Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Тимошенко, Об одном представлении группы автоморфизмов частично коммутативной метабелевой группы, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 286–295

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 08:15:33

Об одном представлении группы автоморфизмов частично коммутативной метабелевой группы

Е. И. Тимошенко

Рассматриваются автоморфизмы частично коммутативной метабелевой группы S_Γ , заданной конечным простым графом Γ с r вершинами. На моноиде $\mathcal{P}$ матриц порядка r определяется конгруэнция $\approx$. Доказано, что группа автоморфизмов, действующих тождественно на фактор-группе по коммутанту $S_\Gamma/[S_\Gamma, S_\Gamma]$, изоморфна фактор-моноиду $\mathcal{P}/\approx$.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm10240

1. Введение. В дальнейшем $\Gamma = \langle X; E \rangle$ – простой граф, т.е. конечный неориентированный граф без кратных ребер и петель, для которого $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ – множество вершин, а E – множество ребер.

Свободная *частично коммутативная группа* F_Γ , определенная графом Γ , имеет представление

$$F_\Gamma = \langle x_1, \dots, x_r \mid x_i x_j = x_j x_i, \text{ если } (x_i, x_j) \in E \rangle. \quad (1)$$

С замечательными свойствами этой группы и ее связями с различными областями математики и информатики можно ознакомиться, например, по обзору [1]. Там же приведен список литературы, который в настоящее время можно значительно расширить. Группа F_Γ в процессе изучения получила еще несколько названий. Так, например, ее называют иногда *графовой группой*.

Порождающее множество группы автоморфизмов $\text{Aut}(F_\Gamma)$ графовой группы F_Γ получил Лоуренс [2]. Он обобщил результаты Серватиуса [3], который нашел порождающие группы $\text{Aut}(F_\Gamma)$ в некоторых частных случаях, например, когда Γ – дерево.

Следуя Лоуренсу, определим четыре множества, которые в совокупности порождают группу $\text{Aut}(F_\Gamma)$:

- множество *графовых автоморфизмов*, т.е. тех элементов из группы $\text{Aut}(F_\Gamma)$, которые индуцированы автоморфизмами $\pi: \Gamma \rightarrow \Gamma$ графа Γ ;
- множество *обращающих автоморфизмов* $\alpha \in \text{Aut}(F_\Gamma)$, которые отображают одну из вершин $x_i \in X$ в x_i^{-1} и фиксируют остальные вершины графа;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00084), и Министерства образования и науки Российской Федерации (государственное задание № 2014/138, проект 1052).

- рассмотрим любые две различные вершины x_i, x_j , удовлетворяющие следующему условию: если $x \in X$ и $(x_j, x) \in E$, то $(x_i, x) \in E$. Третье множество составляют *транскекции*, фиксирующие все вершины, кроме x_j , и отображающие x_j в $x_j x_i^{\pm 1}$ или $x_i^{\pm 1} x_j$;
- четвертое множество составляют *локально внутренние автоморфизмы*; они определены так: для $x_i \in X$ рассмотрим подграф Δ графа Γ , полученный удалением вершины x_i и всех вершин, смежных с x_i , а также всех ребер, инцидентных удаленным вершинам; пусть Λ – объединение каких-либо компонент связности графа Δ ; определим действие $\beta \in \text{Aut}(F_\Gamma)$, полагая $x_j \beta = x_i^{-1} x_j x_i$ при $x_j \in \Lambda$ и $x_j \beta = x_j$, если $x_j \notin \Lambda$.

Частично коммутативную метабелеву группу S_Γ , заданную графом Γ , можно определить представлением (1), добавив к нему тождество $[[x, y], [u, v]] = 1$. Другими словами, группа S_Γ является фактор-группой группы F_Γ по второму члену $F_\Gamma^{(2)}$ ее производного ряда. Поэтому каждый автоморфизм группы F_Γ индуцирует автоморфизм группы S_Γ .

Из результатов Ушакова [4] следует, что если определяющий граф Γ имеет не менее трех компонент связности, каждая из которых – полный граф, то группа $\text{Aut}(S_\Gamma)$ не порождается автоморфизмами, индуцированными автоморфизмами Лоуренса.

