Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Иванов, Пример компакта несчетного характера, для которого пространства $\exp_n(X) \setminus X$ нормальны, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 221–229

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10237>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 05:39:12

Пример компакта несчетного характера, для которого пространства $\exp_n(X) \setminus X$ нормальны

А. В. Иванов

В предположении аксиомы Йенсена построен компакт X несчетного характера, для которого пространство $\exp_n(X) \setminus X$ нормально при каждом n . Тем самым доказано, что теорема Архангельского–Комбарова о счетности характера компакта, квадрат которого нормален вне диагонали, не может быть “наивно” перенесена на нормальные функторы конечной степени.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10237

Проблематика статьи берет начало от работы Федорчука [1], в которой классическая теорема Катетова о кубе компакта была перенесена на произвольные нормальные функторы степени $\geq 3^1$. Суть полученного Федорчуком результата состоит в том, что теорема Катетова о меризуемости компакта, куб которого наследственно нормален, не связана со спецификой конкретного функтора возведения компакта в степень 3, а является свойством многих других топологических конструкций, объединенных в понятии нормального функтора $\mathcal{F}$, определение которого принадлежит Щепину [3]. Исследования Федорчука были продолжены многими авторами как в направлении ослабления условия нормальности функтора $\mathcal{F}$ (см., например [4]–[6]), так и в направлении ослабления требования наследственной нормальности пространства $\mathcal{F}(X)$ [7], [8]. В настоящее время задача описания полунормальных функторов, для которых справедлив аналог теоремы Катетова, практически полностью решена (см. [6]).

В 1990 г. Архангельский и Комбаров [9] доказали теорему, согласно которой любой компакт, квадрат которого нормален вне диагонали, имеет счетный характер. Другими словами, если для компакта X пространство $X^2 \setminus \Delta$ нормально, то $\chi(X) \leq \omega_0$. Для любого полунормального функтора $\mathcal{F}$ и любого компакта X имеется каноническое вложение $X \subset \mathcal{F}(X)$, которое для функтора возведения компакта в степень n является отображением, отождествляющим X с диагональю $\Delta \subset X^n$. Поэтому на языке функторов теорема Архангельского–Комбарова может быть сформулирована так: если пространство $\mathcal{F}(X) \setminus X$ нормально, то $\chi(X) \leq \omega_0$, где $\mathcal{F}$ – функтор возведения компакта в степень 2. Естественно возникает вопрос о справедливости этого утверждения для других нормальных или полунормальных функторов.

¹Все определения, касающиеся функторов в категории компактов, можно найти в [2].

В настоящей работе показано, что “наивное” положительное решение этого вопроса невозможно даже для функторов exr_n ². А именно, в предположении выполнения аксиомы Йенсена построен компакт X несчетного характера, для которого пространство $\text{exr}_n(X) \setminus X$ нормально при любом $n \in \mathbb{N}$.

Для построения компакта X используется метод резольвент Федорчука [10] и развитая в [11] и [5] техника применения этого метода для построения компактов с заданными свойствами их степеней. В дальнейшем мы рассматриваем только компактные хаусдорфовы пространства (компакты); через $[A]$ обозначается замыкание множества A .

Мы будем использовать вариант формулировки аксиомы Йенсена, предложенный Федорчуком [12] под названием “аксиомы F ”³. Пусть ω_1 – первый несчетный ординал. Подмножество $B \subset \omega_1$ называется *стационарным*, если для любого несчетного замкнутого (в порядковой топологии ω_1) множества $F \subset \omega_1$ пересечение $F \cap B$ непусто. Известно, что каждое несчетное замкнутое подмножество ω_1 стационарно.

Пусть R – некоторое множество мощности континуум, α – ординал и R^α – множество отображений из α в R . Отображение $p: \alpha \rightarrow R^\alpha$ называется (R, α) -последовательностью. В дальнейшем для множества значений $\{p(\beta) : \beta < \alpha\}$ (R, α) -последовательности p мы также будем использовать обозначение p . Для каждой (R, α) -последовательности p и каждого ординала $\gamma < \alpha$ определена (R, γ) -последовательность $p|_\gamma: \gamma \rightarrow R^\gamma$, значения которой определяются по формуле

$$p|_\gamma(\beta) = p(\beta)|_\gamma, \quad \beta < \gamma.$$

АКСИОМА ЙЕНСЕНА. Для любого $\alpha < \omega_1$ можно выбрать (R, α) -последовательность p_α так, что для любой (R, ω_1) -последовательности x множество

$$\{\alpha : x|_\alpha = p_\alpha\}$$

стационарно в ω_1 .

