Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Ефимов, О $\overset{\#}{\leq}$ -порядке на множестве линейных
ограниченных операторов в банаховом пространстве,
Матем. заметки, 2013, том 93, выпуск 5, 794–797

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:24:19

$\leq^\#$ -порядке на множестве линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве

М. А. Ефимов

Пусть $M_n(\mathbb{C})$ обозначает пространство квадратных матриц порядка n с комплексными коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ имеет индекс k ($\text{Ind } A = k$), если $\text{rk } A^k = \text{rk } A^{k+1}$ и k есть наименьшее натуральное число с таким свойством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Групповая обратная матрица $A^\#$ для $A \in M_n(\mathbb{C})$ – это матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$AA^\#A = A, \quad A^\#AA^\# = A^\#, \quad AA^\# = A^\#A.$$

Для данной матрицы A групповая обратная матрица $A^\#$ существует тогда и только тогда, когда $\text{Ind } A = 1$, т.е. $\text{rk } A = \text{rk } A^2$ (см. [1], [2]). Более того, $A^\#$ либо не существует, либо единственна, см. [3], [4]. Со свойствами групповой обратной матрицы можно ознакомиться в работах [5]–[7].

Рассмотрим следующие бинарные отношения:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [3]. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Положим $A \leq^\# B$, если $A = B$ или

$$\text{Ind } A = 1, \quad AA^\# = BA^\# = A^\#B.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [8], [9]. Пусть $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Положим $A \leq B$, если выполнено условие

$$\text{rk } A + \text{rk}(B - A) = \text{rk } B.$$

Введенные отношения являются частичными порядками на $M_n(\mathbb{C})$, т.е. рефлексивны, антисимметричны и транзитивны; для доказательства см. [10].

В работе [11] отношение $\leq^\#$ -порядка было перенесено на случай ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве. Пусть H – гильбертово пространство над полем комплексных чисел, $B(H)$ – совокупность линейных ограниченных операторов на пространстве H . Оператор P будем называть идемпотентом, если $P^2 = P$, I – тождественный оператор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [11]. Пусть $A, B \in B(H)$. Положим $A \leq B$, если найдутся такие идемпотенты $P, Q \in B(H)$, что

$$\overline{\text{Im } A} = \text{Im } P, \quad \text{Ker } A = \text{Ker } Q, \quad PA = PB, \quad AQ = BQ.$$

Полученное отношение также является частичным порядком и совпадает с матричным $\leq^\#$ -порядком, если H конечномерно. Говоря о совпадении порядков на множестве матриц и линейных операторов в конечномерном пространстве, мы имеем в виду отождествление линейного оператора с его матрицей в некотором фиксированном базисе.

В данной работе вводится операторный аналог матричного $\leq^\#$ -порядка. Отметим, что $\leq^\#$ -порядок может быть корректно определен в более общем случае банаховых пространств, тогда как $\leq$ -порядок в работе [11] рассмотрен только для гильбертовых пространств.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ МД-2502.2012.1 и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00140-а).

DOI: 10.4213/mzm10235

Итак, пусть X – банахово пространство над полем комплексных чисел, $B(X)$ – совокупность линейных ограниченных операторов на пространстве X . Предлагается следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $A, B \in B(X)$. Положим $A \overset{\#}{\leq} B$, если $A = B$, или найдется такой идемпотент $P \in B(X)$, что

$$\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P, \quad \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P, \quad PA = PB, \quad AP = BP.$$

ЛЕММА 1. Пусть $A, P \in B(X)$, оператор P – идемпотент, $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$. Тогда

$$AP = PA = A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(I - P),$$

откуда

$$(I - P)A = 0, \quad PA = A.$$

Аналогично,

$$\operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P \subseteq \operatorname{Ker} A, \quad A(I - P) = 0, \quad AP = A.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если пространство X конечномерно, то определения 3 и 6 эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \overset{\#}{\leq} B$ в смысле определения 3, $A \neq B$. Тогда существует $A^\#$, $AA^\# = BA^\# = A^\#B$. Положим $P = AA^\#$. Тогда

$$P^2 = P, \quad \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} P, \quad \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P, \quad PA = PB, \quad AP = BP, \quad A \overset{\#}{\leq} B$$

по определению 6.