Мы покажем, что в том случае, когда Γ – связный граф или даже дерево, группа $\text{Aut}(S_\Gamma)$ может содержать автоморфизмы, не индуцированные автоморфизмами группы F_Γ .

Бахмут получил вложение группы автоморфизмов свободной метабелевой группы S , действующих тождественно на фактор-группе по коммутанту, в группу матриц над кольцом $\mathbb{Z}(S/S')$. Вложение Бахмута позволило получить интересные сведения о группе $\text{Aut}(S)$.

Наша цель – получить некоторый аналог вложения Бахмута для частично коммутативных метабелевых групп. Точнее, определяется некоторый моноид $\mathcal{P}$ матриц порядка r над кольцом $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}]$ целочисленных многочленов Лорана и на нем конгруэнция $\approx$ так, что группа автоморфизмов, действующих тождественно на фактор-группе по коммутанту $S_\Gamma/[S_\Gamma, S_\Gamma]$, изоморфна фактор-моноиду $\mathcal{P}$ по этой конгруэнции.

2. Предварительные результаты. Договоримся в дальнейшем в тех случаях, когда понятно из текста, обозначать одной и той же буквой элемент какой-либо группы G и его образ в группе H при фиксированном гомоморфизме $\varphi: G \rightarrow H$. Пусть всюду в дальнейшем F – свободная группа с базисом $X = \{x_1, \dots, x_r\}$. Зафиксируем естественные гомоморфизмы и изоморфизм

$$F \rightarrow F_\Gamma \rightarrow S_\Gamma \rightarrow S_\Gamma/S'_\Gamma \cong \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}].$$

Тогда, например, по нашей договоренности x_i не только элемент из F , но и элемент из $F_\Gamma, S_\Gamma, S_\Gamma/S'_\Gamma, \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}]$.

Производные Фокса. Левые производные Фокса $\partial_i, 1 \leq i \leq r$, однозначно определены на кольце $\mathbb{Z}(F)$ условиями

$$\partial_i x_j = \delta_{i,j}, \quad \partial_i(uv) = \partial_i(u)\varepsilon(v) + u\partial_i(v), \quad \partial_i(u+v) = \partial_i(u) + \partial_i(v), \quad (2)$$

где $u, v \in \mathbb{Z}(F)$, $\varepsilon: \mathbb{Z}(F) \rightarrow \mathbb{Z}$ – гомоморфизм тривиализации, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Для производных Фокса имеет место *основное тождество*

$$\partial_1 u \cdot (x_1 - 1) + \cdots + \partial_r u \cdot (x_r - 1) = u - \varepsilon(u), \quad u \in \mathbb{Z}(F). \quad (3)$$

Мы будем использовать следующее *правило дифференцирования сложной функции*. Пусть $h = h(x_1, \dots, x_r)$ – некоторый элемент из кольца $\mathbb{Z}(F)$, $v_1, \dots, v_r \in F$. Через $h(v_1, \dots, v_r)$ обозначим образ элемента h под действием эндоморфизма

$$\varphi = \{x_i \rightarrow v_i, 1 \leq i \leq r\}$$

группы F , а через $\partial h / \partial v_j$ – образ элемента $\partial_j h$ под действием этого эндоморфизма. Тогда

$$\partial_i h(v_1, \dots, v_r) = \sum_{j=1}^r \frac{\partial h}{\partial v_j} \cdot \partial_i v_j. \quad (4)$$

Более полные сведения о дифференцированиях Фокса можно найти в [5], [6].

Вложение Магнуса служит удобным инструментом для изучения разрешимых групп. Напомним необходимые определения (см., например, [7], [8]).

Пусть R – нормальная подгруппа свободной группы F , $\bar{F} = F/R$, T – свободный левый $\mathbb{Z}(\bar{F})$ -модуль с базисом $\{t_1, \dots, t_r\}$. Образ элемента $v \in F$ в группе $\bar{F}$ при естественном гомоморфизме $F \rightarrow \bar{F}$ обозначим через $\bar{v}$.