Последовательность $\Gamma = \langle p_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ называется при этом *универсальной гиперпоследовательностью*.

Аксиома Йенсена совместима с ZFC и влечет CH (см. [10]).

ТЕОРЕМА. Существует компакт X несчетного характера, для которого пространство $\text{exr}_n(X) \setminus X$ нормально при любом $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предположении выполнения аксиомы Йенсена зафиксируем универсальную гиперпоследовательность Γ .

Рассмотрим вполне упорядоченный обратный спектр множеств

$$S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \omega_1\},$$

в котором $X_\alpha = \alpha + 1$, а проекции π_β^α определяются формулой:

$$\pi_\beta^\alpha(\gamma) = \begin{cases} \beta, & \gamma > \beta, \\ \gamma, & \gamma \leq \beta. \end{cases}$$

²Пространство $\text{exr}_n(X)$ – пространство подмножеств X мощности $\leq n$ с топологией Вьеториса. Мы считаем X вложенным в $\text{exr}_n(X)$ при отождествлении точек $x \in X$ с одноточечными подмножествами $\{x\} \in \text{exr}_n(X)$.

³Как отметил впоследствии Федорчук, эквивалентность $\diamond$ и F несложно доказать, используя биекцию $\omega_1 \rightarrow \omega_1 \times \omega_1$.

Легко проверить, что спектр S непрерывен, т.е. для любого предельного $\alpha < \omega_1$ естественное отображение из X_α в предел спектра

$$S_\alpha = \{X_\beta, \pi_\gamma^\beta : \beta, \gamma < \alpha\}$$

является биекцией.

Предел $\lim S = X$ спектра S можно отождествить с $X_{\omega_1} = \omega_1 + 1$. Таким образом, точки каждого множества X_α , $\alpha \leq \omega_1$, являются ординалами. Однако в дальнейшем для точек $\beta \in X_\alpha$ мы будем использовать обозначение $x_\beta = \beta$, чтобы не путать эти точки с индексами спектра. Предельные проекции спектра S обозначим через π_α .

Пусть R – множество мощности c . Рассмотрим спектр множеств

$$T = \{R^\alpha, q_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \omega_1\},$$

где проекции $q_\beta^\alpha : R^\alpha \rightarrow R^\beta$ определены по формуле

$$q_\beta^\alpha(h) = h|_\beta, \quad h \in R^\alpha.$$

Спектр T непрерывен, т.е. для любого предельного γ отображение

$$\lim\{q_\alpha^\gamma : \alpha < \gamma\} : R^\gamma \rightarrow \lim\{R^\alpha, q_\beta^\alpha : \alpha, \beta < \gamma\}$$

является биекцией. В частности, мы можем отождествлять R^{ω_1} и $\lim T$.

Для каждого натурального n рассмотрим обратный спектр

$$S^n = \{X_\alpha^n, (\pi_\beta^\alpha)^n : \alpha, \beta < \omega_1\}$$

и выберем вложения

$$F_n = \{f_n^\alpha : \alpha < \omega_1\} : S^n \rightarrow T$$

спектров S^n в спектр T такие, что

$$f_n^\alpha(X_\alpha^n) \cap f_m^\alpha(X_\alpha^m) = \emptyset \quad \text{для любого } \alpha > 0$$

и $m \neq n$. Вложения F_n позволяют отождествлять точки множеств X_α^n с их образами в R^α при отображениях f_n^α , а точки $X^n = \lim S^n$ – с их образами в $R^{\omega_1} = \lim T$ при отображениях $\lim F_n$. В частности, мы будем считать, что элемент p_α универсальной гиперпоследовательности Γ лежит в X_α^n ($p_\alpha \subset X_\alpha^n$), если $p_\alpha \subset f_n^\alpha(X_\alpha^n)$.

