Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Юшков, Разрушение в системах с нелинейной вязкостью, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 4, 615–629

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 09:20:08

Разрушение в системах с нелинейной вязкостью

Е. В. Юшков

В работе получены достаточные условия разрушения решений гидродинамических систем, предложенных О. А. Ладыженской в 1966 г., с нелинейной вязкостью и внешними источниками. Методом конечномерных приближений Галёркина решены вопросы локальной разрешимости и единственности. Энергетическим методом, впервые примененном для гидродинамических систем М. О. Корпусовым и А. Г. Свешниковым, получены оценки на время разрушения и его скорость. Показана определяющая роль нелинейных внешних источников, а не вязкой или гидродинамической нелинейности, на наличие эффекта разрушения.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10241

1. Введение. Исследованию явления неограниченного роста решений на конечном промежутке времени, называемого разрушением, в задачах гидродинамического типа посвящено немалое количество работ [1]–[5]. Основная цель этих работ состоит в том, чтобы с помощью современных методов функционального анализа научиться находить влияние нелинейности на появление разрушения при определенных начальных или граничных условиях. Большинство изученных задач в этом направлении относятся к задачам для систем

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} - \operatorname{Div} \sigma = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

которые в общем виде описывают движение несжимаемой жидкости. В безразмерном уравнении (1) векторная величина $\mathbf{u}$ характеризует скорость жидких частиц, p – давление в точке, а девиатор тензора напряжений σ определяет тип жидкости, т.е. учитывает реакции, возникающие в жидкости в процессе ее движения [6].

Кроме того, первое уравнение (1) может включать в правую часть дополнительное слагаемое, моделирующее влияние внешнего нелинейного источника $f(\mathbf{u})$. Во многих случаях нелинейная функция $f(\mathbf{u})$ может быть разложена по степеням $\mathbf{u}$, поэтому задачи ставятся, в основном, со степенными источниками вида $|\mathbf{u}|^q \mathbf{u}$. Насколько известно автору, для систем гидродинамического типа со степенными источниками в ограниченных областях с помощью энергетического метода удалось

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 8215).

исследовать достаточно широкий класс задач, однако пока не удалось доказать разрушающего влияния слагаемого $(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}$; другими словами, пока не удалось обнаружить явление разрушения в системах Навье–Стокса.

Заметим теперь, что еще в 70-х годах прошлого века Ладыженская предлагала отказаться от систем Навье–Стокса, как от некорректных, т.е. от таких, для которых не удается доказать глобальную разрешимость, и использовать вместо них системы с нелинейной регуляризующей вязкостью и слагаемым $\Delta \mathbf{u}_t$, отвечающим за релаксационные свойства среды [7]:

$$(\mathbf{u} - \Delta \mathbf{u})_t + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} - \text{Vis}(\mathbf{u})\Delta \mathbf{u} = -\nabla p, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где нелинейная вязкость $\text{Vis}(\mathbf{u})$ характеризуется функцией

$$\nu_0 + \nu_1 \int \sum_{i,j=1}^3 \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|^2 d\mathbf{x} \quad \text{или, что то же,} \quad \nu_0 + \nu_1 \int \text{rot}^2 \mathbf{u} d\mathbf{x}.$$

В настоящей работе мы хотим показать, что даже для таких “регуляризованных” глобально разрешимых систем наличие степенной нелинейности приводит к появлению разрушения при достаточно больших начальных данных. Для этого в ограниченной трехмерной области рассмотрим начально-краевую задачу

$$(\mathbf{u} - \Delta \mathbf{u})_t + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} - \text{Vis}(\mathbf{u})\Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}^3 = -\nabla p, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Для получения достаточных условий разрушения мы воспользуемся классическим энергетическим методом [1], [4], [8]. Помимо разрушения будет исследован также вопрос локальной разрешимости и единственности, получены двусторонние оценки на время разрушения.

Из всего сказанного следует сделать вывод, что определяющее влияние на появление разрушения как в системах Ладыженской, так и в системе Навье–Стокса с нелинейным источником, по-видимому, оказывает именно источник.

2. Единственность и локальная разрешимость. Начнем с некоторых обозначений, которые мы используем в данной работе:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная липшецева область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$;
- $L^p(\Omega)$ – пространство абсолютно интегрируемых с p -й степенью вещественных функций по лебеговой мере $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$, являющееся банаховым относительно нормы

$$\|u\|_{L^p} = \left| \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right|^{1/p};$$

- $L^\infty(\Omega)$ – банахово пространство существенно ограниченных вещественных функций с нормой

$$\|u\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_{\Omega} |u(\mathbf{x})|;$$

- $\mathbf{L}^q(\Omega) = L^q(\Omega) \times L^q(\Omega) \times L^q(\Omega)$ – банахово пространство векторзначных функций; причем через $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ мы будем обозначать скалярное произведение в $\mathbf{L}^2(\Omega)$;

- $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ – гильбертово пространство векторнозначных функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ таких, что $u_i \in H_0^1$ со скалярным произведением

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (\partial_i \mathbf{u}, \partial_i \mathbf{v}),$$

где введено обозначение $\partial_i = \partial/\partial x_i$, а по повторяющимся индексам здесь и далее везде производится суммирование, $i = 1, 2, 3$;

- $\mathbf{H}(\Omega)$ – замыкание в пространстве $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ пространства

$$\mathbf{V}(\Omega) = (\mathbf{u} \in \mathbf{D}(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0),$$

здесь через $\mathbf{D}(\Omega)$ обозначено пространство векторнозначных основных функций с компактным носителем. Пространство, двойственное к пространству $\mathbf{H}$, будем обозначать через $\mathbf{H}^{-1}$ со скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ двойственности между ними.