Пусть, напротив, существует идемпотент P такой, что

$$\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P, \quad \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P, \quad PA = PB, \quad AP = BP.$$

Тогда $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A^2$, и существует $A^\#$. Имеем $\operatorname{Im} A^\# = \operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A^\# = \operatorname{Ker} A$. Тогда по лемме 1, примененной к $A^\#$ и P , имеем

$$BA^\# = BPA^\# = APA^\# = AA^\#.$$

Аналогично, $A^\#B = A^\#A$ и $A \overset{\#}{\leq} B$ по определению 3.

ЛЕММА 2. Пусть $A, B \in B(X)$, $A \overset{\#}{\leq} B$, X гильбертово. Тогда $A \overline{\leq} B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно следует из сравнения определений порядков.

Обозначим через $I_s(X)$ множество таких $A \in B(X)$, что существует идемпотент P с условием $\overline{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} P$.

ЛЕММА 3. Пусть $A \in B(X)$. Тогда $A \in I_s(X)$, если и только если выполнено $\overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $A \in I_s(X)$. Тогда существует идемпотент P такой, что $\overline{\text{Im } A} = \text{Im } P$, $\text{Ker } A = \text{Ker } P$. Но $X = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$, так как P – идемпотент. Тем самым, $\overline{\text{Im } A} \oplus \text{Ker } A = X$.

Достаточность. Пусть $\overline{\text{Im } A} \oplus \text{Ker } A = X$. Зададим P по правилу $P(x + y) = x$ при всех $x \in \overline{\text{Im } A}$, $y \in \text{Ker } A$. Тогда

$$P^2 = P, \quad \text{Im } P = \overline{\text{Im } A}, \quad \text{Ker } P = \text{Ker } A,$$

оператор P непрерывен по теореме о замкнутом графике, и $A \in I_s(X)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Операторы $A, B \in B(X)$ ортогональны ($A \perp B$), если $AB = BA = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A, B \in B(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $A \overset{\#}{\leq} B$;
- 2) $A = B$ или существует такое прямое разложение пространства X в сумму замкнутых подпространств $X = X_1 \oplus X_2$, что линейные операторы $A, B: X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2$ имеют следующие матричные представления:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

где $A_1: X_1 \rightarrow X_1$ и $B_1: X_2 \rightarrow X_2$ – ограниченные линейные операторы, A_1 инъективен, $\overline{\text{Im } A} = X_1$;

- 3) $A = B$ или $A \in I_s(X)$, $A \perp (B - A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A = B$, то эквивалентность очевидна. Будем считать, что $A \neq B$.

- 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $A \overset{\#}{\leq} B$. Тогда существует идемпотент P такой, что

$$\overline{\text{Im } A} = \text{Im } P, \quad \text{Ker } A = \text{Ker } P, \quad PA = PB, \quad AP = BP.$$

Заметим, что $A \in I_s(X)$. Обозначим $X_1 = \text{Im } P$, $X_2 = \text{Ker } P$. Тогда $X_1 \oplus X_2 = X$, и оператор $A: X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2$ имеет матричное представление

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $A_1: X_1 \rightarrow X_1$, A_1 инъективен, $\overline{\text{Im } A_1} = X_1$. Кроме того, $P \perp (B - A)$. Обозначив $C = B - A$, имеем $\text{Im } C \subseteq \text{Ker } P = X_2$, $X_1 = \text{Im } P \subseteq \text{Ker } C$. Следовательно, $C: X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2$ имеет матричное представление

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

2) $\Rightarrow$ 3). Заметим, что $\overline{\text{Im } A} = \overline{\text{Im } A_1} = X_1$, $\text{Ker } A = X_2$. Тем самым, $A \in I_s(X)$ по лемме 3. Условие $A \perp (B - A)$ проверяется непосредственно.