Отображение свободных порождающих

$$\mu: x_i \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_i & t_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq r,$$

продолжается до гомоморфизма группы F в группу матриц

$$\begin{pmatrix} \bar{F} & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Гомоморфизм μ называется *гомоморфизмом Магнуса*. Ядро μ совпадает с коммутантом R' . Таким образом, группа F/R' вложена в группу матриц (5). Это вложение называется *вложением Магнуса*.

При гомоморфизме Магнуса элемент $v \in F$ отображается в матрицу

$$v\mu = \begin{pmatrix} \bar{v} & \overline{\partial_1 v} \cdot t_1 + \cdots + \overline{\partial_r v} \cdot t_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\overline{\partial_i v}$ означает образ производной Фокса $\partial_i v$ в кольце $\mathbb{Z}(\bar{F})$ при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}(F) \rightarrow \mathbb{Z}\bar{F}$.

Из вложения Магнуса следует, что значения производных Фокса от элементов $g \in R'$ в кольце $\mathbb{Z}(F/R)$ равны нулю. Поэтому для любого элемента $g \in F/R'$ однозначно определены образы производных $\partial_i g$ в кольце $\mathbb{Z}(F/R)$. Мы будем называть эти образы значениями производных Фокса $\partial_i g$ в кольце $\mathbb{Z}(F/R)$.

Известен следующий *критерий вхождения элементов группы матриц (5) в подгруппу $F\mu$* (см., например, [8]): матрица

$$\begin{pmatrix} \bar{v} & \alpha_1 \cdot t_1 + \cdots + \alpha_r \cdot t_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i \in \mathbb{Z}(\overline{F})$, принадлежит $F\mu$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1(\overline{x}_1 - 1) + \dots + \alpha_r(\overline{x}_r - 1) = \overline{v} - 1 \quad (7)$$

в кольце $\mathbb{Z}\overline{F}$.

Обозначим через $S = F/F^{(2)}$ свободную метабелеву группу ранга r . Пусть $\overline{S}$ обозначает свободную абелеву группу S/S' , изоморфную F/F' . Зафиксируем естественные гомоморфизмы $F \rightarrow S \rightarrow \overline{S}$ и будем считать, что $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ – базис группы S и группы $\overline{S}$.

Используя вложение Магнуса, можем считать, что S – подгруппа группы матриц

$$S \hookrightarrow \begin{pmatrix} \overline{S} & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где T – свободный левый модуль над кольцом многочленов Лорана $\mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}]$ с базой $\{t_1, \dots, t_r\}$.

Вложение Бахмута играет важную роль при изучении автоморфизмов метабелевых групп.

Для произвольной группы G и ее характеристической подгруппы V обозначим через $\text{Aut}(G, V)$ ядро естественного гомоморфизма $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut}(G/V)$.

В 1965 г. Бахмут [9] получил вложение

$$\text{Aut}(F/R', R/R') \rightarrow GL_r(\mathbb{Z}(F/R)).$$

Вложение Бахмута строится следующим образом. Пусть $\varphi \in \text{Aut}(F/R', R/R')$. Вычислим значения производных $\partial_i(x_j\varphi)$ в кольце $\mathbb{Z}(F/R)$. Составим из полученных значений матрицу $J(\varphi) = (\partial_i(x_j\varphi))$, которую принято называть *матрицей Якоби*. Отметим, что i -я строка матрицы Якоби состоит из значений производных Фокса от элемента $x_i\varphi$ в кольце $\mathbb{Z}(F/R)$. Отображение

$$\varphi \rightarrow J(\varphi) \quad (9)$$

называется *изоморфизмом Бахмута*.

Автоморфизм φ некоторой группы G назовем *IA-автоморфизмом*, если он индуцирует тождественное отображение на фактор-группе G/G' .

Обозначим через $\text{IAut}(G)$ группу $\text{Aut}(G, G')$.