Дадим две эквивалентные формулировки слабого обобщенного решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слабым обобщенным решением задачи (3), (4) называется решение $\mathbf{u}(x)(t)$ из класса $L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$, $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$, следующего уравнения:

$$\int_0^T \varphi(t) \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{w} \rangle dt = 0 \quad \text{для любых } \varphi(t) \in L^2(0, T), \quad \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad \mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (5)$$

или, что эквивалентно, уравнения

$$\int_0^T \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle dt = 0 \quad \text{для любых } \mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \quad (6)$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} - \Delta \mathbf{u})_t + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} - \operatorname{Vis}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}^3.$$

Доказательство эквивалентности двух формулировок подробно описано в работе [1]. Там же доказывается тот факт, что классическое решение задачи (3), (4) является решением и в слабом обобщенном смысле; другими словами, доказывается справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ. Пусть $\mathbf{f} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. Тогда для того, чтобы имело место равенство

$$\int_0^T \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle dt = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция давления $p(t, x) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ такая, что $\mathbf{f} = \operatorname{grad} p$.

Теперь докажем единственность решения задачи (3), (4) в классах функций

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{u}' \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)).$$

Действительно, пусть существует два решения задачи (3), (4): $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, соответствующие одной и той же начальной функции $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$. Возьмем в качестве функции $\mathbf{v}$ в определении (6) функцию

$$\mathbf{v}(s) = [\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)] \begin{cases} 1, & s \in [0, t], \\ 0, & s \in (t, T], \end{cases}$$

и вычтем интеграл для $\mathbf{u}_1$ из интеграла для $\mathbf{u}_2$, обозначив $\mathbf{w}(s) = \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)$. После интегрирования по частям в рассматриваемых классах можно получить следующее равенство:

$$\int_0^t [\langle \mathbf{w}', \mathbf{w}(t) \rangle - \langle \Delta \mathbf{w}', \mathbf{w}(t) \rangle - \nu_0 \langle \Delta \mathbf{w}, \mathbf{w}(t) \rangle - \nu_1 \langle \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}}^2 \Delta \mathbf{u}_1 - \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}}^2 \Delta \mathbf{u}_2, \mathbf{w}(t) \rangle + \langle ((\mathbf{u}_1, \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2, \nabla) \mathbf{u}_2), \mathbf{w}(t) \rangle - \langle \mathbf{u}_1^3 - \mathbf{u}_2^3, \mathbf{w}(t) \rangle] ds = 0. \quad (7)$$

Так как значение функций $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ в начальный момент времени совпадают, перепишем выражение (7) в виде

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w}(t), \mathbf{w}(t)) + \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}}^2(t) \\ &= -\nu_0 \int_0^t ((\mathbf{w}(s), \mathbf{w}(t))) ds - \nu_1 \int_0^t ((\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}}^2 \mathbf{u}_1 - \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}}^2 \mathbf{u}_2, \mathbf{w}(t))) ds \\ & \quad - \left\langle \mathbf{w}(t), \int_0^t ((\mathbf{u}_1, \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2, \nabla) \mathbf{u}_2) ds \right\rangle + \left\langle \mathbf{w}(t), \int_0^t (\mathbf{u}_1^3 - \mathbf{u}_2^3) ds \right\rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Разберемся со слагаемыми в правой части. Первое можно оценить сверху через неравенство Гёльдера [9]:

$$\int_0^t ((\mathbf{w}(s), \mathbf{w}(t))) ds \leq \|\mathbf{w}(t)\|_{\mathbf{H}} \int_0^t \|\mathbf{w}(s)\|_{\mathbf{H}}(s) ds. \quad (9)$$

Второе слагаемое оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{u}_1((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)) - \mathbf{u}_2((\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2))), \mathbf{w}(t)) \\ &= ((\mathbf{u}_1 \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}}^2 - \mathbf{u}_2 \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}}^2 + \mathbf{u}_2 \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}}^2 - \mathbf{u}_2 \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}}^2, \mathbf{w}(t))) \\ &= \|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}}^2 ((\mathbf{w}(s), \mathbf{w}(t))) + (\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}}^2 - \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}}^2) ((\mathbf{u}_2(s), \mathbf{w}(t))) \\ &= ((\mathbf{u}_1(s), \mathbf{u}_1(s))) ((\mathbf{w}(s), \mathbf{w}(t))) + ((\mathbf{u}_1(s) + \mathbf{u}_2(s), \mathbf{w}(s))) ((\mathbf{u}_2(s), \mathbf{w}(t))). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \int_0^t ((\mathbf{u}_1((\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)) - \mathbf{u}_2((\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2))), \mathbf{w}(t)) ds \\ & \leq \|\mathbf{w}(t)\|_{\mathbf{H}} \int_0^t [\|\mathbf{u}_1\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}} \|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}}] \|\mathbf{w}(s)\|_{\mathbf{H}} ds \\ & \leq \text{const} \|\mathbf{w}(t)\|_{\mathbf{H}} \int_0^t \|\mathbf{w}(s)\|_{\mathbf{H}}(s) ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы оценить последние два слагаемых, воспользуемся цепочкой плотных непрерывных вложений [9]:

