 такое, что $\text{SN}(\omega_n) = \text{SN}(\omega)$ для всех $n \geq n_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу полунепрерывности снизу числа Шмидта (предложение 1, А) достаточно показать, что

$$\text{SN}(\omega_n) \leq \text{SN}(\omega) \quad \forall n. \quad (3.3)$$

Поскольку состояние ω лежит в выпуклом замыкании множества $\mathfrak{S}_{\text{SN}(\omega)}^p$ чистых состояний с рангом Шмидта $\leq \text{SN}(\omega)$ (предложение 1, В), существует последовательность $\{\omega_m\}$ из выпуклой оболочки множества $\mathfrak{S}_{\text{SN}(\omega)}^p$, сходящаяся к состоянию ω , такая, что $\lim_{m \rightarrow +\infty} \text{SN}(\omega_m) = \text{SN}(\omega)$. При каждом m неравенство (3.3) с $\omega = \omega_m$ непосредственно проверяется. В силу полунепрерывности снизу числа Шмидта переход к пределу при $m \rightarrow +\infty$ дает (3.3).

4. Некоторые свойства классов Шмидта $\mathfrak{S}_k$

При $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{K} = +\infty$ мы имеем бесконечную возрастающую последовательность

$$\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3 \subset \cdots \subset \mathfrak{S}_{n-1} \subset \mathfrak{S}_n \subset \cdots$$

замкнутых подмножеств множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, в которой $\mathfrak{S}_1$ – множество сепарабельных (несцепленных) состояний.

Пусть $\mathfrak{S}_k^p$ – замкнутое подмножество множества $\mathfrak{S}_k$, состоящее из чистых состояний.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. А) Произвольное состояние из $\mathfrak{S}_k$ является барицентром некоторой меры из $\text{extr } \mathcal{P}(\mathfrak{S}_k^p)$.

В) Существуют состояния ω в $\mathfrak{S}_k \setminus \mathfrak{S}_{k-1}$ такие, что оператор $\omega - \lambda \sigma$ не является положительным при любом $\lambda > 0$ и любом чистом состоянии σ с конечным рангом Шмидта.⁴ Для каждого такого состояния ω имеем

$$\omega = \sum_i \pi_i \omega_i, \quad \{\omega_i\} \subset \text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \implies \text{SR}(\omega_i) = +\infty \quad \forall i.$$

С) Произвольное чистое состояние из $\mathfrak{S}_k \setminus \mathfrak{S}_{k-1}$ можно аппроксимировать последовательностью состояний из $\mathfrak{S}_k \setminus \mathfrak{S}_{k-1}$, обладающих свойством, указанным в утверждении В.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение непосредственно следует из предложения 1, второе подтверждается примером, рассмотренным в приложении 6.2 (после предложения 10).

Третье утверждение доказывается с помощью конструкции указанного выше примера из приложения 6.2 с учетом того, что функции с неравными нулю коэффициентами Фурье образуют плотное подмножество в $L^2([0, 2\pi))$ и что произвольный набор $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^k$ ортогональных единичных векторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ является образом набора векторов $\{|\varphi_i\rangle \otimes |i\rangle\}_{i=1}^k \subset L^2([0, 2\pi)) \otimes \mathcal{K}$ при некотором унитарном отображении из $L^2([0, 2\pi)) \otimes \mathcal{K}$ в $\mathcal{H}$, где $\{|i\rangle\}_{i=1}^k$ – ортонормированный базис пространства $\mathcal{K}$.

Рассмотрим характеризацию множества $\mathfrak{S}_k$ в терминах k -положительных отображений (которая является бесконечномерным обобщением теоремы 1 из [1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Состояние $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ лежит в $\mathfrak{S}_k$ тогда и только тогда, когда оператор $\Lambda_k \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(\omega)$ положителен при любом k -положительном линейном преобразовании Λ_k пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega_0 \in \mathfrak{S}_k$. В силу предложения 3 существует мера μ_0 из $\mathcal{P}(\mathfrak{S}_k^p)$ такая, что $\omega_0 = \int \omega \mu_0(d\omega)$. Поскольку $\Lambda_k \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(\omega) \geq 0$ для любого состояния $\omega \in \mathfrak{S}_k^p$ в силу определения k -положительности (см. раздел 2), имеем

$$\Lambda_k \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(\omega_0) = \int \Lambda_k \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(\omega) \mu_0(d\omega) \geq 0.$$

Обратное утверждение можно вывести из соответствующего конечномерного результата ([1; теорема 1]) методом аппроксимации с использованием леммы 1.

⁴Предполагается, что $\mathfrak{S}_0 = \emptyset$, а значит, $\mathfrak{S}_1 \setminus \mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}_1$ – множество сепарабельных состояний.