При $R = F'$ получаем представления Бахмута для IA-автоморфизмов свободной метабелевой группы S :

$$\text{IAut}(S) \ni \varphi \rightarrow J(\varphi) = (\partial_i(x_j\varphi)).$$

Представление частично коммутативной метабелевой группы матрицами следует из вложения Магнуса свободной метабелевой группы S в группу матриц. Как было отмечено ранее, частично коммутативная метабелева группа S_Γ имеет представление (1) в многообразии метабелевых групп. Это означает, что к определяющим соотношениям частично коммутативной группы F_Γ добавлено тождество $[[x, y], [u, v]] = 1$, определяющее многообразие метабелевых групп. Таким образом, группа S_Γ изоморфна фактор-группе свободной метабелевой группы по нормальной подгруппе R , порожденной множеством определяющих соотношений

$$R = \langle [x_i, x_j] \mid (x_i, x_j) \in E \rangle^S.$$

При вложении Магнуса свободной метабелевой группы S в группу матриц, нормальная подгруппа R отождествляется с подмодулем свободного модуля T . Обозначим этот подмодуль через L . Таким образом, частично коммутативная метабелева группа S_Γ вложена в группу матриц

$$S_\Gamma \hookrightarrow \begin{pmatrix} A & T/L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Одним из частных случаев частично коммутативной метабелевой группы является метабелево произведение конечно порожденных свободных абелевых групп. Предположим, что определяющий граф Γ представлен в виде объединения непересекающихся полных графов

$$\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \dots \sqcup \Gamma_m.$$

Тогда группа S_Γ является метабелевым произведением свободных абелевых групп S_{Γ_i} , $1 \leq i \leq m$. Обозначим метабелево произведение свободных абелевых групп $A_1, \dots, A_n$ через $M(A_1, \dots, A_n)$.

Свойства частично коммутативных метабелевых групп рассматривались в [10]–[12].

3. Автоморфизмы частично коммутативных метабелевых групп. Автоморфизм свободной метабелевой группы S называется *ручным*, если он индуцирован некоторым автоморфизмом свободной группы F . Как доказали Бахмут и Мочезуки [13] и независимо Романьков [14], при $r \neq 3$ любой автоморфизм свободной метабелевой группы ранга r является ручным. При $r = 3$ группа $\text{IAut}(S)$ содержит неручные автоморфизмы. Примером неручного автоморфизма является автоморфизм Чейна [15], заданный отображением

$$\nu = \{x_1 \rightarrow x_1[x_2, x_3]^{(x_1-1)^2}, x_2 \rightarrow x_2, x_3 \rightarrow x_3\}, \quad (11)$$

где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Аutomорфизмы метабелевых произведений абелевых групп изучались Ушаковым в работах [4], [16]. Он получил представление группы IA -автоморфизмов группы $M(A_1, \dots, A_n)$ матрицами, аналогичное представлению Бахмута. Им доказана следующая

ТЕОРЕМА [4]. Пусть $G = A_1 * A_2 * A_3 * \prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ – свободное произведение абелевых нециклических групп без кручения. Допустим, что A_i , $i = 1, 2, 3$, нетривиальны. Тогда существует автоморфизм группы $G/G^{(2)}$, который не индуцирован никаким автоморфизмом группы G .

Из последнего результата следует существование IA -автоморфизмов группы $S_\Gamma = M(A_1, \dots, A_n)$, не индуцированных автоморфизмами группы $F_\Gamma = A_1 * \dots * A_n$, если $n \geq 3$ и A_i , $1 \leq i \leq n$, – нетривиальные нециклические абелевы группы. Таким образом, если определяющий граф Γ имеет не менее трех компонент связности, то группа $\text{IAut}(S_\Gamma)$ может содержать автоморфизмы, не индуцированные автоморфизмами группы F_Γ .

