Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Бурский, О нарушении единственности решения задачи Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка в круге, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 23–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1024>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 09:21:54

УДК 517.347

О НАРУШЕНИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КРУГЕ

В. П. Бурский

Изучается задача Дирихле для системы эллиптических уравнений с матричными комплекснозначными коэффициентами

$$au''_{x_1x_1} + bu''_{x_1x_2} + cu''_{x_2x_2} = 0, \quad x \in K, \quad u|_{\partial K} = 0.$$

В работе исследуется случай, когда эта однородная система уравнений может иметь счетное число линейно независимых решений.

Библиография: 5 названий.

В работе [1] А. В. Бицадзе привел пример эллиптической системы дифференциальных уравнений, для которой однородная задача Дирихле в круге имеет бесконечный набор линейно независимых полиномиальных решений. Затем им же был найден другой такой пример системы с тем же свойством и введено понятие слабо связанной системы, для которой пространство решений однородной задачи Дирихле в произвольной области с ляпуновской границей конечномерно (см. [2]). Однако условие слабой связанности трудно проверить даже в случае круга для скалярного уравнения. Оба упомянутых примера систем могут быть записаны в виде одного скалярного уравнения уже с комплексными коэффициентами. Однородная задача Дирихле в круге для таких уравнений изучена в работе [3]. А именно, рассматривалась задача

$$au''_{x_1x_1} + bu''_{x_1x_2} + cu''_{x_2x_2} = 0, \quad x \in K, \tag{1}$$

$$u|_{\partial K} = 0, \tag{2}$$

где a, b, c – постоянные комплексные скалярные коэффициенты, $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ – единичный круг. Были выделены уравнения, для которых задача (1), (2) имеет нетривиальные решения в $H^2(K)$. Ими оказались уравнения, для которых угол $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$ между комплексными характеристиками, где $\operatorname{tg} \varphi_j = -\lambda_j$, $a + b\lambda + c\lambda^2 = 0$, является π -рациональным. Кроме того, тем же свойством обладают система $d^2u/d\bar{z}^2 = 0$ (первый пример Бицадзе) и ей сопряженная $d^2u/dz^2 = 0$. Во всех этих случаях задача (1), (2) имеет счетный набор линейно независимых полиномиальных решений.

В частности, это так для вещественной эллиптической по Петровскому системы

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \tag{3}$$

частный вид которой при $\mu = \sqrt{2}$ составляет второй пример Бицадзе, угол $\varphi_0 = \pi/2$ и потому задача (2) имеет счетное число решений. Первый пример Бицадзе тоже можно записать в виде (3) с $\mu = -2$. Там же в [3] было доказано, что в остальных случаях задача (1), (2) имеет только тривиальное решение.

В настоящей работе изучается задача (1), (2) с комплексными матричными коэффициентами. Мы предполагаем, что a, b, c – квадратные $(n \times n)$ -матрицы, $u \in H^{2,n}(K)$, где $H^{2,n} = W_2^{2,n}$ – соболевское пространство вектор-функций.

Пусть $u \in H^{2,n}(K)$ – нетривиальное решение задачи (1), (2), и пусть $\tilde{u} \in H^{2,n}(\mathbb{R}^2)$ – любое продолжение функции u на плоскость. Обозначим через θ характеристическую функцию круга K , т.е.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus K. \end{cases}$$

Применим оператор

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

к функции $v = \tilde{u}\theta$, получим равенство

$$av_{x_1x_1} + bv_{x_1x_2} + cv_{x_2x_2} = -(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2)u'_\nu \delta_{\partial K}, \quad (4)$$

где $\nu = (x_1, x_2)$ – нормаль, $\delta_{\partial K}$ – мера, сосредоточенная на ∂K : $\langle \delta_{\partial K}, \varphi \rangle = \int_{\partial K} \overline{\varphi} d\tau$. Применяя преобразование Фурье к равенству (4), получим

$$L(\xi)\widehat{v}(\xi) = - \int_{\partial K} L(x)\tilde{u}'_\nu e^{-i\xi \cdot x} d\tau_x, \quad (5)$$