Пусть A – некоторое множество и $E \subset A^n$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что E лежит в общем положении в A^n , если каждая проекция $r_i : A^n \rightarrow A$ произведения на i -й сомножитель, $i = 1, \dots, n$, взаимно однозначна на E и $r_i(E) \cap r_j(E) = \emptyset$ при $i \neq j$ (другими словами, все координаты всех точек E различны).

Искомый компакт X мы получим как предел спектра S , который будем топологизировать по рекурсии. В основе процесса лежит следующая

ЛЕММА 1. Пусть $g : X \rightarrow Y$ – отображение множества X на нульмерный метризуемый компакт Y , при котором лишь одна точка $a \in Y$ имеет нетривиальный прообраз, причем $|g^{-1}(a)| = 2$. Пусть $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ – счетное семейство множеств таких, что каждое E_k лежит в общем положении в некотором Y^{n_k} , $n_k \in \mathbb{N}$, и координаты всех точек E_k отличны от a . Тогда можно определить топологию на X так, что

- 1) X – нульмерный компакт;
- 2) отображение g непрерывно;
- 3) $[(g^{n_k})^{-1}(E_k)] = (g^{n_k})^{-1}[E_k]$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения дословно совпадает с доказательством аналогичной леммы из [5; с. 816–819].

ТОПОЛОГИЗАЦИЯ СПЕКТРА S . Рекурсия по α . На конечных множествах X_α при $\alpha < \omega_0$ зададим дискретную топологию, на X_{ω_0} определим топологию предела спектра $\lim S_{\omega_0}$. Если на X_α уже задана топология, назовем элемент p_α универсальной гиперпоследовательности Γ n -допустимым, если $p_\alpha \subset X_\alpha^n$ и в p_α можно выделить последовательность $s_\alpha \subset p_\alpha$, которая сходится к точке

$$(x_\alpha, \dots, x_\alpha) = x_\alpha^{(n)} \in X_\alpha^n,$$

лежит в X_α^n в общем положении и координаты всех точек s_α отличны от x_α . В дальнейшем будем считать, что последовательность $s_\alpha \subset p_\alpha$ фиксирована для каждого n -допустимого p_α .

Пусть для каждого $\alpha < \gamma$ на X_α задана топология так, что выполнены следующие условия:

- 1 $_\gamma$) проекции π_β^α непрерывны, $\beta < \alpha < \gamma$;
- 2 $_\gamma$) пространства X_α – нульмерные компакты, $\alpha < \gamma$;
- 3 $_\gamma$) спектр S_γ является непрерывным спектром топологических пространств;
- 4 $_\gamma$) если p_β – n -допустимый элемент, то для любого множества $D \subset X_\alpha^n$, $\beta < \alpha < \gamma$, такого, что $(\pi_\beta^\alpha)^n(D) \supset s_\beta$, выполняется включение $((\pi_\beta^\alpha)^n)^{-1}(x_\beta^{(n)}) \subset [D]$.

Заметим, что по определению топологии на X_α , $\alpha \leq \omega_0$, условия 1_{ω_0+1} – 4_{ω_0+1}) выполнены.

Если γ – предельное число, зададим на X_γ топологию предела спектра S_γ : $X_\gamma = \lim S_\gamma$. Очевидно, что условия $1_{\gamma+1}$ – $4_{\gamma+1}$) при этом выполнены.

Пусть теперь $\gamma = \delta + 1$. Возьмем произвольное n -допустимое множество p_β , $\beta \leq \delta$, и положим $s_\beta^\delta = ((\pi_\beta^\delta)^n)^{-1}(s_\beta)$. Заметим, что в силу определения последовательности $s_\beta \subset p_\beta$ отображение $(\pi_\beta^\delta)^n$ взаимно однозначно на s_β^δ и, следовательно, s_β^δ находится в общем положении в X_δ^n . Кроме того, координаты всех точек s_β^δ отличны от x_δ . Таким образом, для топологизации множества X_γ мы можем использовать лемму, где в качестве отображения g возьмем $\pi_\delta^\gamma: X_\gamma \rightarrow X_\delta$, в качестве a – точку x_δ , а множества E_k – это всевозможные последовательности s_β^δ для всех n -допустимых p_β (с различными значениями n) при $\beta \leq \delta$. Условия $1_{\gamma+1}$ – $3_{\gamma+1}$) будут выполнены при этом очевидным образом; $4_{\gamma+1}$) следует из 4_γ) и условия 3) леммы 1.