$$\mathbf{H}^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega) \subset \mathbf{L}^{4/3}(\Omega) \subset \mathbf{H}^{-1}(\Omega).$$

Тогда для третьего слагаемого справедлива следующая цепочка:

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathbf{w}(t), \int_0^t ((\mathbf{u}_1, \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2, \nabla) \mathbf{u}_2) ds \right\rangle \\ & \leq \|\mathbf{w}(t)\|_{\mathbf{H}} \int_0^t \|(\mathbf{u}_1, \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2, \nabla) \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{H}^{-1}} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \| \mathbf{w}(t) \|_{\mathbf{H}} \int_0^t (\| (\mathbf{u}_1, \nabla)(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \|_{\mathbf{H}^{-1}} + \| (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \nabla) \mathbf{u}_2 \|_{\mathbf{H}^{-1}}) ds \\
 &\leq \text{const} \| \mathbf{w}(t) \|_{\mathbf{H}} \int_0^t \| \mathbf{w}(s) \|_{\mathbf{H}}(s) ds.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь при переходе на последнюю строчку мы воспользовались ясным следствием неравенства Гёльдера:

$$\begin{aligned}
 \| (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{B} \|_{\mathbf{H}^{-1}} &\leq \text{const} \| (\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{B} \|_{\mathbf{L}^{4/3}} \leq \text{const} \left| \int_{\Omega} |(\mathbf{A}, \nabla) \mathbf{B}|^{4/3} d\mathbf{x} \right|^{3/4} \\
 &\leq \text{const} \sum_{i,j=1}^{3,3} \left| \int_{\Omega} |A_i|^{4/3} \left| \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right|^{4/3} d\mathbf{x} \right|^{3/4} \\
 &\leq \text{const} \left| \int_{\Omega} \mathbf{A}^4 d\mathbf{x} \right|^{1/4} \left| \sum_{i,j=1}^{3,3} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right|^2 d\mathbf{x} \right|^{1/2} \\
 &\leq \text{const} \| \mathbf{A} \|_{\mathbf{L}^4} \| \mathbf{B} \|_{\mathbf{H}} \leq \text{const} \| \mathbf{A} \|_{\mathbf{H}} \| \mathbf{B} \|_{\mathbf{H}}.
 \end{aligned}$$

С последним слагаемым поступим аналогичным образом:

$$\begin{aligned}
 \left\langle \mathbf{w}(t), \int_0^t (\mathbf{u}_1^3 - \mathbf{u}_2^3) ds \right\rangle &\leq \| \mathbf{w}(t) \|_{\mathbf{H}} \int_0^t \| \mathbf{u}_1^3 - \mathbf{u}_2^3 \|_{\mathbf{H}^{-1}} ds \\
 &\leq \text{const} \| \mathbf{w}(t) \|_{\mathbf{H}} \int_0^t \| \mathbf{u}_1^3 - \mathbf{u}_2^3 \|_{\mathbf{L}^{4/3}} ds \\
 &\leq \text{const} \| \mathbf{w}(t) \|_{\mathbf{H}} \int_0^t \max(\| \mathbf{u}_1 \|_4^2, \| \mathbf{u}_2 \|_4^2) \| \mathbf{w} \|_4 ds \\
 &\leq \text{const} \| \mathbf{w}(t) \|_{\mathbf{H}} \int_0^t \| \mathbf{w}(s) \|_{\mathbf{H}}(s) ds.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Собирая оценки (9)–(13) и подставляя их в (8), мы получаем неравенство

$$\| \mathbf{w}(t) \|_{\mathbf{H}}(t) \leq \text{const} \int_0^t \| \mathbf{w}(s) \|_{\mathbf{H}}(s) ds. \tag{14}$$

Применяя к оценке (14) лемму Гронуолла–Беллмана, получаем, что почти для всех $(x)(t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$ функция $\mathbf{w} \equiv 0$, т.е. решение единственно.

Теперь с помощью метода конечномерной аппроксимации Галёркина докажем локальную разрешимость задачи (3), (4). В поисках первоисточника этого метода следует смотреть работы [7], [10].