где $L(\xi) = a\xi_1^2 + b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2$ – матричный символ, $\xi \cdot x = \xi_1x_1 + \xi_2x_2$. Умножим равенство (5) на присоединенную к $L(\xi)$ матрицу $\tilde{L}(\xi)$, состоящую из алгебраических дополнений к элементам матрицы $L(\xi)$ и транспонированную. Тогда будут выполнены соотношения

$$\tilde{L}(\xi)L(\xi) = L(\xi)\tilde{L}(\xi) = \sigma(\xi)I, \quad \sigma(\xi) = \det L(\xi), \quad I = \text{id}_{\mathbb{C}^n}. \quad (6)$$

Из равенства (5) получим

$$\sigma(\xi)\widehat{v}(\xi) = \tilde{L}(\xi) \int_{\partial K} L(x)\tilde{u}'_\nu e^{-i\xi \cdot x} d\tau_x = 0.$$

Поскольку правая часть равенства (5) и функция $\widehat{v}$ целые, для каждого $\xi \in \Lambda = \{\xi \in \mathbb{C}^2 \mid \sigma(\xi) = 0\}$ выполнено равенство

$$\tilde{L}(\xi) \int_{\partial K} L(x)\tilde{u}'_\nu e^{-i\xi \cdot x} d\tau_x = 0.$$

Обозначим $L(x)\tilde{u}'_\nu|_{\partial K} = C(\tau)$.

Будем предполагать, что

- 1) квадратичный пучок $L(1, \lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2$ регулярен, т.е. $\sigma(1, \lambda) \not\equiv 0$ (см. [4]);
- 2) корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ уравнения $\sigma(1, \lambda) = 0$ различны;
- 3) из $2n$ собственных векторов найдутся n собственных векторов $e^1, e^2, \dots, e^n$ пучка $L(1, \lambda)$, удовлетворяющих равенству $L(1, \lambda_j)e^j = 0$, различных и линейно независимых;
- 4) ядро оператора $L(1, \lambda_j)$ одномерно для всех j ;
- 5) все корни $\lambda_j \neq \pm i$.

Тогда $|\xi|_0 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \neq 0$, если $\xi \in \Lambda$. Для каждого $\xi \in \Lambda$ выберем какой-нибудь знак у корня и положим $\xi = |\xi|_0 \eta$. Раскладывая экспоненту по степеням $|\xi|_0$, получим условие

$$\tilde{L}(\eta) \int_{\partial K} Q(k_\eta) C(\tau) d\tau = 0 \quad \text{для всех } Q \in \mathbb{C}[z], \quad \eta \in \mathbb{P}\Lambda, \quad (7)$$

$k_\eta = x(\tau) \cdot \eta$. Проективное многообразие $\mathbb{P}\Lambda$ состоит из $2n$ векторов $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^{2n} \in \mathbb{C}^2$, для которых

$$(a(\eta_1^j)^2 + b\eta_1^j \eta_2^j + c(\eta_2^j)^2) e^j = 0,$$

$$\eta_2^j \neq \eta_1^j \neq \lambda_j, \quad \eta_1^j = \cos \varphi_j, \quad \eta_2^j = -\sin \varphi_j, \quad \operatorname{tg} \varphi_j = -\lambda_j, \quad k_{\eta^j} = \cos(\tau + \varphi_j).$$

Из наших предположений и теории λ -матриц (см. [4] или [5]) следует, что ядро и коядро оператора $L(\eta^j): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ одномерны. В силу равенств (6) ядро и коядро оператора $\tilde{L}(\eta^j)$ $(n-1)$ -мерны и $\ker \tilde{L}(\eta^j) = \operatorname{im} L(\eta^j)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Для каждого j существует единственный с точностью до множителя вектор $\tilde{e}^j$ такой, что равенство $\tilde{L}(\eta^j)z = 0$ равносильно равенству $\langle z, \tilde{e}^j \rangle = 0$.*

Заметим, что векторы $\tilde{e}^j$ удовлетворяют равенству $(L(\eta^j))^* e^j = 0$, из которого следуют соотношения $\tilde{e}^j = (e^j)^*$, поэтому $z \cdot e^j = 0$. Теперь равенство (7) можно записать в виде

$$\int_{\partial K} Q(k_{\eta^j}) \langle C(\tau), \tilde{e}^j \rangle d\tau = 0 \quad \text{для всех } Q \in \mathbb{C}[z], \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Пусть $Q = T_m$ – полином Чебышева: $T_m(\cos \alpha) = \cos m\alpha$,

$$C(\tau) = \frac{1}{2} C_0^t + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m^t \cos m\tau + C_m^u \sin m\tau);$$

