Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Кокарев, Аффинные цилиндры, *Матем. заметки*,
2014, том 96, выпуск 5, 697–700

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 04:40:05

Аффинные цилиндры

В. Н. Кокарев

Аффинный цилиндр определяется как поверхность, у которой все аффинные нормали параллельны одной плоскости. Доказано, что полный строго выпуклый аффинный цилиндр является поверхностью переноса с линией переноса – параболой.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10238

Как известно, сфера может быть охарактеризована как поверхность, у которой все нормали проходят через одну точку, а поверхность вращения, как поверхность, у которой все нормали пересекают одну прямую.

В аффинной дифференциальной геометрии *аффинной сферой* называют поверхность, у которой все аффинные нормали проходят через одну точку, а *аффинной поверхностью вращения* называют поверхность, у которой все аффинные нормали пересекают одну прямую.

Очень легко доказывается теорема о том, что поверхность, у которой все нормали параллельны одной плоскости, является цилиндром. Поэтому естественным является следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Аффинным цилиндром* называется поверхность, у которой все аффинные нормали параллельны одной плоскости.

Выведем уравнение аффинного цилиндра в аффинном пространстве A^{n+1} . Пусть $x^1, \dots, x^{n+1}$ – аффинные координаты, а поверхность задается в виде графика $x^{n+1} = z(x^1, \dots, x^n)$. Обозначим

$$z_i = \frac{\partial z}{\partial x^i}, \quad z_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^i \partial x^j}, \quad z_{ijk} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k},$$

$a = \det(z_{ij})$, матрица $(z^{ij}) = (z_{ij})^{-1}$. Тогда, см. [1; гл. 5, § 22, формула (12)], для направляющего вектора аффинной нормали N получаем

$$N = \frac{1}{2} a^{-1/n+2} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(a^{2/n+2} z^{ij} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} \right), \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00137 а).

где $\mathbf{r} = (x^1, \dots, x^n, z)$ – параметризация поверхности, а по повторяющимся нижним и верхним индексам всегда производится суммирование.

Пусть все аффинные нормали параллельны плоскости $x^1 = 0$. Тогда из (1) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (a^{2/n+2} z^{i1}) = 0.$$

Отсюда, с учетом $\partial a / \partial x^k = a z_{pqk} z^{pq}$ и $\partial z^{ij} / \partial x^k = -z_{pqk} z^{ip} z^{qj}$, получаем

$$\frac{\partial a}{\partial x^i} z^{i1} = 0. \quad (2)$$

Так как алгебраические дополнения для элементов первой строки в матрице гесса (z_{ij}) равны $az^{11}, az^{12}, \dots, az^{1n}$, равенство (2) эквивалентно

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial a}{\partial x^n} \\ z_{21} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Значит величины $a, z_2, \dots, z_n$ функционально зависимы. Получаем уравнение аффинного цилиндра с аффинными нормальными, параллельными плоскости $x^1 = 0$,

$$\det(z_{ij}) = \varphi(z_2, \dots, z_n). \quad (4)$$

Примеры аффинных цилиндров в A^3 :

- 1) $z = x^{12} + \text{ch } x^2$, $\det(z_{ij}) = 2\sqrt{1 + z_2^2}$,
- 2) $z = x^{12} \text{sh } x^2 / \text{ch } x^2$, $\det(z_{ij}) = -4z_2$.

Конечно, аффинные цилиндры не похожи на знакомые нам цилиндры из аналитической геометрии. Но и аффинные сферы не похожи на сферу.

В многомерном случае в $\mathbb{R}^{n+1}$ имеются цилиндры с k -мерными образующими. Их нормали параллельны $(n + 1 - k)$ -плоскостям.

Определим *аффинный k -цилиндр* в A^{n+1} , как поверхность, у которой все аффинные нормали параллельны $(n + 1 - k)$ -плоскости. Выберем аффинную систему координат так, чтобы эта плоскость задавалась системой уравнений $x^m = 0, m = 1, \dots, k$. Тогда уравнение аффинного k -цилиндра $x^{n+1} = z(x^1, \dots, x^n)$ будет иметь вид

$$\det(z_{ij}) = \varphi(z_{k+1}, \dots, z_n).$$

В частности, при $k = n$ получаем

$$\det(z_{ij}) = \text{const}.$$

Это уравнение несобственной аффинной сферы. История исследования выпуклых несобственных аффинных сфер хорошо известна (см. [2], [3]).

Далее будет доказана

ТЕОРЕМА 1. *Полный строго выпуклый аффинный цилиндр в трехмерном аффинном пространстве A^3 является поверхностью переноса с линией переноса – параболой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При смещении на поверхности по кривой, заданной внутренним уравнением $x^1 = c$ ($c = \text{const}$), аффинные нормали остаются в плоскости $x^1 = c$; значит образуют развертывающуюся поверхность. Поэтому кривые $x^1 = c$ являются аффинными линиями кривизны на поверхности. По аффинной теореме Родрига $\mathbf{N}_2 = k^{(2)}\mathbf{r}_2$, где $k^{(2)}$ соответствующая главная аффинная кривизна, а индекс внизу означает дифференцирование. На другом семействе аффинных линий кривизны введем параметр l . Тогда $\mathbf{N}_l = k^{(1)}\mathbf{r}_l$, где $k^{(1)}$ также главная аффинная кривизна. Вектор $\mathbf{N}_l$ параллелен плоскости $x^1 = 0$, а $\mathbf{r}_l$ не параллелен. Следовательно, $k^{(1)} = 0$. Тогда

$$\mathbf{N}_l = 0, \quad \mathbf{N}_{l2} = \mathbf{N}_{2l} = k_l^{(2)}\mathbf{r}_2 + k^{(2)}\mathbf{r}_{2l} = 0.$$