Выберем полную последовательность линейно-независимых элементов $\{ \mathbf{w}_m \}$ – тотальную в сепарабельном пространстве $\mathbf{H}(\Omega)$:

$$(\forall n \ \mathbf{w} \perp \mathbf{w}_n) \Rightarrow \mathbf{w} \equiv 0.$$

Построим приближенное решение задачи (3), (4)

$$\mathbf{u}_m = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) \mathbf{w}_k,$$

удовлетворяющее уравнению

$$\int_0^{T_m} \varphi(t) \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle dt = 0 \quad \text{для любых } \varphi(t) \in L^2(0, T_m), \quad k = 1, \dots, m, \quad (15)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} - \Delta \mathbf{u})_t + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} - \text{Vis}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} - \mathbf{u}^3,$$

и начальному условию

$$\mathbf{u}_m(0) \rightarrow \mathbf{u}_0 \quad \text{сильно в } \mathbf{H}(\Omega).$$

Относительно коэффициентов $c_{mk}(t)$ предполагаем, что они являются функциями из класса $C^1[0, T_m]$, решениями системы (15) для некоторого $T_m > 0$.

Из основной леммы вариационного исчисления и вложений

$$\varphi(t) \in C_0^\infty \subset L^2, \quad \langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle \in C[0, T_m]$$

следует, что выражение $\langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle = 0$. Таким образом, функции $c_{mk}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m A_{ij} c'_{mi} + \left[\nu_0 + \nu_1 \left\| \sum_{k=1}^m c_{mk} \mathbf{w}_k \right\|_{\mathbf{H}}^2 \right] \sum_{i=1}^m ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)) c_{mi} \\ = \sum_{i=1}^m \left(\left\| \sum_{k=1}^m c_{mk} \mathbf{w}_k \right\|^2 (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) \right) + \sum_{i,l=1}^{m,m} B(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j) c_{mi}(t) c_{ml}(t), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$A_{ij} = (\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j) + ((\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)), \quad B(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i,j=1}^{3,3} \int_{\Omega} a_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} c_j d\mathbf{x}.$$

Поскольку система $\{\mathbf{w}_n\}$ линейно независима в $\mathbf{H}(\Omega)$, то матрица A_{ij} является невырожденной, а следовательно, обратимой. Обращая, мы получаем задачу Коши для разрешенной относительно старшей производной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При условии априорной ограниченности $\max_{[0,T]} \sum_{k=1}^m c_{km}^2(t)$ или, что то же самое, $\max_{[0,T]} \|\mathbf{w}^m\|^2$ для нее существует единственное решение в классе $c_{mk}(t) \in C^1[0, T_m]$. Следуя схеме, предложенной в работе [1], получим необходимые нам априорные оценки.

Умножив уравнение $\langle \mathbf{D}(\mathbf{u}_m), \mathbf{w}_k \rangle = 0$ на $c_{mk}(t)$ и просуммировав по $k = 1, \dots, m$, получим первое энергетическое равенство. Второе можно получить, умножив на $c'_{mk}(t)$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) + \nu_0 ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \nu_1 ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^2 = \|\mathbf{u}_m\|_4^4, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m) + \frac{\nu_0}{2} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{\nu_1}{4} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^2 \\ = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_4^4 - ((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m). \end{aligned} \quad (18)$$

При выводе (17) мы воспользовались тем, что $((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) = 0$, что в свою очередь является прямым следствием $\text{div } \mathbf{u}_m = 0$. Далее, введем следующие обозначения

$$\Phi_m = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) + \frac{1}{2} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)), \quad J_m = (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m) + ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)),$$

тогда энергетические равенства можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \Phi_m \leq \|\mathbf{u}_m\|_4^4, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t J_m(s) ds \leq & \frac{1}{4} \|\mathbf{u}_m\|_4^4 + \frac{\nu_0}{2} ((\mathbf{u}_{m0}, \mathbf{u}_{m0})) \\ & + \frac{\nu_1}{4} ((\mathbf{u}_{m0}, \mathbf{u}_{m0}))^2 + \left| \int_0^t ((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m) ds \right|. \end{aligned} \quad (20)$$

Воспользуемся вложением

$$\mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \mathbf{L}^4(\Omega): \quad \|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{L}^4} \leq C_1 \|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{H}}.$$

Тогда из неравенства (19) можно получить оценку: $\Phi'_m \leq 4C_1^4 \Phi_m^2$, интегрируя которую по времени, будем иметь

$$\Phi_m(t) \leq \frac{\Phi_m(0)}{1 - 4C_1^4 \Phi_m(0)t}. \quad (21)$$

Покажем, что Φ_m ограничена сверху константой, не зависящей от $m \in \mathbb{N}$. Действительно, в начальный момент времени $\Phi_m(0) \leq C_0$, так как $\mathbf{u}_{m0} \rightarrow \mathbf{u}_0$ сильно в $\mathbf{H}(\Omega)$. Тогда существует подпоследовательность $\{\mathbf{u}_m\}$ такая, что либо $\Phi_m(0) \rightarrow \Phi(0)$ сверху, либо снизу.

Для случая сходимости снизу справедливо неравенство

$$1 - 4C_1^4 \Phi_m(0)t \geq 1 - 4C_1^4 \Phi(0)t \quad \text{для всех } t \in (0, (4C_1^4 \Phi(0))^{-1}),$$

откуда сразу следует ограниченность $\Phi_m(t)$ константой, не зависящей от m .