Пусть $\omega_0 \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \setminus \mathfrak{S}_k$, т.е. $\text{SN}(\omega_0) > k$. В силу леммы 1 существуют проекторы $P \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $Q \in \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ с одинаковым конечным рангом такие, что состояние

$$\omega_* = (\text{Tr } P \otimes Q \cdot \omega_0)^{-1} P \otimes Q \cdot \omega_0 \cdot P \otimes Q$$

не лежит в множестве $\mathfrak{S}_k$. Пусть $\mathcal{H}_* = P(\mathcal{H})$ и $\mathcal{K}_* = Q(\mathcal{K})$. В силу теоремы 1 из [1] существует k -положительное отображение $\Lambda_k: \mathfrak{T}(\mathcal{H}_*) \rightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{H}_*)$ такое, что оператор $\Lambda_k \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}_*}(\omega_*)$ не является положительным. Рассмотрим k -положительное отображение $\Lambda_k \circ \Pi$, где $\Pi(\cdot) = P(\cdot)P$. Тогда оператор $(\Lambda_k \circ \Pi) \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(\omega_0)$ не является положительным, поскольку в противном случае оператор

$$I_{\mathcal{H}} \otimes Q \cdot (\Lambda_k \circ \Pi) \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(\omega_0) \cdot I_{\mathcal{H}} \otimes Q = (\text{Tr } P \otimes Q \cdot \omega_0) \Lambda_k \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}_*}(\omega_*)$$

положителен, что противоречит выбору Λ_k .

Используя критерий компактности для подмножеств конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ (см. Предложение в приложении в [17]), можно доказать бесконечномерное обобщение предложения 1 из [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Произвольное состояние $\omega_k \in \mathfrak{S}_k$ можно представить в виде*

$$\omega_k = (1 - p)\omega_{k-1} + p\delta, \quad p \in [0, 1], \quad (4.1)$$

где $\omega_{k-1} \in \mathfrak{S}_{k-1}$, а δ – состояние с числом Шмидта $\geq k$ такое, что оператор $\delta - \lambda\sigma$ не является положительным при любом $\lambda > 0$ и любом $\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1}$.

Среди всех таких разложений существует разложение с минимальным p .

Состояние, обладающее свойством состояния δ , названо в [2] *k -граничным состоянием* (k -edge state). В отличие от конечномерного случая, для доказательства k -граничности состояния δ недостаточно показать, что оператор $\delta - \lambda\sigma$ не является положительным при любом $\lambda > 0$ и любом $\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1}^p$. Это следует из предложения 3, В.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\mathcal{M} = \{0\} \cup \{A \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \mid A \leq \omega_k, (\text{Tr } A)^{-1} A \in \mathfrak{S}_{k-1}\}$$

– замкнутое подмножество конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$.

Предположим, что $\mathcal{M} \neq \{0\}$. В силу указанного выше критерия компактности для подмножеств конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ множество $\mathcal{M}$ компактно. Следовательно, существует такой оператор $A_0 \in \mathcal{M}$, что $\text{Tr } A_0 = \sup_{A \in \mathcal{M}} \text{Tr } A$. Обозначая $p = 1 - \text{Tr } A_0$, $\omega_{k-1} = (\text{Tr } A_0)^{-1} A_0$ и $\delta = p^{-1}(\omega_k - A_0)$, получим разложение (4.1) с минимальным p .

Если $\mathcal{M} = \{0\}$, то единственный способ получить (4.1) – это положить $p = 1$ и $\delta = \omega_k$.

5. Каналы, частично разрушающие сцепленность

Понятие частично разрушающего сцепленность канала порядка k (k -partially entanglement-breaking channel) в конечномерном случае введено в [5] как естественное обобщение понятия разрушающего сцепленность канала (который является частично разрушающим сцепленность порядка 1). В соответствии с определением в [5],

канал $\Phi: \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ называется *частично разрушающим сцепленность порядка k* , если для любого гильбертова пространства $\mathcal{K}$ число Шмидта состояния $\Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(\omega) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$ не превосходит k при любом состоянии $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$.

Используя определение числа Шмидта, введенное в разделе 3, данное определение канала, частично разрушающего сцепленность порядка k , непосредственно обобщается на бесконечномерный случай.

Следуя традиции, частично разрушающий сцепленность канал порядка k будем кратко называть *k -РЕВ каналом*.

Пусть $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ – класс k -РЕВ каналов из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$. Поскольку множество $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$ замкнуто и выпукло, $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ – замкнутое выпуклое подмножество множества $\mathfrak{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ всех каналов из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$, снабженного топологией сильной сходимости [17].