получим

$$C_0^t = 0, \quad C_m^t \cdot e^j \cos m\varphi_j - C_m^u \cdot e^j \sin m\varphi_j = 0. \quad (8)$$

Система линейных уравнений (8) имеет нетривиальное решение (C_m^t, C_m^u) тогда и только тогда, когда равен 0 определитель

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} e_1^1 \cos m\varphi_1 & e_2^1 \cos m\varphi_1 & \dots & e_n^1 \cos m\varphi_1 & -e_1^1 \sin m\varphi_1 & \dots & -e_n^1 \sin m\varphi_1 \\ e_1^2 \cos m\varphi_2 & e_2^2 \cos m\varphi_2 & \dots & e_n^2 \cos m\varphi_2 & -e_1^2 \sin m\varphi_2 & \dots & -e_n^2 \sin m\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_1^{2n} \cos m\varphi_{2n} & e_2^{2n} \cos m\varphi_{2n} & \dots & e_n^{2n} \cos m\varphi_{2n} & -e_1^{2n} \sin m\varphi_{2n} & \dots & -e_n^{2n} \sin m\varphi_{2n} \end{vmatrix}.$$

Обратно, пусть $\Delta_m = 0$. Тогда ограничение решения

$$u_m(x) = \sum_{j=1}^{2n} U_m^j T_m(\eta^j \cdot x) e^j$$

уравнения $Lu_m = 0$ на границу ∂K

$$u_m(\tau) = \sum_{j=1}^{2n} (\cos m\varphi_j \cos m\tau - \sin m\varphi_j \sin m\tau) u_m^j e^j$$

обратится в 0, если выбрать вектор-строку $U_m \in \mathbb{C}^{2n}$, $U_m \neq 0$, из ядра оператора матрицы, задающей определитель Δ_m : $U_m \|\Delta_m\| = 0$. Доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. В предположениях 1)–5) для того чтобы задача Дирихле (1), (2) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы последовательность чисел Δ_m , $m \geq 2$, содержала хотя бы один 0. В этом случае имеется векторно-полиномиальное решение степени m .

ПРИМЕР 1. Рассмотрим систему (3) с комплексным $\mu \neq 2$. В этом примере

$$L(1, \lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2 & \mu\lambda \\ -\mu\lambda & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma(1, \lambda) \equiv (\lambda^2 - 1)^2 + \mu^2\lambda^2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{i}{2}(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}), \quad 1 - \lambda_{1,2}^2 = i\mu\lambda_{1,2}, \quad \lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2, \quad e^j = \begin{pmatrix} -\mu\lambda_j \\ 1 - \lambda_j^2 \end{pmatrix}.$$

Корень λ для определенности будем брать из верхней полуплоскости. Здесь определитель

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \begin{vmatrix} -\mu\lambda_1 \cos m\varphi_1 & (1 - \lambda_1^2) \cos m\varphi_1 & \mu\lambda_1 \sin m\varphi_1 & -(1 - \lambda_1^2) \sin m\varphi_1 \\ -\mu\lambda_2 \cos m\varphi_2 & (1 - \lambda_2^2) \cos m\varphi_2 & \mu\lambda_2 \sin m\varphi_2 & -(1 - \lambda_2^2) \sin m\varphi_2 \\ \mu\lambda_1 \cos m\varphi_1 & (1 - \lambda_1^2) \cos m\varphi_1 & \mu\lambda_1 \sin m\varphi_1 & (1 - \lambda_1^2) \sin m\varphi_1 \\ \mu\lambda_2 \cos m\varphi_2 & (1 - \lambda_2^2) \cos m\varphi_2 & \mu\lambda_2 \sin m\varphi_2 & (1 - \lambda_2^2) \sin m\varphi_2 \end{vmatrix} \\ &= 4\mu^4 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \sin^2 m(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \infty, \end{aligned}$$

для всех $m = 2k$, и из теоремы 1 следует, что задача Дирихле (2) для системы (3) с комплексным μ , как и в вещественном случае, имеет счетный набор нетривиальных векторно-полиномиальных решений.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим (2×2) -систему