Продолжая рекурсию, мы получим спектр из компактов S , для предела которого $X = X_{\omega_1} = \lim S$ выполнены условия 1_{ω_1+1} – 4_{ω_1+1}). Очевидно, что характер X в точке ω_1 несчетен.

ЛЕММА 2. Все конечные степени компакта X наследственно сепарабельны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что любое несчетное подмножество $D \subset X^n$, лежащее в X^n в общем положении, не является дискретным. Без ограничения общности можно считать, что множество D не содержит точек, имеющих координату x_{ω_1} . Занумеруем точки D счетными ординалами в (R, ω_1) -последовательность

$D = \langle d_\beta : \beta < \omega_1 \rangle$ (напомним, что выше мы договорились считать X^n подмножеством R^{ω_1}) так, чтобы для любого $\alpha < \omega_1$ множество значений (R, α) -последовательности $D|_\alpha$ лежало в X_α^n в общем положении и не содержало точек, имеющих координату x_α (возможно, при этом нумерацию придется вести с повторением). Из непрерывности спектра S следует, что множество A тех α , для которых

$$x_\alpha^{(n)} \in [D|_\alpha]$$

замкнуто и неограничено в ω_1 .

В силу аксиомы Йенсена найдется $\alpha \in A$ такое, что $p_\alpha = D|_\alpha$. Тогда p_α является n -допустимым, и в силу условия 4_{ω_1+1}) для множества

$$D' = \{d_\beta : \beta < \alpha\} \subset D$$

выполняется включение $(\pi_\alpha^n)^{-1}(x_\alpha^{(n)}) \subset [D']$. Отсюда следует, что D не является дискретным, поскольку $(\pi_\alpha^n)^{-1}(x_\alpha^{(n)}) \cap D \neq \emptyset$.

Докажем теперь индукцией по n , что любое несчетное подмножество $D \subset X^n$ не является дискретным.

При $n = 1$ любое несчетное подмножество $D \subset X$ находится в X в общем положении; следовательно, D не дискретно. Предположим, что утверждение доказано при $n < k$, и допустим, что существует несчетное дискретное подмножество $D \subset X^k$. Обозначим через Δ_k обобщенную диагональ X^k , т.е. множество точек X^k , у которых хотя бы две координаты совпадают. Множество Δ_k является объединением конечного числа подпространств, гомеоморфных X^{k-1} . Следовательно, по предположению индукции пересечение $D \cap \Delta_k$ счетно. Таким образом, можно считать, что $D \subset X^k \setminus \Delta_k$. Все пересечения D со “слоями” X^k вида

$$\{(x_1, \dots, x_k) : x_i = c\}, \quad \text{где } c \in X, \quad 1 \leq i \leq k,$$

также счетны, поскольку эти слои гомеоморфны X^{k-1} . В такой ситуации легко построить несчетное подмножество $D' \subset D$, лежащее в X^k в общем положении, которое, как уже было доказано, дискретным быть не может. Получено противоречие.

Для завершения доказательства леммы теперь остается заметить, что всякий компакт, имеющий наследственно суслинский квадрат, наследственно сепарабелен (см. [13]).

ЛЕММА 3. Пусть $D \subset X^n \setminus \Delta_n$, координаты всех точек D отличны от x_{ω_1} и $x_{\omega_1}^{(n)} \in [D]$. Тогда существует $\alpha < \omega_1$ такое, что

$$(\pi_\alpha^n)^{-1}(x_\alpha^{(n)}) \subset [D].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем счетное подмножество $D' = \{d_i : i < \omega_0\} \subset D$ такое, что $D \subset [D']$. Рассмотрим (R, ω_1) -последовательность $b : \omega_1 \rightarrow D'$, которая определяется по формуле

$$b(i) = \begin{cases} d_i, & i < \omega_0, \\ d_0, & i \geq \omega_0. \end{cases}$$