Следующее предложение показывает, что даже в том случае, когда определяющий граф Γ частично коммутативной метабелевой группы S_Γ является связным или даже деревом, ее группа автоморфизмов не порождена автоморфизмами Лоуренса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует частично коммутативная метабелева группа S_Γ , определенная связным графом Γ и $\varphi \in \text{Aut}(S_\Gamma)$ такие, что автоморфизм φ не индуцирован никаким автоморфизмом группы F_Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Y_n = \{y_1, \dots, y_n\}$ – множество вершин полного графа Δ_n , а $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ – множество вершин пустого графа Δ' . Соединение $\Delta_n + \Delta'$ графов Δ_n и Δ' обозначим через Γ . Напомним, что граф $\Delta_n + \Delta'$ состоит из $\Delta_n \cup \Delta'$ и ребер, соединяющих Y_n и Z .

Частично коммутативная группа S_Γ , определенная связным графом Γ , разлагается в прямое произведение свободной абелевой группы A_n ранга n и свободной метабелевой группы S_3 ранга 3.

Рассмотрим IA -автоморфизм $\bar{\varphi}$ группы S_Γ , который действует тождественно на подгруппе A_n , а его действие на подгруппе S_3 совпадает с неручным автоморфизмом Чейна:

$$\chi = \{z_1 \rightarrow z_1[z_2, z_3]^{(z_1-1)^2}, z_2 \rightarrow z_2, z_3 \rightarrow z_3\}. \quad (12)$$

Предположим, что φ – автоморфизм группы F_Γ , индуцирующий автоморфизм $\bar{\chi}$.

Так как центр A_n группы F_Γ отображается на центр A_n группы S_Γ при естественном отображении F_Γ на S_Γ , то автоморфизм Чейна χ группы S_3 индуцируется автоморфизмом группы F_3 . Но автоморфизм Чейна дикий. Противоречие доказывает утверждение.

При $n = 1$ граф Γ является деревом. Поэтому верно

СЛЕДСТВИЕ 1. *Существует частично коммутативная метабелева группа S_Γ , определенная деревом Γ , и $\varphi \in \text{Aut}(S_\Gamma)$ такие, что автоморфизм φ не индуцирован никаким автоморфизмом группы F_Γ .*

Для формулировки теоремы введем необходимые определения и обозначения:

- S – свободная метабелева группа с базисом $X = \{x_1, \dots, x_r\}$;
- R – нормальная подгруппа из S , порожденная определяющими соотношениями

$$\{[x_i, x_j] \mid 1 \leq i < j \leq n, (x_i, x_j) \in E\}$$

группы $S_\Gamma \cong S/R$;

- $A = \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}]$ – кольцо многочленов Лорана от коммутирующих переменных;
- $\mathcal{M}$ – моноид матриц порядка r над кольцом A ;
- $\mathcal{R}$ – все матрицы из $\mathcal{M}$, строки которых – производные Фокса от элементов из R .

На множестве $\mathcal{M}$ определим отношение эквивалентности $\approx$ следующим образом:

$$\mathcal{M} \ni M_1 \approx M_2 \in \mathcal{M} \iff M_1 - M_2 \in \mathcal{R}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть Γ – граф, $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ – множество его вершин и E – множество ребер; $\mathcal{P}$ – моноид матриц P из $\mathcal{M}$, удовлетворяющих трем условиям:*

- (i) $P(x_1 - 1, \dots, x_r - 1)^t = (x_1 - 1, \dots, x_r - 1)^t$;
- (ii) $\mathcal{R}P \subseteq \mathcal{R}$;
- (iii) *найдутся $M \in \mathcal{M}$ и $R_1 \in \mathcal{R}$ такие, что разность $MP - R_1$ является единичной матрицей.*

Тогда $\approx$ – конгруэнция на моноиде $\mathcal{P}$ и группа $IAut(S_\Gamma)$ изоморфна $\mathcal{P}/\approx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N – нормальная подгруппа относительно свободной группы H с базисом $\{h_1, \dots, h_r\}$ и $\bar{\varphi}$ – любой эндоморфизм группы $\bar{H} = H/N$. Проверим, что он индуцирован некоторым эндоморфизмом группы H . Это означает, что найдется $\varphi \in \text{End}(H)$ такой, что, во-первых, $N\varphi \subseteq N$ и, во-вторых, $(hN)\bar{\varphi} = (h\varphi)N$.