Из предложения 4 легко выводится следующая характеристика k -РЕВ каналов (обобщающая соответствующий результат из [5], [18]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Канал Φ является k -РЕВ каналом тогда и только тогда, когда отображение $\Lambda_k \circ \Phi$ является вполне положительным для любого k -положительного отображения Λ_k .*

По определению $\Phi \in \mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ означает, что $\Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(\omega) \in \mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$ для любого $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. В силу следующего предложения достаточно проверить это включение только для одного чистого состояния.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пусть $\Phi: \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ – квантовый канал. Если существует чистое состояние $|\psi\rangle\langle\psi|$ в $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ с частичными состояниями $\text{Tr}_{\mathcal{K}} |\psi\rangle\langle\psi| \cong \text{Tr}_{\mathcal{H}} |\psi\rangle\langle\psi|$ полного ранга такое, что $\Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(|\psi\rangle\langle\psi|) \in \mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$, то канал Φ является k -РЕВ каналом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i |i\rangle \otimes |i\rangle$, где $\{|i\rangle\}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H} \cong \mathcal{K}$ и $\mu_i > 0$ при всех i . Пусть $P_n = \sum_{i=1}^n |i\rangle\langle i|$ – проектор из $\mathfrak{B}(\mathcal{K})$.

В силу предложения 2 имеем

$$\Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(|\psi_n\rangle\langle\psi_n|) = c_n I_{\mathcal{H}} \otimes P_n \cdot \Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(|\psi\rangle\langle\psi|) \cdot I_{\mathcal{H}} \otimes P_n \in \mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}),$$

где $|\psi_n\rangle = c_n \sum_{i=1}^n \mu_i |i\rangle \otimes |i\rangle$ и $c_n = [\sum_{i=1}^n \mu_i^2]^{-1/2}$.

Пусть $\mathcal{H}_n = \text{lin}(\{|i\rangle\}_{i=1}^n)$ и $\mathcal{K}_n = \text{lin}(\{|i\rangle\}_{i=1}^n)$ – n -мерные подпространства пространств $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$. Произвольный вектор $|\varphi\rangle$ из $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{K}_n$ можно представить в виде

$$|\varphi\rangle = \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle = \sum_{i=1}^n \mu_i |i\rangle \otimes A|i\rangle,$$

где

$$A = \sum_{i,j=1}^n (\mu_i)^{-1} \gamma_{ij} |j\rangle\langle i|$$

– оператор из $\mathfrak{B}(\mathcal{K}_n)$. Потому

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| = I_{\mathcal{H}_n} \otimes A \cdot |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \cdot I_{\mathcal{H}_n} \otimes A^*$$

и, следовательно,

$$\Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = I_{\mathcal{H}} \otimes A \cdot \Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(|\psi_n\rangle\langle\psi_n|) \cdot I_{\mathcal{H}} \otimes A^* \in \mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}).$$

Это означает, что сужение канала Φ на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_n)$ является k -РЕВ каналом. В силу приведенной ниже леммы 2 канал Φ является k -РЕВ каналом.

ЛЕММА 2. Пусть $\{\mathcal{H}_n\}$ – возрастающая последовательность подпространств пространства $\mathcal{H}$ такая, что $\text{cl}(\bigcup_n \mathcal{H}_n) = \mathcal{H}$. Если сужение канала Φ на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_n)$ является k -РЕВ каналом при каждом n , то канал Φ является k -РЕВ каналом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку произвольное состояние $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ можно аппроксимировать последовательностью $\{\omega_n\}$ такой, что $\text{supp } \text{Tr}_{\mathcal{K}} \omega_n \subset \mathcal{H}_n$ (см. лемму 1), это утверждение следует из замкнутости множества $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$.

Пусть $|\psi\rangle\langle\psi|$ – чистое состояние из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, имеющее частичные состояния $\text{Tr}_{\mathcal{K}} |\psi\rangle\langle\psi| \cong \text{Tr}_{\mathcal{H}} |\psi\rangle\langle\psi| = \sigma$ полного ранга. Рассмотрим взаимно-однозначное соответствие Чоя–Ямиолковского

$$\mathfrak{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \ni \Phi \longleftrightarrow \Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(|\psi\rangle\langle\psi|) \in \mathfrak{C}_{\sigma} \doteq \{\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}) \mid \text{Tr}_{\mathcal{H}'} \omega = \sigma\},$$

которое является топологическим изоморфизмом, если множество $\mathfrak{F}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ всех каналов наделено топологией сильной сходимости [16; предложение 3]. Из предложения 7 вытекает следующее наблюдение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Сужение изоморфизма Чоя–Ямиолковского на класс $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ является изоморфизмом между этим классом и $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}) \cap \mathfrak{C}_{\sigma}$ – замкнутым подмножеством множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$.

При данном изоморфизме множество $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \setminus \mathfrak{P}_{k-1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ соответствует множеству

$$(\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}) \setminus \mathfrak{S}_{k-1}(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})) \cap \mathfrak{C}_{\sigma}, \quad k = 2, 3, \dots$$

В [5] доказано, что конечномерный канал Φ является k -РЕВ каналом тогда и только тогда, когда он имеет представление Крауса

$$\Phi(\cdot) = \sum_i V_i(\cdot) V_i^* \quad (5.1)$$

такое, что $\text{rank } V_i \leq k$ для всех i (это естественное обобщение хорошо известной характеристики разрушающих сцепленность каналов конечной размерности, доказанной в [18]). В бесконечномерном случае класс k -РЕВ каналов существенно шире класса каналов, имеющих указанное выше представление Крауса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. А) Если канал Φ имеет представление Крауса (5.1) такое, что $\text{rank } V_i \leq k$ для всех i , то он принадлежит классу $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$.