По аксиоме Йенсена существует $\alpha > \omega_0$ такое, что $b|_\alpha = p_\alpha$ и координаты каждой точки (R, α) -последовательности $b|_\alpha = \langle \pi_\alpha^n(b(\beta)) : \beta < \alpha \rangle$ попарно различны и не равны x_α . В то же время поскольку $\alpha > \omega_0$

$$\{\pi_\alpha^n(b(\beta)) : \beta < \alpha\} = \pi_\alpha^n(D').$$

В силу выбора D' $x_{\omega_1}^{(n)} \in [D']$. Значит, $x_\alpha^{(n)} \in [\pi_\alpha^n(D')]$. Следовательно, существует последовательность $r \subset \pi_\alpha^n(D')$, которая сходится к $x_\alpha^{(n)}$. Координаты каждой точки r попарно различны и не равны x_α . Поэтому в последовательности r можно выбрать подпоследовательность r' , которая находится в общем положении в X_α^n . Таким образом, p_α является n -допустимым и в силу условия 4_{ω_1+1})

$$(\pi_\alpha^n)^{-1}(x_\alpha^{(n)}) \subset [D'].$$

Лемма доказана.

Для упрощения символики обозначим точку $x_{\omega_1} \in X$ через q . Пусть $i_1, \dots, i_{n-k}$, $k < n$, – набор попарно различных натуральных чисел, не превосходящих n . k -Гранью $G_{i_1, \dots, i_{n-k}}$ произведения X^n мы будем называть следующее множество:

$$G_{i_1, \dots, i_{n-k}} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_{i_1} = \dots = x_{i_{n-k}} = q\}$$

(здесь $i_1, \dots, i_{n-k}$ – номера фиксированных координат точек k -грани $G_{i_1, \dots, i_{n-k}}$; остальные координаты будем называть *свободными*). Каждая k -грань $G_{i_1, \dots, i_{n-k}}$ гомеоморфна X^k .

Диагональю k -грани $G_{i_1, \dots, i_{n-k}}$ назовем подмножество $\Delta_{i_1, \dots, i_{n-k}} \subset G_{i_1, \dots, i_{n-k}}$, состоящее из точек, у которых все свободные координаты равны. Диагональю 1-грани будем считать саму 1-грань.

Напомним, что точки X индексированы ординалами, не превосходящими ω_1 (в частности, $x_{\omega_1} = q$). Для каждого $\alpha < \omega_1$ определим α -отрезок X следующим образом:

$$\{x_\beta : \alpha \leq \beta \leq \omega_1\} \subset X.$$

Поскольку диагональ $\Delta_{i_1, \dots, i_{n-k}}$ любой k -грани $G_{i_1, \dots, i_{n-k}}$, $1 \leq k < n$, естественно гомеоморфна X , аналогично может быть определен α -отрезок диагонали $\Delta_{i_1, \dots, i_{n-k}}$.

ЛЕММА 4. Пусть $B \subset X^n \setminus \Delta$ (Δ – диагональ X^n) и $q^{(n)} \in [B]$. Тогда найдутся некоторая k -грань $G_{i_1, \dots, i_{n-k}}$ и $\alpha < \omega_1$ такие, что α -отрезок диагонали $\Delta_{i_1, \dots, i_{n-k}}$ этой k -грани лежит в $[B]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по n .

Пусть $n = 2$. Рассмотрим пересечения $B \cap G_1$, $B \cap G_2$, где G_1 , G_2 – 1-грани X^2 . Если

$$q^{(2)} \in [B \cap G_i] \quad (1)$$

при $i = 1$ или $i = 2$, то в силу леммы 3 подмножество $[B \cap G_i] \subset G_i = X$ содержит некоторый α -отрезок 1-грани G_i . Если же условие (1) не выполнено при $i = 1, 2$, то для множества $B' = B \setminus (G_1 \cup G_2)$ выполняются условия леммы 3. Следовательно, существует α такое, что $(\pi_\alpha^2)^{-1}(x_\alpha^{(2)}) \subset [B']$, и тогда $[B']$ содержит в себе α -отрезки обеих граней G_1 и G_2 .

Предположим теперь, что лемма доказана при $m < n$, и пусть множество $B \subset X^n \setminus \Delta$ удовлетворяет условиям леммы. Рассмотрим пересечения

$$B \cap G_1, \quad \dots, \quad B \cap G_n,$$

где $G_1, \dots, G_n$ — $(n-1)$ -грани X^n . Возможны следующие варианты.