Действительно, определим φ следующим образом: если $(h_i N)\bar{\varphi} = h'_i N$, то выберем какой-либо элемент h''_i из смежного класса $h'_i N$ и положим

$$\varphi = \{h_i \rightarrow h''_i, i = 1, \dots, r\}.$$

Проверим что для любого $w = w(h_1, \dots, h_r) \in N$ имеет место включение $w\varphi \in N$.

Имеем $w(h_1, \dots, h_r)N$ – единичный элемент группы $\bar{H}$. Поэтому его образ $(wN)\bar{\varphi}$ – также единичный элемент. Но

$$(w(h_1 N, \dots, h_r N))\bar{\varphi} = w(h'_1 N, \dots, h'_r N) = w(h''_1, \dots, h''_r)N.$$

Значит, $w(h''_1, \dots, h''_r) \in N$.

Кроме того,

$$(h_i N)\bar{\varphi} = h'_i N = h''_i N = (h_i \varphi)N.$$

Значит, любой эндоморфизм группы S_Γ индуцирован эндоморфизмом группы S .

Очевидно, что любой IA -эндоморфизм группы S_Γ индуцирован эндоморфизмом группы S , тождественным по модулю коммутанта S' .

Обозначим через $IA\text{End}(G)$ моноид всех эндоморфизмов группы G , тождественных на G/G' .

Рассмотрим множество Ψ всех элементов ψ из $IA\text{End}(S)$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) $R\psi \subseteq R$;
- (2) ψ индуцирует автоморфизм группы S_Γ .

На множестве Ψ введем конгруэнцию: тогда и только тогда $\psi_1 \approx \psi_2$, когда ψ_1 и ψ_2 индуцируют одинаковые автоморфизмы группы S_Γ . Очевидно, что группа $IA\text{Aut}(S_\Gamma)$ изоморфна фактор-моноиду Ψ по этой конгруэнции.

Опишем моноид Ψ на языке матриц над кольцом A целочисленных многочленов Лорана от коммутирующих переменных.

Эндоморфизму $\psi \in \Psi$ поставим в соответствие матрицу Якоби $J(\psi)$, элементы которой лежат в кольце A . Из правила дифференцирования сложной функции (4) следует, что $\psi \rightarrow J(\psi)$ – изоморфизм.

Обозначим через $\mathcal{J}$ моноид всех матриц Якоби.

Пусть $(x_1 - 1, \dots, x_r - 1)^t$ – вектор-столбец над A . Из (3) следует, что любая матрица $J \in \mathcal{J}$ стабилизирует вектор $(x_1 - 1, \dots, x_r - 1)^t$, т.е.

$$J(x_1 - 1, \dots, x_r - 1)^t = (x_1 - 1, \dots, x_r - 1)^t. \quad (13)$$

Из критерия вхождения элементов группы матриц (5) в подгруппу $F\mu$ получаем, что верно и обратное: любая стабилизирующая вектор $(x_1 - 1, \dots, x_r - 1)^t$ матрица $J \in \mathcal{M}$ является матрицей Якоби для некоторого IA -эндоморфизма свободной метабелевой группы S . Таким образом, моноид $\mathcal{J}$ выделяется в $\mathcal{M}$ условием (i) теоремы.

Как было отмечено, вложение Магнуса группы S в группу матриц позволяет отождествить нормальную подгруппу R группы S , порожденную коммутаторами

$[x_i, x_j]$, для которых выполнено $(x_i, x_j) \in E$, с подмодулем L модуля T . Используя производные Фокса, легко проверить, что подмодуль L порожден элементами $t_{i,j} = (x_j - 1)t_i + (x_i - 1)t_j$, где $i < j$ и $(x_i, x_j) \in \Gamma$.

Таким образом, определенный ранее моноид $\mathcal{R}$ состоит из матриц, строки которых являются коэффициентами в разложении элементов из L по базису $\{t_1, \dots, t_r\}$.