В) Существуют каналы Φ в $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \setminus \mathfrak{P}_{k-1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, обладающие следующим свойством⁵:

$$\Phi(\cdot) = \sum_i V_i(\cdot) V_i^* \implies \text{rank } V_i = +\infty \quad \forall i.$$

⁵Предполагается, что $\mathfrak{P}_0(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = \emptyset$ и, значит, $\mathfrak{P}_1(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \setminus \mathfrak{P}_0(\mathcal{H}, \mathcal{H}') = \mathfrak{P}_1(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ – класс разрушающих сцепленность каналов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение очевидно, поскольку для любого чистого состояния $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ выражение

$$\Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(\omega) = \sum_i V_i \otimes I_{\mathcal{K}} \cdot \omega \cdot V_i^* \otimes I_{\mathcal{K}}$$

приводит к разложению состояния $\Phi \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}(\omega)$ в выпуклую комбинацию чистых состояний с рангом Шмидта $\leq k$.

Для доказательства второго утверждения выберем любое состояние ω из множества $\mathfrak{S}_k(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K}) \setminus \mathfrak{S}_{k-1}(\mathcal{H}' \otimes \mathcal{K})$, обладающее свойством из утверждения В предложения 3. Можно считать, что $\text{Tr}_{\mathcal{H}'} \omega$ – состояние полного ранга из $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$. Пусть $|\psi\rangle\langle\psi|$ – очищение этого состояния в $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. В силу следствия 1 канал Φ_ω , соответствующий состоянию ω посредством изоморфизма Чоя–Ямиолковского, индуцированного состоянием $|\psi\rangle\langle\psi|$, лежит в $\mathfrak{P}_k(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \setminus \mathfrak{P}_{k-1}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Если предположить, что $\Phi_\omega(\cdot) = \sum_i V_i(\cdot) V_i^*$ и $\text{rank } V_{i_0} < +\infty$ при некотором i_0 , то получим противоречие с основным свойством состояния ω , поскольку $V_{i_0} \otimes \text{Id}_{\mathcal{K}}|\psi\rangle \neq 0$ (в противном случае $V_{i_0}(\text{Tr}_{\mathcal{K}} |\psi\rangle\langle\psi|)(V_{i_0})^* = 0$, что противоречит полному рангу состояния $\text{Tr}_{\mathcal{K}} |\psi\rangle\langle\psi|$).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Существуют разрушающие сцепленность каналы Φ , у которых в любом представлении Крауса (5.1) все операторы V_i имеют бесконечный ранг.*

Следствие 2 показывает, что бесконечномерные каналы, разрушающие сцепленность, могут иметь более сложную структуру, чем разрушающие сцепленность каналы между конечномерными системами [18].

6. Приложение

6.1. Об одном свойстве множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Приведем одно следствие критерия компактности для подмножеств вероятностных мер на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ (подробно рассмотренного в [15; раздел 1]), в силу которого *подмножество $\mathcal{P}$ множества $\mathcal{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ компактно (в топологии слабой сходимости) тогда и только тогда, когда $\{\mathbf{b}(\mu) \mid \mu \in \mathcal{P}\}$ – компактное подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть f – неотрицательная полунепрерывная снизу функция на замкнутом подмножестве $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Функция*

$$F(\rho) = \inf_{\mu \in \mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})} \text{ess sup}_{\mu} f(\cdot) \quad (6.1)$$

полунепрерывна снизу на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$.⁶ Для каждого состояния $\rho \in \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ инфимум в (6.1) достигается на некоторой мере из $\text{extr } \mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$.

При каждом $c \geq 0$ множество $\{\rho \in \overline{\text{co}}(\mathcal{A}) \mid F(\rho) \leq c\}$ совпадает с выпуклым замыканием множества $\{\rho \in \mathcal{A} \mid f(\rho) \leq c\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $F(\rho)$ корректно определена на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ в силу леммы 1 из [7].

Покажем, что функционал

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) \ni \mu \mapsto \widehat{f}(\mu) = \text{ess sup}_{\mu} f(\cdot) \quad (6.2)$$

⁶ “ess sup _{μ} ” – существенный супремум по отношению к мере μ [9; п. 13.1].

является вогнутым и полунепрерывным снизу. Поскольку для заданной меры μ из $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ μ -существенный супремум функции f (совпадающий с нормой $\|f\|_\infty$ пространства $L^\infty(\mathcal{A}, \mu)$) есть точная верхняя грань возрастающего семейства норм $\|f\|_p$ пространств $L^p(\mathcal{A}, \mu)$, $p \in [1, +\infty)$, вогнутость и полунепрерывность снизу функционала (6.2) следует из вогнутости и полунепрерывности снизу функционала

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) \ni \mu \mapsto \|f\|_p = \sqrt[p]{\int_{\mathcal{A}} [f(\rho)]^p \mu(d\rho)}$$

(полунепрерывность снизу этого функционала – следствие основных свойств слабой сходимости вероятностных мер, см. [11; гл. I, п. 2]).