1) Существует i такое, что $q^{(n)} \in [B \cap G_i]$. Тогда, если $q^{(n)} \in [B \cap \Delta_i]$ (Δ_i — диагональ $(n-1)$ -грани G_i), то в силу леммы 3 $[B \cap \Delta_i]$ содержит некоторый α -отрезок диагонали Δ_i , что и требуется.

Если же $q^{(n)} \notin [B \cap \Delta_i]$, то $q^{(n)} \in [(B \cap G_i) \setminus \Delta_i]$. Поскольку G_i гомеоморфно X^{n-1} и Δ_i — диагональ X^{n-1} , множество $(B \cap G_i) \setminus \Delta_i$ удовлетворяет условиям леммы для $n-1$. Следовательно, по предположению индукции $[(B \cap G_i) \setminus \Delta_i]$ содержит α -отрезок диагонали некоторой k -грани $X^{n-1} = G_i$, $k < n-1$, которая является одновременно k -гранью X^n .

2) Для любого i $q^{(n)} \notin [B \cap G_i]$. Пусть $i, j < n$, $i \neq j$. Положим

$$H_{ij} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = x_j\} \subset X^n.$$

Пусть $g_i: H_{ij} \rightarrow G_i$ — проекция H_{ij} на $(n-1)$ -грань G_i , при которой i -я координата точки $(x_1, \dots, x_n) \in H_{ij}$ заменяется на q . Пусть $\Delta_{i_1, \dots, i_{n-k}}$ — диагональ k -грани X^n , которая лежит в G_i . Тогда $i \in \{i_1, \dots, i_{n-k}\}$. Будем считать для определенности, что $i = i_1$. Легко проверить, что если $j \in \{i_1, \dots, i_{n-k}\}$, то

$$g_i^{-1}(\Delta_{i_1, \dots, i_{n-k}}) = \Delta_{i_1, \dots, i_{n-k}}. \quad (2)$$

Если же $j \notin \{i_1, \dots, i_{n-k}\}$, то

$$g_i^{-1}(\Delta_{i_1, \dots, i_{n-k}}) = \Delta_{i_2, \dots, i_{n-k}}. \quad (3)$$

Предположим теперь, что существуют $i, j < n$, $i \neq j$, такие, что $q^{(n)} \in [B \cap H_{ij}]$. Тогда множество $g_i(B \cap H_{ij}) \subset G_i = X^{n-1}$ удовлетворяет условиям нашей леммы для $n-1$. Следовательно, $[g_i(B \cap H_{ij})]$ содержит α -отрезок диагонали некоторой k -грани X^n , лежащей в G_i . Но тогда в силу (2) или (3) прообраз этого α -отрезка при отображении g_i будет α -отрезком диагонали, лежащим в $[B \cap H_{ij}]$, что и требуется.

Если же $q^{(n)} \notin [B \cap H_{ij}]$ для любой пары i, j , то

$$q^{(n)} \in \left[B \setminus \left(\bigcup_i G_i \cup \bigcup_{i,j} H_{ij} \right) \right].$$

Заметим, что объединение $\bigcup_{i,j} H_{ij}$ равно обобщенной диагонали произведения X^n . Следовательно, множество $B \setminus (\bigcup_i G_i \cup \bigcup_{i,j} H_{ij})$ удовлетворяет условиям леммы 3. Значит, существует α , для которого

$$(\pi_\alpha^n)^{-1}(x_\alpha^{(n)}) \subset \left[B \setminus \left(\bigcup_i G_i \cup \bigcup_{i,j} H_{ij} \right) \right] \subset [B].$$

Таким образом, в этом случае $[B]$ содержит α -отрезки всех 1-граней X^n . Лемма доказана.

Докажем теперь нормальность пространства $\text{exp}_n(X) \setminus X$. Пусть F_1, F_2 – дизъюнктные замкнутые подмножества $\text{exp}_n(X) \setminus X$. Возможны два варианта.