Используя правило дифференцирования сложной функции, легко получить следующую формулу:

$$(\partial_1(g\psi), \dots, \partial_r(g\psi)) = (\partial_1(g), \dots, \partial_r(g)) \cdot J(\psi) \quad (14)$$

для любого $\psi \in \text{IAEnd}(S)$, $g \in S$. Исходя из (14), условие $R\psi \subseteq R$ можно переписать в виде

$$\mathcal{R}J(\psi) \subseteq \mathcal{R}.$$

Таким образом, помимо условия (13) матрицы J , равные матрицам Якоби $J(\psi)$ тех эндоморфизмов ψ , которые индуцируют эндоморфизм группы S_Γ , должны удовлетворять условию

$$\mathcal{R}J \subseteq \mathcal{R}. \quad (15)$$

Так как $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{J}$, то тем более для матриц из $\mathcal{P}$ справедливо условие (ii) теоремы.

Заметим, что

$$\mathcal{M}\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}. \quad (16)$$

Значит $\approx$ – конгруэнция на моноиде $\mathcal{P}$

Сформулируем теперь на языке матриц дополнительное условие: эндоморфизм ψ индуцирует автоморфизм группы S_Γ . Так как группа S_Γ является хопфовой, то это условие равносильно тому, что элементы $x_1\psi, \dots, x_r\psi$ вместе с элементами $\{[x_i, x_j] \mid (x_i, x_j) \in E\}$ порождают группу S .

Ранее автором и Гуптой была доказана следующая

ТЕОРЕМА [17]. Пусть F – свободная группа ранга r с базисом $\{x_1, \dots, x_r\}$, $n \geq r$, $g_1, \dots, g_n \in F$, R – нормальная подгруппа из F , причем кольцо $\mathbb{Z}(F/R)$ не имеет делителей нуля. Элементы $g_1, \dots, g_n$ порождают группу F/R' тогда и только тогда, когда для матрицы $(\partial_i g_j)_{n \times r}$, составленной из значений левых производных Фокса в кольце $\mathbb{Z}(F/R)$, найдется матрица $B_{r \times n}$ над тем же кольцом такая, что $B \cdot (\partial_i g_j) = I_{r \times r}$ – единичная матрица.

Применим эту теорему к системе элементов

$$\{x_1\psi, \dots, x_r\psi, [x_i, x_j]\}, \quad (17)$$

где $1 \leq i < j \leq r$, $(x_i, x_j) \in E$. Обозначим элементы системы (17) через g_i , $i = 1, \dots, n$.

Докажем, что элементы $\{g_1, \dots, g_n\}$ порождают свободную метабелеву группу S тогда и только тогда, когда для матрицы $J(\psi)$ найдутся матрицы $D \in \mathcal{M}$ и $R_1 \in \mathcal{R}$ такие, что

$$DJ(\psi) = I_{r \times r} + R_1. \quad (18)$$

Предположим вначале, что система элементов (17) порождает группу S . По теореме [17] найдется матрица $B_{r \times n}$ над кольцом A такая, что

$$B_{r \times n}(\partial_j g_i)_{n \times r} = I_{r \times r}. \quad (19)$$

Матрицы B и $(\partial_j g_i)$ представим в блочном виде

$$B = \begin{pmatrix} B'_{r \times r} & B''_{r \times (n-r)} \end{pmatrix}, \quad (\partial_j g_i)_{n \times r} = \begin{pmatrix} J(\psi) \\ C''_{(n-r) \times r} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Заметим, что строки матрицы C'' являются производными Фокса от некоторых элементов $h_1, \dots, h_{n-r}$ из нормальной подгруппы R .

Из (20) получим

$$B(\partial_j g_i) = B'J(\psi) + B''C''.$$

Матрица $B''C''$ принадлежит моноиду $\mathcal{R}$. Значит, условие (18) выполнено.

Предположим теперь, что выполнено условие (18).

A -Модуль $\mathcal{R}$ порожден матрицами $A_{ij}^{(l)}$, $1 \leq i < j \leq r$, $1 \leq l \leq r$, у которых l -я строка состоит из производных Фокса от элемента $[x_i, x_j]$, $(x_i, x_j) \in E$, а остальные строки нулевые.

