Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ш. Шабозов, О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10239>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:51:11

О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых

М. Ш. Шабозов

В работе рассматривается задача о приближенном вычислении криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и классов пространственных кривых.

Пусть функция $f(M) := f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ и

$$J(f; \Gamma) := \int_{\Gamma} f(M) dt = \int_{\Gamma} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dt. \quad (1)$$

Предположим, что на кривой Γ установлено положительное направление, так что положение точки $M = M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ на кривой может быть определено длиной дуги $t = \widehat{AM}$, отсчитываемой от начальной точки A . Тогда кривая Γ параметрически выразится уравнениями

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_m = \varphi_m(t), \quad 0 \leq t \leq L, \quad (2)$$

а функция $f(M)$ сведется к сложной функции $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))$ от переменной t . В этом случае интеграл (1) запишется в виде

$$J(f; \Gamma) = \int_0^L f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)) dt. \quad (3)$$

Всякая квадратурная формула

$$J(f; \Gamma) \approx \mathcal{L}_N(f; \Gamma; P, T) := \sum_{k=1}^N p_k f(\varphi_1(t_k), \varphi_2(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)) \quad (4)$$

для приближенного вычисления интеграла (3) задается векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и узлов $T = \{t_k : 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq L\}$, где $p_1, p_2, \dots, p_N$ – произвольные действительные числа.

Погрешность квадратурной формулы (4) обозначим

$$|R_N(f; \Gamma; P, T)| = |J(f; \Gamma) - \mathcal{L}_N(f; \Gamma; P, T)|.$$

Если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций $\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))\}$, определенных в точках кривой Γ и интегрируемых на отрезке $[0, L]$, то положим

$$R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; P, T) = \sup\{|R_N(f; \Gamma; P, T)| : f \in \mathfrak{M}\}. \quad (5)$$

Пусть $\mathfrak{N}(L)$ – класс кривых Γ , заданных уравнениями (2), длина которых равна L . Наибольшую погрешность квадратурной формулы (4) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$ обозначим

$$R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}(L); P, T) = \sup\{R_N(\mathfrak{M}; \Gamma; P, T) : \Gamma \subset \mathfrak{N}(L)\}. \quad (6)$$

Величину

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(L)) = \inf\{R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}(L), P, T) : (P, T)\} \quad (7)$$

будем называть *оптимальной оценкой погрешности* формулы (4) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$. Если существует вектор (P^0, T^0) , для которого

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}(L)) = R_N(\mathfrak{M}; \mathfrak{N}(L), P^0, T^0), \quad (8)$$

то этот вектор определяет наилучшую квадратурную формулу вида (4) в смысле Никольского [1] на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$.

Обозначим через $H^\omega := H^\omega[0, L]$ множество функций $\varphi(t) \in C[0, L]$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq \omega(|t' - t''|), \quad t', t'' \in [0, L],$$

где $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности, т.е. неубывающая полуаддитивная функция, в нуле равная нулю. Через $\overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$ обозначим класс гладких кривых $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$, заданных уравнениями (2), у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$, $i = 1, \dots, m$. Если

$$M' = M(x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \in \mathbb{R}^m, \quad M'' = M(x''_1, x''_2, \dots, x''_m) \in \mathbb{R}^m,$$

то введем в рассмотрение расстояния

$$\begin{aligned} \text{a) } \rho_1(M', M'') &= \sum_{i=1}^m |x'_i - x''_i|; \\ \text{b) } \rho_2(M', M'') &= \left\{ \sum_{i=1}^m (x'_i - x''_i)^2 \right\}^{1/2}; \\ \text{c) } \rho_3(M', M'') &= \max_{1 \leq i \leq m} |x'_i - x''_i|. \end{aligned}$$

Через $\mathfrak{M}_\rho$ обозначим класс функций $f(M)$, определенных на кривых $\Gamma \subset \overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ и для любых двух точек $M', M'' \in \Gamma$ удовлетворяющих условию

$$|f(M') - f(M'')| \leq \rho(M', M''),$$

где $\rho(M', M'')$ есть одно из перечисленных выше расстояний а)–с).

Таким образом, будем писать $f(M) \in \mathfrak{M}_{\rho_1}$, если для любых двух точек $M', M'' \in \Gamma \subset \overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ и любых $t', t'' \in [0, L]$ выполняется неравенство

$$|f(M') - f(M'')| \leq \sum_{i=1}^m |x'_i - x''_i| = \sum_{i=1}^m |\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')| \leq \sum_{i=1}^m \omega_i(|t' - t''|), \quad (9)$$

а если $f(M) \in \mathfrak{M}_{\rho_2}$, то

$$|f(M') - f(M'')| \leq \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^2(|t' - t''|) \right\}^{1/2}.$$

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Среди всех квадратурных формул вида (4) с произвольными векторами коэффициентов и узлов (P, T) ,

$$P = \{p_k\}_{k=1}^N, \quad T = \{t_k\}_{k=1}^N: \quad 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq L,$$

наилучшей для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$, $i = 1, 2, 3$, и кривых $\overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$ является формула средних прямоугольников

$$\int_0^L f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt \approx \frac{L}{N} \sum_{k=1}^N f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \dots, \varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right).$$