Для случая сходимости сверху выполнено следующее: для любого $n < m$ имеем $\Phi_n(0) \leq \Phi_m(0)$ и, соответственно,

$$1 - 4C_1^4 \Phi_m(0)t \geq 1 - 4C_1^4 \Phi_n(0)t.$$

Таким образом,

$$\Phi_m(t) \leq \frac{\Phi(0)}{1 - 4C_1^4 \Phi_n(0)t} \quad \text{для всех } t \in (0, (4C_1^4 \Phi_n(0))^{-1}),$$

а следовательно, для любого фиксированного $T \in (0, (4C_1^4 \Phi(0))^{-1})$ существует такое n , при котором

$$\Phi_m(t) \leq \text{const}. \quad (22)$$

Теперь на основе ограниченности $\Phi_m(t)$ покажем ограниченность $J_m(t)$. Рассмотрим последнее слагаемое в (20):

$$\begin{aligned} |((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}'_m)| &= \left| \int u'_{mi} (u_{mj}, \partial_j) u_{mi} \right| = \left| \int u_{mj} u_{mi} \partial_j u'_{mi} \right| \leq \int |u_{mj} u_{mi} \partial_j u'_{mi}| \\ &\leq \int |\mathbf{u}_m|^2 \sum_{i,j=1}^{3,3} |\partial_j u'_{mi}| \leq 3 \int |\mathbf{u}_m|^2 \left| \sum_{i,j=1}^{3,3} |\partial_j u'_{mi}|^2 \right|^{1/2} \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{2} ((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + \frac{3}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}_m\|_4^4. \end{aligned} \quad (23)$$

Выберем $\varepsilon = 1/3$ и перепишем (20) в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^t J_m(s) ds \leq \frac{19}{4} \|\mathbf{u}_m\|_4^4 + \frac{\nu_0}{2} ((\mathbf{u}_{m0}, \mathbf{u}_{m0})) + \frac{\nu_1}{4} ((\mathbf{u}_{m0}, \mathbf{u}_{m0}))^2. \quad (24)$$

Тогда из ограниченности $\Phi_m(t)$ следует справедливость следующих двух утверждений:

- 1) последовательность $\{\mathbf{u}_m\}$ равномерно по m ограничена в $L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$ и содержит подпоследовательность, $*$ -слабо сходящуюся к $\mathbf{u}$;
- 2) последовательность $\{\mathbf{u}'_m\}$ равномерно по m ограничена в $L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$ и содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к $\mathbf{u}'$.

Для того чтобы перейти к пределу по $m \rightarrow \infty$, нам понадобятся следующие результаты.

ЛЕММА. Пусть последовательность $\{\mathbf{u}_m\}$ равномерно по m ограничена в $L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$, а $\{\mathbf{u}'_m\}$ — в $L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$. Тогда существует подпоследовательность $\{\mathbf{u}_{m_k}\}$ и функция $\mathbf{u}(s) \in \mathbf{L}^4(\Omega)$ такие, что

- 1) $u_{m_k i} u_{m_k j} \rightarrow u_i u_j$ слабо в $L^2(Q_T)$, где $Q_T = (0, T) \times \Omega$;
- 2) для почти всех $s \in [0, T]$ $\mathbf{u}_{m_k}(s) \rightarrow \mathbf{u}(s)$ сильно в $\mathbf{L}^4(\Omega)$;
- 3) для почти всех $s \in [0, T]$ $\mathbf{u}_{m_k}^3(s) \rightarrow \mathbf{u}^3(s)$ сильно в $\mathbf{L}^{4/3}(\Omega)$.

По утверждению Ладыженской (см., например, [7]) эти результаты являются непосредственным следствием свойств $\{\mathbf{u}_m\}$, однако на наш взгляд их доказательство представляет определенный интерес; подробно оно изложено в работе [1].

Для перехода $m \rightarrow \infty$ остается разобраться со слагаемым нелинейной вязкости:

$$\int_0^T \langle \text{Vis}(\mathbf{u}_m) \Delta \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_k \rangle dt = \int_0^T \int_\Omega [\nu_0 + \nu_1((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))] \partial_i \mathbf{u}_m \partial_i \mathbf{w}_k dt dx.$$

Воспользуемся идеей Минти–Браудера [11]. Для функции

$$A^i(\mathbf{u}_m) = [\nu_0 + \nu_1((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))] \partial_i \mathbf{u}_m$$

в силу оценок (17) и (22)

$$\int_{Q_T} A^i \partial_i \mathbf{u}_m \leq c(t),$$

следовательно, эта функция имеет равномерно ограниченную норму в $L^{4/3}(Q_T)$ и поэтому слабо сходится к некоторой функции $B^i(x, t)$.