В силу вогнутости и полунепрерывности снизу функционала (6.2) и компактности множества $\mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$ (которая следует из приведенного выше критерия компактности) инфимум в определении величины $F(\rho)$ при каждом ρ из $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ достигается на некоторой мере из $\text{extr } \mathcal{P}_{\{\rho\}}(\mathcal{A})$.

Предположим, что функция (6.1) не является полунепрерывной снизу. Тогда существует последовательность $\{\rho_n\} \subset \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$, сходящаяся к состоянию $\rho_0 \in \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ такая, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} F(\rho_n) < F(\rho_0). \quad (6.3)$$

Как показано выше, при каждом $n = 1, 2, \dots$ существует мера μ_n в $\mathcal{P}_{\{\rho_n\}}(\mathcal{A})$ такая, что $F(\rho_n) = \hat{f}(\mu_n)$. Поскольку последовательность $\{\rho_n\}$ – это компактное множество, приведенный выше критерий компактности показывает существование подпоследовательности $\{\mu_{n_k}\}$, сходящейся к некоторой мере μ_0 . В силу непрерывности отображения $\mu \mapsto \mathbf{b}(\mu)$ мера μ_0 лежит в $\mathcal{P}_{\{\rho_0\}}(\mathcal{A})$. Из полунепрерывности снизу функционала (6.2) следует, что

$$F(\rho_0) \leq \hat{f}(\mu_0) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \hat{f}(\mu_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} F(\rho_{n_k}),$$

что противоречит (6.3).

Последнее утверждение предложения следует из предыдущих и леммы 1 из [7].

6.2. О существовании состояния с заданным числом Шмидта, любое счетное выпуклое разложение которого не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта. Сначала мы покажем, что сепарабельное счетно-неразложимое состояние, построенное в [7], на самом деле обладает более сильным свойством: любое счетное выпуклое разложение этого состояния не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта (счетная неразложимость означает отсутствие разложения в выпуклую комбинацию чистых состояний-произведений – состояний с рангом Шмидта = 1). Затем, используя это наблюдение, мы построим состояние с заданным числом Шмидта, любое счетное выпуклое разложение которого не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта.

Конструкцию упомянутого выше сепарабельного состояния представим, следуя обозначениям из [7]. Рассмотрим одномерную группу вращений G , отождествляя ее с интервалом $[0, 2\pi)$ со сложением $\text{mod } 2\pi$. Пусть $\mathcal{H} = L^2([0, 2\pi))$ с нормированной мерой Лебега $dx/2\pi$, и пусть $\{|k\rangle; k \in \mathbf{Z}\}$ – ортонормированный тригонометрический базис в $\mathcal{H}$, для которого

$$\langle k|\psi\rangle = \int_0^{2\pi} e^{-ixk} \psi(x) \frac{dx}{2\pi}.$$

Рассмотрим унитарное представление $x \rightarrow V_x$ группы G , где $V_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{ixk} |k\rangle\langle k|$, такое, что $(V_u \psi)(x) = \psi(x+u)$.

Для произвольных единичных векторов $|\varphi_j\rangle \in \mathcal{H}_j \simeq L^2([0, 2\pi))$, $j = 1, 2$, рассмотрим сепарабельное состояние

$$\rho_{12} = \int_0^{2\pi} V_x^{(1)} |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| (V_x^{(1)})^* \otimes V_x^{(2)} |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| (V_x^{(2)})^* \frac{dx}{2\pi}. \quad (6.4)$$

Следующее предложение усиливает утверждение теоремы 3 из [7]. Его доказательство является естественным обобщением доказательства этой теоремы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть ρ_{12} – сепарабельное состояние, определенное в (6.4). Если все коэффициенты Фурье (координаты в базисе $\{|k\rangle\}$) векторов $|\varphi_j\rangle$ отличны от нуля, то оператор

$$\rho_{12} - \lambda\sigma$$

не является положительным при любом $\lambda > 0$ и любом чистом состоянии σ с конечным рангом Шмидта.

Это означает, в частности, что любое счетное выпуклое разложение состояния ρ_{12} не содержит чистых состояний с конечным рангом Шмидта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует вектор $|\psi\rangle$ в $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ с рангом Шмидта n такой, что

$$\rho_{12} \geq |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (6.5)$$

Пусть $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i^1\rangle \otimes |\alpha_i^2\rangle$, где $\{|\alpha_i^j\rangle\}_{i=1}^n$, $j = 1, 2$, – наборы ортогональных векторов. Из неравенства (6.5) следует, что

$$\int_0^{2\pi} |\langle\lambda_1|V_x^{(1)}|\varphi_1\rangle|^2 |\langle\lambda_2|V_x^{(2)}|\varphi_2\rangle|^2 \frac{dx}{2\pi} \geq \left| \sum_{i=1}^n \langle\lambda_1|\alpha_i^1\rangle \langle\lambda_2|\alpha_i^2\rangle \right|^2 \quad (6.6)$$