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} u''_{x_1 x_1} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -\bar{b} & 0 \end{pmatrix} u''_{x_1 x_2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u''_{x_2 x_2} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

которую можно рассматривать с одной стороны как обобщение системы (3) с вещественным μ , а с другой стороны как уравнение (1) с кватернионными коэффициентами в силу представления кватернионов комплексными матрицами. В этом примере

$$\begin{aligned} L(1, \lambda) &= \begin{pmatrix} a + \lambda^2 & b\lambda \\ -\bar{b}\lambda & \bar{a} + \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma(1, \lambda) = \lambda^4 + (a + \bar{a} + |b|^2)\lambda + |a|^2, \\ 2\lambda_{1,2} &= -(a + \bar{a} + |b|^2) \pm \sqrt{(a + \bar{a} + |b|^2)^2 - 4|a|^2}, \quad \lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2, \\ e^j &= \begin{pmatrix} -b\lambda_j \\ a + \lambda_j^2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_m = 4 \begin{vmatrix} e_1^1 \cos m\varphi_1 & -e_2^1 \sin m\varphi_1 \\ e_1^2 \cos m\varphi_2 & -e_2^2 \sin m\varphi_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_2^1 \cos m\varphi_1 & -e_1^1 \sin m\varphi_1 \\ e_2^2 \cos m\varphi_2 & -e_1^2 \sin m\varphi_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Пусть множество $\Phi_m = \Phi_m^+ \cup \Phi_m^-$ непусто, где

$$\Phi_m^\pm = \left\{ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \mid \operatorname{tg} m\varphi_1 \operatorname{ctg} m\varphi_2 = \left(\frac{e_1^1 e_2^2}{e_2^1 e_1^2} \right)^{\pm 1} \equiv \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_1 (a + \operatorname{tg}^2 \varphi_2)}{\operatorname{tg} \varphi_2 (a + \operatorname{tg}^2 \varphi_1)} \right)^{\pm 1} \right\}.$$

Здесь определитель $\Delta_m = 0$ для всех $\varphi \in \Phi_m$, откуда следует существование нетривиального векторно-полиномиального решения задачи (9), (2).

Большой набор систем с нарушенной единственностью задачи Дирихле дает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть среди углов φ_k , $k = 1, \dots, 2n$, найдутся $n + 1$ углов φ_j , например, $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$ такие, что все разности $\varphi_j - \varphi_1$ (а значит, и все разности $\varphi_j - \varphi_i$, $i, j = 1, \dots, n + 1$) вещественны и π -рациональны. Тогда задача (1), (2) имеет счетный набор нетривиальных векторно-полиномиальных решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию числа $(\varphi_j - \varphi_1)/(2\pi)$ рациональны. Найдем наименьшее общее кратное q их знаменателей и положим $m = q$. Тогда $m\varphi_j = m\varphi_1 + 2\pi p_j$ с целым p_j , поэтому $\cos m\varphi_j = \cos m\varphi_1$, $\sin m\varphi_j = \sin m\varphi_1$. Вспомним теперь, что векторы $e^1, e^2, \dots, e^{n+1}$ линейно зависимы в n -мерном пространстве $\mathbb{C}^n$, поэтому $\Delta_m = 0$. Заметим, что в качестве m можно взять любое кратное kq с натуральным k . Из теоремы 1 теперь следует наше утверждение.

Заметим, что из теорем 1 и 2 следует цитированный выше результат о задаче (1), (2) со скалярными коэффициентами при $\lambda_{1,2} \neq \pm i$, поскольку в этом случае

$$\Delta_m = C \sin m(\varphi_2 - \varphi_1),$$

а равенство $\Delta_m = 0$ означает π -рациональность угла $\varphi_2 - \varphi_1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бицадзе А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // УМН. 1948. Т. 3. №6. С. 211–212.
- [2] Бицадзе А. В. Некоторые классы дифференциальных уравнений с частными производными. М.: Наука, 1981.
- [3] Бурский В. П. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Матем. заметки. 1990. Т. 48. №3. С. 32–36.
- [4] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
- [5] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
г. Донецк
E-mail: burskii@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило
26.01.95
Исправленный вариант
08.09.98