Обозначив $\mathbf{V} = \sum_{k=1}^m c_k(t) \mathbf{w}_k$, перейдем с помощью вспомогательной леммы в (15) к пределу по m :

$$\int_{Q_T} (\Delta \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_m)_t \mathbf{V} \rightarrow \int_{Q_T} (\Delta \mathbf{u} - \mathbf{u})_t \mathbf{V}, \quad \int_{Q_T} \mathbf{u}_m^3 \mathbf{V} \rightarrow \int_{Q_T} \mathbf{u}^3 \mathbf{V},$$

и

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m \mathbf{V} &= - \sum_{k=1}^m \int_0^T c_k(t) \int_\Omega u_{mi} u_{mj} \frac{\partial w_{ki}}{\partial x_j} \\ &\rightarrow - \sum_{k=1}^\infty \int_0^T c_k(t) \int_\Omega u_i u_j \frac{\partial w_{ki}}{\partial x_j} = \int_{Q_T} (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^T \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}_m), \mathbf{V} \rangle dt = 0 \rightarrow \int_{Q_T} [(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{u}^3) \mathbf{V} + (\partial_i \mathbf{u}_t + B^i) \partial_i \mathbf{V}] dt d\mathbf{x} = 0 \quad (25)$$

для любой функции $\mathbf{V} \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$. Теперь для произвольных дифференцируемых функций $\mathbf{v}', \mathbf{v}''$ покажем неотрицательность выражения

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} (\partial_i \mathbf{v}' - \partial_i \mathbf{v}'') [A^i(\mathbf{v}') - A^i(\mathbf{v}'')] dt d\mathbf{x} \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_i \mathbf{v}' - \partial_i \mathbf{v}'') [\nu_0 (\partial_i \mathbf{v}' - \partial_i \mathbf{v}'') \\ & \quad + \frac{\nu_1}{2} (\|\mathbf{v}'\|_{\mathbf{H}}^2 - \|\mathbf{v}''\|_{\mathbf{H}}^2) (\partial_i \mathbf{v}' + \partial_i \mathbf{v}'') + \frac{\nu_1}{2} (\|\mathbf{v}'\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{v}''\|_{\mathbf{H}}^2) (\partial_i \mathbf{v}' - \partial_i \mathbf{v}'')] dt d\mathbf{x} \\ &= \int_0^T \left[\nu_0 \|\mathbf{v}' - \mathbf{v}''\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{\nu_1}{2} (\|\mathbf{v}'\|_{\mathbf{H}}^2 - \|\mathbf{v}''\|_{\mathbf{H}}^2)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{\nu_1}{2} (\|\mathbf{v}'\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{v}''\|_{\mathbf{H}}^2) \|\mathbf{v}' - \mathbf{v}''\|_{\mathbf{H}}^2 \right] dt \geq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Положив $\mathbf{v}' = \mathbf{u}_m$, а $\mathbf{v}'' = \eta = \sum_{k=1}^m c_k(t) \mathbf{w}_k$ и воспользовавшись левой частью выражения (25), сделаем замену

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} A^i(\mathbf{u}_m) \partial_i (\mathbf{u}_m - \eta) dt d\mathbf{x} \\ &= - \int_{Q_T} [(\mathbf{u}_{mt} + (\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_m^3) (\mathbf{u}_m - \eta) + \partial_i \mathbf{u}_{mt} \partial_i (\mathbf{u}_m - \eta)] dt d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

что приведет (26) к неравенству

$$- \int_{Q_T} [(\mathbf{u}_{mt} + (\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_m^3) (\mathbf{u}_m - \eta) + (\partial_i \mathbf{u}_{mt} + A^i(\eta)) \partial_i (\mathbf{u}_m - \eta)] dt d\mathbf{x} \geq 0. \quad (27)$$

Из свойств вспомогательной леммы и ограниченности Φ_m, J_m следует справедливость перехода $m \rightarrow \infty$ во всех слагаемых, кроме $((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)$. Чтобы показать справедливость предельного перехода

$$\int_{Q_T} u_{mi} (\partial_i \mathbf{u}_m) \mathbf{u}_m dt d\mathbf{x} \rightarrow \int_{Q_T} u_i (\partial_i \mathbf{u}) \mathbf{u} dt d\mathbf{x},$$

надо показать сильную сходимость $u_{mi} u_{mk}$ в пространстве $L^{4/3}(Q_T)$, сопряженном пространству $L^4(Q_T)$, в котором $\partial_i \mathbf{u}_m \rightarrow \partial_i \mathbf{u}$ сходится слабо. А это действительно имеет место в силу свойства 2) вспомогательной леммы и неравенства

$$\begin{aligned} \|u_{mi} u_{mk} - u_i u_k\|_{L^{4/3}} &\leq \|(u_{mk} - u_k) u_{mi}\|_{L^{4/3}} + \|(u_{mi} - u_i) u_k\|_{L^{4/3}} \\ &\leq \|u_{mk} - u_k\|_{L^{8/3}} \|u_{mi}\|_{L^{8/3}} + \|u_k\|_{L^{8/3}} \|u_{mi} - u_i\|_{L^{8/3}}, \end{aligned} \quad (28)$$

так как $8/3 < 4$, то правая часть неравенства стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Возьмем в равенстве (25) функцию $\mathbf{V} = \mathbf{u} - \eta$ и сложим его с неравенством (27):

$$\int_{Q_T} [B^i - A^i(\eta)] \partial_i (\mathbf{u} - \eta) dt d\mathbf{x} \geq 0. \quad (29)$$