для любых $\lambda_j \in L^2([0, 2\pi))$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим линейные отображения

$$L^2([0, 2\pi)) \ni \lambda \mapsto \Phi_j(\lambda) = \{\langle\alpha_i^j|\lambda\rangle\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n,$$

$$L^2([0, 2\pi)) \ni \lambda \mapsto \Psi_j(\lambda) = \overline{\langle\lambda|V_x^{(j)}|\varphi_j\rangle} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle\varphi_j|k\rangle\langle k|\lambda\rangle e^{-ikx}, \quad j = 1, 2.$$

Пусть $\mathcal{H}_0$ – плотное подмножество пространства $L^2([0, 2\pi))$, состоящее из тригонометрических полиномов (функций имеющих конечное число ненулевых коэффициентов Фурье). Поскольку $\langle\varphi_j|k\rangle \neq 0$ для всех k , отображения Ψ_j , $j = 1, 2$, являются линейными изоморфизмами в $\mathcal{H}_0$. Поэтому из (6.6) следует, что

$$|\langle A_1(\xi), \Xi(A_2(\eta)) \rangle_{\mathbb{C}^n}|^2 \leq \int_0^{2\pi} |\xi(x)\eta(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}, \quad \xi, \eta \in \mathcal{H}_0, \quad (6.7)$$

где $A_j(\cdot) = \Phi_j(\Psi_j^{-1}(\cdot))$, $j = 1, 2$, – линейные отображения из $\mathcal{H}_0$ в $\mathbb{C}^n$, а Ξ – комплексное сопряжение в $\mathbb{C}^n$.

Поскольку $\{\Phi_2(\lambda) \mid \lambda \in L^2([0, 2\pi))\} = \mathbb{C}^n$, имеем $\{\Phi_2(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{H}_0\} = \mathbb{C}^n$ и, следовательно, $\{A_2(\xi) \mid \xi \in \mathcal{H}_0\} = \mathbb{C}^n$. Поэтому существует набор $|\eta_1\rangle, \dots, |\eta_n\rangle$ векторов

из базиса $\{|k\rangle\}$ такой, что векторы $A_2(\eta_1), \dots, A_2(\eta_n)$ образуют базис в $\mathbb{C}^n$. Поскольку $|\eta_i(x)| = 1$, из (6.7) следует, что

$$|\langle A_1(\xi), \Xi(A_2(\eta_i)) \rangle_{\mathbb{C}^n}|^2 \leq \int_0^{2\pi} |\xi(x)|^2 \frac{dx}{2\pi} = \|\xi\|^2, \quad i = 1, \dots, n, \quad \xi \in \mathcal{H}_0.$$

Поэтому отображение A_1 ограничено на $\mathcal{H}_0$ и может быть расширено до ограниченного линейного отображения A_1 из $L^2([0, 2\pi))$ в $\mathbb{C}^n$.

Аналогичное рассуждение показывает возможность расширения отображения A_2 до ограниченного линейного отображения A_2 из $L^2([0, 2\pi))$ в $\mathbb{C}^n$.

Поскольку анти-линейный оператор $B = A_1^* \circ \Xi \circ A_2$ в пространстве $L^2([0, 2\pi))$ имеет ранг $\leq n$, он имеет представление $B(\cdot) = \sum_{i=1}^n \langle \cdot | \beta_i^2 \rangle | \beta_i^1 \rangle$, где $\{|\beta_i^j\rangle\}$, $j = 1, 2$, – наборы векторов из $L^2([0, 2\pi))$, причем набор $\{|\beta_i^1\rangle\}$ состоит из линейно независимых векторов.

Поэтому (6.7) можно переписать следующим образом:

$$\left| \sum_{i=1}^n \langle \xi | \beta_i^1 \rangle \langle \eta | \beta_i^2 \rangle \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |\xi(x)\eta(x)|^2 \frac{dx}{2\pi}. \quad (6.8)$$

В силу приведенной ниже леммы 3 для произвольного $\varepsilon > 0$ можно найти подмножество $\mathcal{A} \subset [0, 2\pi)$ с мерой Лебега $< \varepsilon$ такое, что функции $\beta_1^1, \beta_2^1, \dots, \beta_n^1$ линейно независимы на $\mathcal{A}$. Поэтому при каждом i можно найти функцию ξ с носителем в $\mathcal{A}$ такую, что $\langle \xi | \beta_i^1 \rangle \neq 0$, но $\langle \xi | \beta_j^1 \rangle = 0$ для всех $j \neq i$. Для этой функции ξ и произвольной функции η с носителем в $[0, 2\pi) \setminus \mathcal{A}$ правая часть (6.8) равна нулю, а значит, $\langle \eta | \beta_i^2 \rangle = 0$, и поэтому $\beta_i^2(x) = 0$ почти всюду в $[0, 2\pi) \setminus \mathcal{A}$. Следовательно, мера носителя функции β_i^2 не превосходит ε , а значит, $\beta_i^2(x) = 0$ почти всюду в $[0, 2\pi)$. Поэтому $B = 0$, откуда следует, что $|\psi\rangle = 0$.