Случай $k^{(2)} = 0$ не будем рассматривать, так как при $k^{(1)} = k^{(2)} = 0$ получается аффинная сфера – эллиптический параболоид. Значит, $\mathbf{r}_2 \parallel \mathbf{r}_{2l}$, где $\mathbf{r}_2 = (0, 1, z_2)$, $\mathbf{r}_{2l} = (0, 0, z_{2l})$. Следовательно, $\mathbf{r}_{2l} = 0$, поэтому z_2 не зависит от l ; значит, второе семейство аффинных линий кривизны это линии $z_2 = \text{const}$. В координатах x^1, x^2 направление этих линий $(-z_{22} : z_{21})$. Поэтому $\mathbf{r}_l = \lambda(\mathbf{r}_1 z_{22} - \mathbf{r}_2 z_{12})$. Вычислив отсюда $\mathbf{r}_{2l}$ и использовав $\mathbf{r}_{2l} = 0$, получим

$$\lambda_2 z_{22} + \lambda z_{222} = 0, \quad \lambda_2 z_{12} + \lambda z_{122} = 0.$$

Отсюда

$$z_{122} z_{22} - z_{222} z_{12} = 0.$$

Так как в силу строгой выпуклости $z_{22} > 0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{z_{12}}{z_{22}} \right) = 0.$$

Следовательно, $z_{12}/z_{22} = \nu(x^1)$. Отсюда, вспоминая, что $(-z_{22} : z_{21})$ это направление кривой $z_2 = \text{const}$, получаем, что все кривые $z_2 = \text{const}$ на плоскости $x^3 = 0$ получаются друг из друга параллельными сдвигами в направлении x^2 . Так как $z_{22} > 0$, эти кривые можно задать уравнениями $x^2 = \psi(x^1) + \text{const}$. Итак, в силу строгой выпуклости поверхности семейство линий $x^1 = \text{const}$, $z_2 = \text{const}$ образует правильную координатную сеть. Обозначив координату вдоль линии $x^1 = \text{const}$ через $\tilde{x}^2$, получим, что для любого значения x^1 величина

$$\int_a^b z_2 d\tilde{x}^2 = \int_a^b \frac{dz}{d\tilde{x}^2} d\tilde{x}^2 = z(x^1, b) - z(x^1, a)$$

не зависит от x^1 . Значит, наша поверхность является поверхностью переноса линии $\mathbf{h} = (x^1, \psi(x^1), f(x^1))$ вдоль линии $\mathbf{g} = (0, x^2, \varphi(x^2))$.

Вычислив аффинную нормаль для поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{h}$ [1], из условия ее параллельности плоскости $x^1 = 0$ получим

$$\left(\sqrt{\frac{\varphi''}{f'' - \varphi' \psi''}} \right)_1 = 0.$$

Значит $f'' - \varphi' \psi''$ не зависит от x^1 . Если $\varphi' = \text{const}$, то $\varphi(x^2)$ – линейная функция, линия $\mathbf{g}$ – прямая, а поверхность $\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{h}$ – развертывающаяся. Но для развертывающейся поверхности нельзя определить аффинную нормаль. Значит, $\varphi'(x^2)$ – непостоянная функция.

Следовательно, ψ'' , f'' равны либо нулю, либо ненулевым константам. При $\psi'' = f'' = 0$ линия $\mathbf{h}$ будет прямой, а поверхность $\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{h}$ развертывающейся. В остальных случаях

$$\psi'' = 0, \quad f'' = c_1 \neq 0, \quad \psi'' = c_2 \neq 0, \quad f'' = 0, \quad \psi'' = c_2 \neq 0, \quad f'' = c_1 \neq 0$$

линия $\mathbf{h}$ является параболой. После подходящего аффинного преобразования аффинной системы координат уравнение нашей поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{h}$ примет вид (оставим за координатами прежние обозначения)

$$\mathbf{r} = \left(x^1, x^2, \frac{cx^{1^2}}{2} + \varphi(x^2) \right).$$

Теорема доказана.

Аналогичная теорема верна и в многомерном случае.

ТЕОРЕМА 2. *Полный строго выпуклый аффинный k -цилиндр в A^{n+1} является поверхностью переноса с переносимой поверхностью k -мерным эллиптическим параболоидом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема доказывается так же, как и теорема 1. Рассматривается поверхность

$$\begin{cases} \det(z_{ij}) = \varphi(z_{k+1}, \dots, z_n), \\ z_{k+1} = c_{k+1}, \\ \dots\dots\dots \\ z_n = c_n. \end{cases}$$

Доказывается, что это переносимая поверхность, задающаяся в некоторой аффинной системе координат уравнением

$$\det(z_{ij}) = \text{const} > 0, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

В силу полноты это k -мерный эллиптический параболоид [2], [3]. Тогда аффинный k -цилиндр в подходящей аффинной системе координат задается уравнением

$$z = \sum_{i=1}^k x^{i^2} + \psi(x^{k+1}, \dots, x^n).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. А. Широков, А. П. Широков, *Аффинная дифференциальная геометрия*, Физматгиз, М., 1959.
- [2] E. Calabi, "Complete affine hyperspheres. I", *Sympos. Math.*, **10** (1972), 19–38.
- [3] S. T. Cheng, S. T. Yau, "Complete affine hypersurfaces. Part I. The completeness of affine metrics", *Comm. Pure Appl. Math.*, **39**:6 (1986), 839–866.
- [4] А. В. Погорелов, *Многомерное уравнение Монжа–Ампера $\det \|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$* , Наука, М., 1988.

В. Н. Кокарев

Самарский государственный университет

E-mail: ko1949@yandex.ru

Поступило

29.12.2012

Исправленный вариант

28.05.2013