Таким образом,

$$R_1 = \sum a_{ij}^{(l)} A_{ij}^{(l)}, \quad (21)$$

где $a_{ij}^{(l)} \in A$. Значит, матрица R_1 составлена из значений производных Фокса от элементов

$$h_l = \prod_{(x_i, x_j) \in E} [x_i, x_j]^{a_{i,j}^{(l)}}$$

для $l = 1, \dots, r$.

Заменяя в (18) матрицу R_1 ее выражением (21), найдем матрицу $B_{r \times n}$, удовлетворяющую (19): первые r столбцов матрицы B составляют матрицу D , а оставшаяся часть l -й строки матрицы B состоит из элементов $-a_{ij}^{(l)}$. Тогда

$$B(\partial_j g_i) = DJ(\psi) - R_1 = I.$$

Итак, мы доказали, что матрица P тогда и только тогда соответствует при изоморфизме Бахмута IA -эндоморфизму свободной метабелевой группы, индуцирующему автоморфизм группы S_Γ , когда для нее выполнены условия (i)–(iii) теоремы.

Осталось только отметить, что два IA -эндоморфизма ψ_1 и ψ_2 группы S индуцируют одинаковые отображения на группе S_Γ тогда и только тогда, когда

$$J(\psi_1) - J(\psi_2) \in \mathcal{R},$$

т.е. $J(\psi_1) \approx J(\psi_2)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Charney, “An introduction to right-angled Artin groups”, *Geom. Dedicata*, **125** (2007), 141–158.
- [2] M. R. Laurence, “A generating set for the automorphism group of a graph group”, *J. London Math. Soc.* (2), **52:2** (1995), 318–334.
- [3] H. Servatius, “Automorphisms of graph groups”, *J. Algebra*, **126:1** (1989), 34–60.
- [4] P. V. Ushakov, “On embeddings of the Bachmuth type”, *Comm. Algebra*, **31:3** (2003), 1059–1084.
- [5] Р. Кроуэлл, Р. Фокс, *Введение в теорию узлов*, Мир, М., 1967.

- [6] N. Gupta, *Free Group Rings*, Contemp. Math., **66**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [7] Е. И. Тимошенко, *Эндоморфизмы и универсальные теории разрешимых групп*, Монография НГТУ, НГТУ, Новосибирск, 2011.
- [8] В. Н. Ремесленников, В. Г. Соколов, “Некоторые свойства вложения Магнуса”, *Алгебра и логика*, **9**:5 (1970), 566–578.
- [9] S. Bachmuth, “Automorphisms of free metabelian groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **118** (1965), 93–104.
- [10] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, “Частично коммутативные метабелевы группы: централизаторы и элементарная эквивалентность”, *Алгебра и логика*, **48**:3 (2009), 309–341.
- [11] Е. И. Тимошенко, “Универсальная эквивалентность частично коммутативных метабелевых групп”, *Алгебра и логика*, **49**:2 (2010), 263–290.
- [12] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, “Об универсальных теориях частично коммутативных метабелевых групп”, *Алгебра и логика*, **50**:1 (2011), 3–25.
- [13] S. Bachmuth, H. Y. Mochizuki, “ $\text{Aut}(F) \rightarrow \text{Aut}(F/F'')$ is surjective for free group F of rank ≥ 4 ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **292**:1 (1982), 81–101.
- [14] В. А. Романьков, “Группы автоморфизмов свободных метабелевых групп”, *Вопросы взаимосвязи абстрактной и прикладной алгебры*, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1985, 53–80.
- [15] O. Chein, “IA-automorphisms of free and free metabelian groups”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **21**:6 (1968), 605–629.
- [16] П. В. Ушаков, “IA-автоморфизмы метабелевых произведений двух абелевых групп”, *Матем. заметки*, **70**:3 (2001), 446–457.
- [17] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, “О порождающих элементах групп вида F/R' ”, *Алгебра и логика*, **40**:3 (2001), 251–261.

Е. И. Тимошенко

Новосибирский государственный технический
университет

E-mail: eitim45@gmail.com

Поступило

03.01.2013

Исправленный вариант

16.10.2013