При этом для погрешности наилучшей формулы на классах функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$, $i = 1, 2, 3$, и кривых $\overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ справедливы точные оценки

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}) = (2N) \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i(t) dt, \quad (10)$$

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_2}; \overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}) = (2N) \int_0^{L/(2N)} \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i^2(t) \right\}^{1/2} dt, \quad (11)$$

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_3}; \overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}) = (2N) \int_0^{L/(2N)} \max_{1 \leq i \leq m} \omega_i(t) dt. \quad (12)$$

Доказательство. Не умаляя общности, докажем утверждение теоремы для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_1}$ и кривых $\overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}$. Оценку снизу получим хорошо известным методом Корнейчука [2]. Через $\mathfrak{M}_{\rho_1, T}$ обозначим множество функций $f(M) \in \mathfrak{M}_{\rho_1}$, определенных вдоль кривой $\Gamma \subset \overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}$, которые в узлах вектора $T = \{t_k\}_{k=1}^N$ обращаются в нуль

$$f(\varphi_1(t_k), \dots, \varphi_m(t_k)) = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

Фиксируем произвольный вектор узлов $T = \{t_k\}_{k=1}^N$ и определим кривую Γ_0 параметрическими уравнениями

$$x_i = \varphi_i(t) := \min_k \omega_i(|t - t_k|), \quad i = 1, \dots, m, \quad 0 \leq t \leq L.$$

Легко проверить, что функции $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$, а значит, Γ_0 принадлежит $\overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}$. На кривой Γ_0 зададим функцию

$$f_T(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) = \min_{t_k} \sum_{i=1}^m \omega_i(|t - t_k|) = \sum_{i=1}^m \omega_i \left(\min_k |t - t_k| \right),$$

которая принадлежит классу $\mathfrak{M}_{\rho_1, T}$. В силу включения $\mathfrak{M}_{\rho_1, T} \subset \mathfrak{M}_{\rho_1}$ с учетом леммы 2 из [2] получаем оценку снизу погрешности формулы (4):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}) &\geq \mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_1, T}; \overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}) \\ &= \inf_{(P, T)} \sup_{\Gamma \subset \overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}} \sup_{f \in \mathfrak{M}_{\rho_1, T}} \left| \int_0^L f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt \right| \\ &= \inf_{(P, T)} \int_0^L f_T(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) dt = \inf_{(P, T)} \sum_{i=1}^m \int_0^L \omega_i \left(\min_k |t - t_k| \right) dt \\ &\geq 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i(t) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

С целью получения оценки сверху, равной правой части (13), зададим квадратурную формулу (4) векторами коэффициентов и узлов соответственно

$$P^0 = \{p_k^0 = L/N\}_{k=1}^N, \quad T_0 = \left\{ t_k^0 = \frac{(2k-1)L}{2N} \right\}.$$

Тогда для произвольной $f(M) \in \mathfrak{M}_{\rho_1}$ и любой кривой $\Gamma \subset \overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ будем иметь

$$\begin{aligned} &|R_N(f; \Gamma; P^0, T^0)| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \left| f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)) - f \left(\varphi_1 \left(\frac{2k-1}{2N} L \right), \dots, \varphi_m \left(\frac{2k-1}{2N} L \right) \right) \right| dt \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \omega_i \left(\left| t - \frac{2k-1}{2N} L \right| \right) dt = 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i(t) dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Требуемое равенство (10) следует из сопоставления неравенств (13) и (14). По аналогичной схеме доказываются равенства (11) и (12). Теорема 1 доказана.

В случае, когда $\omega_i(t) \equiv \omega(t)$, $i = 1, \dots, m$, $0 \leq t \leq L$, класс кривых $\overline{H}^{\omega_1, \dots, \omega_m}([0, L])$ обозначим $\overline{H}_m^\omega[0, L]$. Из теоремы 1 как следствие получаем

ТЕОРЕМА 2. Среди всех квадратурных формул вида (4) с произвольными векторами коэффициентов и узлов (P, T) наилучшей для классов функций $\mathfrak{M}_{\rho_i}$, $i = 1, 2, 3$, и кривых $\overline{H}_m^\omega[0, L]$ является формула средних прямоугольников. При этом для погрешности формулы на указанных классах функций и кривых справедливы точные оценки

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_1}; \overline{H}_m^\omega[0, L]) &= 2mN \int_0^{L/(2N)} \omega(t) dt, \\ \mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_2}; \overline{H}_m^\omega[0, L]) &= 2\sqrt{m}N \int_0^{L/(2N)} \omega(t) dt, \\ \mathcal{E}_N(\mathfrak{M}_{\rho_3}; \overline{H}_m^\omega[0, L]) &= 2N \int_0^{L/(2N)} \omega(t) dt.\end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С. М. Никольский, *Квадратурные формулы*, Наука, М., 1979. [2] Н. П. Корнейчук, *Матем. заметки*, **3**:5 (1968), 565–576.

М. Ш. Шабозов

Институт математики АН Республики Таджикистан

E-mail: shabozov@mail.ru

Поступило

28.12.2012

Исправленный вариант

17.02.2014