1) Пусть $q \notin [F_1]_{\text{exp}_n(X)}$. Тогда существуют окрестности $Oq, O'q$ точки q в $\text{exp}_n(X)$ такие, что $[Oq] \cap F_1 = \emptyset$ и $[O'q] \subset Oq$. Положим

$$A = X \setminus Oq, \quad A' = X \setminus O'q, \quad U = X \setminus [O'q].$$

Имеем $A \subset U \subset A'$. Множество $(A')^n$ является замкнутым счетным подмножеством компакта X^n . Следовательно, $(A')^n$ – метризуемый компакт. Далее,

$$A^n \subset U^n \subset (A')^n,$$

где A^n замкнуто, а U^n открыто в X^n . Значит, A^n – G_δ -подмножество X^n . Пусть $f: X^n \rightarrow \text{exp}_n(X)$ – непрерывное отображение, определяемое формулой

$$f(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Поскольку $f^{-1}(A) = \Delta_A \subset A^n$, множество $f^{-1}(A)$ также является G_δ -подмножеством X^n . Следовательно, A – G_δ -подмножество $\text{exp}_n(X)$.

Таким образом, подпространство $W = \text{exp}_n(X) \setminus (Oq \cup A)$ нормально. Следовательно, множества $F_1 \cap W$ и $F_2 \cap W$ имеют в W дизъюнктные окрестности V_1 и V_2 , которые можно продолжить до открытых множеств V'_1, V'_2 в $\text{exp}_n(X)$ ($V'_i \cap W = V_i$, $i = 1, 2$). Положим

$$OF_1 = V'_1 \setminus [Oq], \quad OF_2 = V'_2 \cup Oq.$$

Легко видеть, что $OF_1 \setminus X$ и $OF_2 \setminus X$ – дизъюнктные окрестности F_1 и F_2 в пространстве $\text{exp}_n(X) \setminus X$.

2) Пусть $q \in [F_i]$, $i = 1, 2$. Тогда

$$q^{(n)} \in [f^{-1}(F_i)] \subset X^n, \quad i = 1, 2,$$

и по лемме 4 $[f^{-1}(F_i)]$ содержит α -отрезок диагонали некоторой k -грани X^n . Но тогда в силу определения отображения f и замкнутости множеств $f^{-1}(F_i)$ в $X^n \setminus \Delta$ каждое множество $f^{-1}(F_i)$ содержит α -отрезки диагоналей всех k -граней X^n , $k < n$ (за вычетом точки $q^{(n)}$). Следовательно, $f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2) \neq \emptyset$, что противоречит дизъюнктности F_1 и F_2 . Итак, случай 2) невозможен.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Федорчук, “К теореме Катетова о кубе”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1989, № 4, 93–96.
- [2] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988.
- [3] Е. В. Щепин, “Функторы и несчетные степени компактов”, *УМН*, **36:3** (1981), 3–62.
- [4] Т. Ф. Жураев, “Функтор λ и метризуемость бикомпактов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 4, 54–56.
- [5] А. В. Иванов, Е. В. Кашуба, “О наследственной нормальности пространств вида $\mathcal{F}(X)$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **49:4** (2008), 813–824.

- [6] А. В. Иванов, “Свойство Катетова для полунормальных функторов конечной степени”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:4 (2010), 778–784.
- [7] А. П. Комбаров, “О нормальных функторах степени ≥ 3 ”, *Матем. заметки*, **76**:1 (2004), 147–149.
- [8] Е. В. Кашуба, “Обобщенная теорема Катетова для полунормальных функторов”, *Труды ПГУ. Математика*, 2006, № 13, 82–89.
- [9] A. V. Arhangel'skii, A. P. Kombarov, “On ∇ -normal spaces”, *Topol. Appl.*, **35**:2-3 (1990), 121–126.
- [10] В. В. Федорчук, “Вполне замкнутые отображения и их приложения”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **9**:4 (2003), 105–235.
- [11] А. В. Иванов, “О наследственной сепарабельности и размерности произведений бикомпактов”, *Докл. АН СССР*, **239**:5 (1978), 1037–1040.
- [12] В. В. Федорчук, “О мощности наследственно сепарабельных бикомпактов”, *Докл. АН СССР*, **222**:2 (1975), 302–305.
- [13] С. Ю. Жолков, А. С. Салычев, “Стрелки и наследственное число Суслина в квадратах топологических пространств”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1976, № 1, 27–32.

А. В. Иванов

Петрозаводский государственный университет

E-mail: ivanov@petrsu.ru

Поступило

27.03.2013

Исправленный вариант

09.08.2013