В следующей лемме линейная независимость измеримых функций $f_1, \dots, f_n$ на измеримом подмножестве $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ означает, что любая нетривиальная линейная комбинация этих функций не равна нулю почти всюду на $\mathcal{A}$.

ЛЕММА 3. Пусть $f_1, \dots, f_n$ – линейно независимые измеримые функции на $[a, b]$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует подмножество $\mathcal{A} \subset [a, b]$ с мерой Лебега $\mu(\mathcal{A}) < \varepsilon$ такое, что функции $f_1, \dots, f_n$ линейно независимы на $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1, 2$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что оно верно при заданном n и покажем его выполнимость при $n + 1$.

По предположению для любого $\varepsilon > 0$ и каждого набора функций $\{f_i\} \setminus f_j$, $j = 1, \dots, n + 1$, существует подмножество $\mathcal{A}_j^\varepsilon \subset [a, b]$ с $\mu(\mathcal{A}_j^\varepsilon) < \varepsilon$ такое, что функции этого набора линейно независимы на $\mathcal{A}_j^\varepsilon$.

Если утверждение леммы не верно для $n + 1$, то существует $\varepsilon_* > 0$ такое, что функции $f_1, \dots, f_{n+1}$ линейно зависимы на любом подмножестве $\mathcal{A} \subset [a, b]$ с $\mu(\mathcal{A}) < \varepsilon_*$.

Пусть $\varepsilon < \varepsilon_*/2(n + 1)$ и $\mathcal{A}^\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathcal{A}_j^\varepsilon$. Выберем конечный набор $\{\mathcal{B}_k\}$ непересекающихся подмножеств множества $[a, b] \setminus \mathcal{A}^\varepsilon$ таких, что $\mu(\mathcal{B}_k) < \varepsilon_*/2$ и $\bigcup_k \mathcal{B}_k = [a, b] \setminus \mathcal{A}^\varepsilon$.

При каждом k пусть $\mathcal{C}_k = \mathcal{A}^\varepsilon \cup \mathcal{B}_k$. Поскольку $\mu(\mathcal{C}_k) < \varepsilon_*$, существует такой набор $\{\lambda_i^k\}_{i=1}^{n+1}$ комплексных чисел, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^k f_i(x) = 0 \quad \text{почти всюду на } \mathcal{C}_k, \quad \sum_{i=1}^{n+1} |\lambda_i^k| > 0. \quad (6.9)$$

Поскольку $\mathcal{A}_j^\varepsilon \subseteq \mathcal{C}_k$ для всех j , нетрудно видеть, что $\lambda_i^k \neq 0$ для всех i . Поэтому можно считать, что $\lambda_{n+1}^k = 1$. Поскольку функции $f_1, \dots, f_{n+1}$ линейно независимы на $[a, b] = \bigcup_k \mathcal{C}_k$, существуют k_1 и k_2 такие, что $\{\lambda_i^{k_1}\}_{i=1}^{n+1} \neq \{\lambda_i^{k_2}\}_{i=1}^{n+1}$. Из (6.9) следует, что

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i^{k_1} - \lambda_i^{k_2}) f_i(x) = 0 \quad \text{почти всюду на } \mathcal{A}_{n+1}^\varepsilon \subseteq \mathcal{C}_{k_1} \cap \mathcal{C}_{k_2}, \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i^{k_1} - \lambda_i^{k_2}| > 0,$$

что противоречит конструкции множества $\mathcal{A}_{n+1}^\varepsilon$.

6.3. Пример состояния ω с $\text{SN}(\omega) = k \in \mathbb{N}$ такого, что оператор $\omega - \lambda\sigma$ не является положительным для любого чистого состояния σ с конечным рангом Шмидта и любого $\lambda > 0$. Пусть $\{|\varphi_1^i\rangle\}_{i=1}^k$ и $\{|\varphi_2^i\rangle\}_{i=1}^k$ – наборы ортогональных единичных векторов из $\mathcal{H}_1 = L^2([0, 2\pi])$ и $\mathcal{H}_2 = L^2([0, 2\pi])$ соответственно, имеющих ненулевые коэффициенты Фурье. Пусть $\mathcal{K}$ – k -мерное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{|i\rangle\}_{i=1}^k$. Для каждого натурального n рассмотрим состояние

$$\rho_{123}^n = \int_0^{2\pi/n} V_x^{(1)} \otimes V_x^{(2)} \otimes I_{\mathcal{K}} \cdot |\Omega\rangle\langle\Omega| \cdot (V_x^{(1)})^* \otimes (V_x^{(2)})^* \otimes I_{\mathcal{K}} \frac{n dx}{2\pi} \quad (6.10)$$

из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K})$, где

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{i=1}^k |\varphi_1^i\rangle \otimes |\varphi_2^i\rangle \otimes |i\rangle$$

– единичный вектор из $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}$.