Положим теперь в (29) $\eta = \mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{V}$ и устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получим

$$\int_{Q_T} [B^i - A^i(\mathbf{u})] \partial_i \mathbf{V} dt d\mathbf{x} \geq 0. \quad (30)$$

Так как неравенство (30) справедливо для любой функции $\mathbf{V} \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$, то знак неравенства следует заменить на знак равенства, а B^i в (25) заменить на A^i :

$$\int_0^T [\nu_0 + \nu_1((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))](\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) ds \rightarrow \int_0^T [\nu_0 + \nu_1((\mathbf{u}, \mathbf{u}))](\mathbf{u}, \mathbf{u}) ds \quad (31)$$

для всех $V \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega))$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 (о локальной разрешимости). *Для любой начальной функции $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Omega)$ существует единственное слабое обобщенное решение задачи (3), (4) из класса*

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{u}' \in L^2(0, T; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \text{для всех } T \in (0, T_0).$$

Заметим, что момент времени T_0 можно назвать максимальным в том смысле, что либо $T_0 = +\infty$, либо T_0 конечно, но при $t \rightarrow T_0$ происходит разрушение:

$$\lim_{t \rightarrow T_0} \sup((\mathbf{u}, \mathbf{u})) = +\infty.$$

Действительно, предположим противное: $T_0 < \infty$, но $((\mathbf{u}, \mathbf{u})) \leq C < \infty$ везде при $t \in [0, T_0]$. По определению обобщенного решения функция $\mathbf{u}$ удовлетворяет задаче

$$\int_0^{T'} \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle ds = 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad (32)$$

для любых $\mathbf{v} \in L^2([T', T' + t]; \mathbf{H}(\Omega)), \quad T' \in (0, T_0)$.

Рассмотрим теперь другую задачу:

$$\int_{T'}^{T'+t} \langle \mathbf{F}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle ds = 0, \quad \mathbf{u}(T') = \mathbf{u}_{T'} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (33)$$

для любых $\mathbf{v} \in L^2([T', T' + t]; \mathbf{H}(\Omega))$.

Сделав замену переменных $\sigma = s - T'$, $\bar{\mathbf{u}}(\sigma) = \mathbf{u}(s)$, мы приходим к задаче

$$\int_0^t \langle \mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{v}(\sigma + T') \rangle d\sigma = 0, \quad \bar{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_{T'} \in \mathbf{H}(\Omega), \quad (34)$$

для любых $\mathbf{v} \in L^2([T', T' + t]; \mathbf{H}(\Omega))$.

Сравним (34) с (6). В силу локальной разрешимости найдется такое $t = T^*(T')$, зависящее от T' , что существует единственное решение (34). В силу предположения

$$\sup_{T' \in [0, T_0]} ((\mathbf{u}, \mathbf{u})) \leq C$$

существует точная нижняя грань функции $T^*(T')$. Обозначим ее через T^* и выберем $T' = T_0 - T^*/2$. Тогда решение задачи (3), (4)

$$\mathbf{u}^* = \{\mathbf{u}(t), t \in [0, T']; \bar{\mathbf{u}}(t - T'), t \in [T', T' + T^*)\} \quad (35)$$

может быть продолжено за интервал $(0, T_0)$, что противоречит выбору T_0 .

3. Разрушение решения и глобальная разрешимость. Воспользуемся модификацией энергетического метода Х. Левина, предложенной для задачи Осскова в работе [1]. Основная идея метода – свести энергетические равенства задачи (17), (18) к обыкновенному дифференциальному неравенству вида

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi\Phi' + \gamma\Phi^2 + \delta\Phi^3 \geq 0$$

и, интегрируя это неравенство, получить оценку снизу, разрушающуюся за конечное время. Заметим, что неравенства такого типа для задач гидродинамики впервые возникли в работе Ладыженской и Калантарова [8].

Рассмотрим опять начально-краевую задачу (3), (4):

$$(\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u})_t + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} - \text{Vis}(\mathbf{u})\Delta\mathbf{u} - \mathbf{u}^3 = -\nabla p, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}).$$

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что задача (3), (4) локально разрешима, а начальное условие, для некоторого $\varepsilon \in (0, 1/8)$, удовлетворяет неравенству*

$$(\Phi'_m(0))^2 \geq \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi_m^2(0) + \frac{2\delta}{2\alpha - 3} \Phi_m^3(0), \\ \alpha = 2 - 4\varepsilon, \quad \gamma = \frac{\nu_0^2}{\varepsilon}, \quad \delta = \frac{24C_1^4}{\varepsilon}.$$

Тогда решение задачи разрушается за конечное время $T_0 > 0$, для которого имеет место двусторонняя оценка $T_0 \in [T_1, T_2]$:

$$T_1 = (4C_1^4\Phi(0))^{-1}, \quad T_2 = \frac{\Phi(0)}{\alpha - 1} \left[\Phi'(0)^2 - \frac{\gamma}{\alpha - 1} \Phi(0)^2 - \frac{2\delta}{2\alpha - 3} \Phi(0)^3 \right]^{-1/2}.$$

Напротив, для достаточно малых начальных данных

$$\Phi_0 \leq \frac{2\nu_0 C_2}{4C_1^4 - 4\nu_1 C_2^2}$$

решение задачи существует глобально во времени.