3) $\Rightarrow$ 1). Так как $A \in I_s(X)$, то существует такой идемпотент P , что $\overline{\text{Im } A} = \text{Im } P$, $\text{Ker } A = \text{Ker } P$. Условие $A \perp (B - A)$ можно переписать в виде

$$\text{Im } A \subseteq \text{Ker}(B - A), \quad \text{Im}(B - A) \subseteq \text{Ker } A.$$

Кроме того, $\text{Ker}(B - A)$ – замкнутое подпространство, откуда $\overline{\text{Im } A} \subseteq \text{Ker}(B - A)$. Следовательно,

$$\text{Im } P \subseteq \text{Ker}(B - A), \quad \text{Im}(B - A) \subseteq \text{Ker } P, \quad P \perp (B - A).$$

Иными словами, $PA = PB$, $AP = BP$, и $A \overset{\#}{\leq} B$ по определению 6.

ЛЕММА 4. Пусть $A, B, C \in B(X)$, $A \overset{\#}{\leq} B$, $B \perp C$. Тогда $A \perp C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A = B$, то $A \perp C$. Пусть $A \neq B$. Тогда найдется такой идемпотент P , что

$$\overline{\text{Im } A} = \text{Im } P, \quad \text{Ker } A = \text{Ker } P, \quad PA = PB, \quad AP = BP.$$

По лемме 1 имеем $AP = PA = A$ и $AC = PAC = PBC = 0$. Аналогично, $CA = 0$. Тем самым, $A \perp C$.

ТЕОРЕМА 2. Отношение $\overset{\#}{\leq}$ является частичным порядком.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По определению, $A \overset{\#}{\leq} A$ для всех $A \in B(X)$.

2) Пусть $A \overset{\#}{\leq} B$, $B \overset{\#}{\leq} A$. Покажем, что $A = B$. Из условия $A \overset{\#}{\leq} B$ по пункту 2 теоремы 1 получаем $\text{Im } A \subseteq \text{Im } B$, $\text{Ker } B \subseteq \text{Ker } A$. Аналогично, $\text{Im } B \subseteq \text{Im } A$, $\text{Ker } A \subseteq \text{Ker } B$. Тем самым, $\text{Im } A = \text{Im } B$, $\text{Ker } A = \text{Ker } B$. По определению 6 найдется такой идемпотент $P \in B(X)$, что

$$\overline{\text{Im } A} = \text{Im } P, \quad \text{Ker } A = \text{Ker } P, \quad PA = PB, \quad AP = BP.$$

По лемме 1 имеем $A = PA = PB = B$.

3) Пусть $A \overset{\#}{\leq} B$, $B \overset{\#}{\leq} C$. Если $A = B$ или $B = C$, то $A \overset{\#}{\leq} C$. Пусть $A \neq B$, $B \neq C$. Тогда

$$A \in I_s(X), \quad A \perp (B - A), \quad B \perp (C - B)$$

по пункту 3 теоремы 1. Кроме того, так как $A \overset{\#}{\leq} B$ и $B \perp (C - B)$, то $A \perp (C - B)$ по лемме 4. Тем самым,

$$A \perp (C - A) = (B - A) + (C - B), \quad A \overset{\#}{\leq} C.$$

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. K. Mitra, *Sankhyā Ser. A.*, **30** (1963), 323—330. [2] M. J. Englefield, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **62**:4 (1966), 667—671. [3] S. K. Mitra, *Linear Algebra Appl.*, **92** (1987), 17—37. [4] P. Robert, *J. Math. Anal. Appl.*, **22**:3 (1968), 658—669. [5] I. Erdélyi, *J. Math. Anal. Appl.*, **17**:1 (1967), 119—132. [6] C. R. Rao, S. K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, Wiley Ser. Probab. Math. Stat., John Wiley & Sons, New York, 1971. [7] A. Ben-Israel, T. N. E. Greville, *Generalized Inverses. Theory and Applications*, Pure Appl. Math., John Wiley & Sons, New York, 1974. [8] R. E. Hartwig, *Math. Japon.*, **25**:1 (1980), 1—13. [9] K. S. S. Nambooripad, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2), **23**:3 (1980), 249—260. [10] S. K. Mitra, R. E. Hartwig, *Linear Algebra Appl.*, **176** (1992), 3—20. [11] P. Šemrl, *J. Math. Anal. Appl.*, **369**:1 (2010), 205—213.

М. А. Ефимов

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: efimov.mikhail@gmail.com

Поступило

15.10.2012