Далее (говоря о ранге и числе Шмидта) будем считать пространство $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}$ тензорным произведением пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}$.

Поскольку состояние ρ_{123}^n лежит в выпуклом замыкании семейства локальных унитарных “трансляций” состояния $|\Omega\rangle\langle\Omega|$, у которого $\text{SR}(|\Omega\rangle\langle\Omega|) = k$, для всех n выполнено $\text{SN}(\rho_{123}^n) \leq k$. Поскольку последовательность $\{\rho_{123}^n\}$ сходится к состоянию $|\Omega\rangle\langle\Omega|$, из полунепрерывности снизу числа Шмидта (предложение 1, А) следует, что $\text{SN}(\rho_{123}^n) = k$ для достаточно большого n .

Предположим, что

$$\rho_{123}^n \geq \lambda |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (6.11)$$

при некотором $\lambda > 0$, где $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ – чистое состояние в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K})$ с конечным рангом Шмидта. Пусть $P_i = I_{\mathcal{H}_1} \otimes I_{\mathcal{H}_2} \otimes |i\rangle\langle i|$. Поскольку $\sum_{i=1}^k P_i = I_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}}$, существует такой i_0 , что $P_{i_0}|\Psi\rangle \neq 0$. Можно считать, что $i_0 = 1$. Поэтому $P_1|\Psi\rangle = \nu|\psi\rangle \otimes |1\rangle$, где $\nu > 0$ и $|\psi\rangle$ – единичный вектор из $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Поскольку $P_1 \rho_{123}^n P_1 = k^{-1} \rho_{12}^n \otimes |1\rangle\langle 1|$, где

$$\rho_{12}^n = \int_0^{2\pi/n} V_x^{(1)} |\varphi_1^1\rangle\langle\varphi_1^1| (V_x^{(1)})^* \otimes V_x^{(2)} |\varphi_2^1\rangle\langle\varphi_2^1| (V_x^{(2)})^* \frac{n dx}{2\pi},$$

из (6.11) следует, что $\rho_{12}^n \geq k\lambda\nu|\psi\rangle\langle\psi|$. Поскольку $P_1(\cdot)P_1$ и $\text{Tr}_{\mathcal{K}}(\cdot)$ – локальные операции, состояние $|\psi\rangle\langle\psi|$ имеет конечный ранг Шмидта. Следовательно, предложение 10 показывает, что $\lambda = 0$.

Автор благодарен А. С. Холево за помощь в работе над статьей и участникам семинара “Квантовая вероятность, статистика, информация” (МИАН им. В. А. Стеклова), а также Т. В. Шульман за интерес к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. M. Terhal, P. Horodecki, “Schmidt number for density matrices”, *Phys. Rev. A*, **61**:4 (2000), 040301.
- [2] A. Sanpera, D. Bruß, M. Lewenstein, “Schmidt-number witnesses and bound entanglement”, *Phys. Rev. A*, **63**:5 (2001), 050301.
- [3] J. Sperling, W. Vogel, “The Schmidt number as a universal entanglement measure”, *Phys. Scr.*, **83**:4 (2011), 045002.
- [4] J. Sperling, W. Vogel, “Determination of the Schmidt number”, *Phys. Rev. A*, **83**:4 (2011), 042315.
- [5] D. Chruściński, A. Kossakowski, “On partially entanglement breaking channels”, *Open Syst. Inf. Dyn.*, **13**:1 (2006), 17–26.
- [6] M. E. Shirokov, *Monotonicity of the Holevo Quantity: A Necessary Condition for Equality in Terms of a Channel*, 2011, arXiv: 1106.3297.
- [7] Р. Ф. Вернер, А. С. Холево, М. Е. Широков, “О понятии сцепленности в гильбертовых пространствах”, *УМН*, **60**:2 (2005), 153–154, arXiv: quant-ph/0504204.
- [8] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1974.
- [9] C. D. Aliprantis, K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker’s Guide*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [10] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Math. Ser., **28**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [11] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977.
- [12] K. R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Probab. Math. Stat., **3**, Academic Press, New York, 1967.
- [13] А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, ИКИ, Ижевск, 2003.
- [14] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [15] M. B. Plenio, S. Virmani, “An introduction to entanglement measures”, *Quantum Inf. Comput.*, **7**:1-2 (2007), 1–51.
- [16] М. Е. Широков, “Свойства пространства квантовых состояний и монотонные характеристики сцепленности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 189–224.
- [17] М. Е. Широков, А. С. Холево, “Об аппроксимации бесконечномерных квантовых каналов”, *Пробл. передачи информ.*, **44**:2 (2008), 3–22.
- [18] M. Horodecki, P. W. Shor, M. B. Ruskai, “Entanglement breaking channels”, *Rev. Math. Phys.*, **15**:6 (2003), 629–641.

М. Е. Широков

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,

г. Москва

E-mail: msh@mi.ras.ru

Поступило

15.11.2011