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и далее через C_1 и C_2 обозначены константы наилучшего вложения $\mathbf{H}_0^1$ в $\mathbf{L}^4$ и в $\mathbf{L}^2$ соответственно:

$$\|\mathbf{w}\|_4 \leq C_1((\mathbf{w}, \mathbf{w}))^{1/2}, \quad C_2(\mathbf{w}, \mathbf{w})^{1/2} \leq ((\mathbf{w}, \mathbf{w}))^{1/2} \quad \text{для всех } \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Перепишем энергетические равенства (17), (18) следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \Phi_m + \nu_0((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \nu_1((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^2 = \|\mathbf{u}_m\|_4^4, \quad (36)$$

$$J_m = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_4^4 - \frac{\nu_0}{2} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) - \frac{\nu_1}{4} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^2 - ((\mathbf{u}_m, \nabla)\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m'). \quad (37)$$

Используя оценку (23) для последнего слагаемого, можно перейти к неравенству

$$J_m \leq \frac{1}{4} \frac{d}{dt} [\|\mathbf{u}_m\|_4^4 - 2\nu_0((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) - \nu_1((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^2] + \frac{3\varepsilon}{2} J_m + \frac{3}{2\varepsilon} \|\mathbf{u}_m\|_4^4. \quad (38)$$

Пользуясь первым энергетическим равенством, выражение в квадратных скобках можно заменить на $\Phi'_m - \nu_0((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))$. Если, кроме того, воспользоваться оценкой

$$\frac{d}{dt}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) \leq \frac{\nu_0}{2\varepsilon}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{2\varepsilon}{\nu_0}((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)),$$

то неравенство (38) можно записать так:

$$(1 - 2\varepsilon)J_m \leq \frac{1}{4}\Phi''_m + \frac{\nu_0^2}{8\varepsilon}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \frac{3}{2\varepsilon}\|\mathbf{u}_m\|_4^4 \leq \frac{1}{4}\Phi''_m + \frac{\nu_0^2}{4\varepsilon}\Phi_m + \frac{6C_1^4}{\varepsilon}\Phi_m^2. \quad (39)$$

Нетрудно убедиться в справедливости оценки

$$\begin{aligned} (\Phi'_m)^2 &= [((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}_m)]^2 \\ &\leq [((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m))^{1/2}((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^{1/2} + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)^{1/2}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)^{1/2}]^2 \\ &\leq [((\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)) + (\mathbf{u}'_m, \mathbf{u}'_m)][((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)] \leq 2\Phi_m J_m; \end{aligned} \quad (40)$$

подставляя (39) в (40), приходим к обыкновенному дифференциальному неравенству

$$\Phi_m \Phi''_m - \alpha(\Phi'_m)^2 + \gamma\Phi_m^2 + \delta\Phi_m^3 \geq 0, \quad (41)$$

где

$$\alpha = 2 - 4\varepsilon, \quad \gamma = \frac{\nu_0^2}{\varepsilon}, \quad \delta = \frac{24C_1^4}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Заметим, что $\alpha \in (1, 2)$, следовательно, корректной является замена $Y_m = \Phi_m^{1-\alpha}$, после которой неравенство (41) принимает вид

$$Y''_m + \gamma(1 - \alpha)Y_m + \delta(1 - \alpha)Y^{(2-\alpha)/(1-\alpha)} \leq 0. \quad (42)$$

Далее, в силу непрерывной дифференцируемости функции Y_m найдется такой интервал времени $[0, T_m]$, на котором $Y'_m = (1 - \alpha)\Phi_m^{-\alpha}\Phi'_m \leq 0$, если начальная функция $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет неравенству $\Phi'_m(0) > 0$. Тогда, домножив неравенство на Y'_m и проинтегрировав по времени, мы получаем

$$(Y'_m)^2 \geq \gamma(\alpha - 1)(Y_m)^2 + \frac{2\delta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 3}(Y_m)^{(3-2\alpha)/(1-\alpha)} + A_m^2, \quad t \in [0, T_m]. \quad (43)$$

Естественно, это утверждение является верным, только если при $t = 0$

$$A_m^2 = (\alpha - 1)^2\Phi_m^{-2\alpha}(\Phi'_m)^2 - \gamma(\alpha - 1)\Phi_m^{2-2\alpha} - \frac{2\delta(\alpha - 1)^2}{2\alpha - 3}\Phi_m^{3-2\alpha} \geq 0,$$

т.е. если начальная функция удовлетворяет условию

$$(\Phi'_m(0))^2 \geq \frac{\gamma}{\alpha - 1}\Phi_m^2(0) + \frac{2\delta}{2\alpha - 3}\Phi_m^3(0). \quad (44)$$

Разумеется, оптимальное $\varepsilon^* \in (0, 1/8)$ можно найти, минимизировав правую часть неравенства (44).

При выполнении (44) выражение (43) можно записать как

$$Y'_m(t) \leq -A_m \quad \text{для всех } t \in [0, T_m].$$

Отсюда следует, что мы можем повторить рассуждения для интервала большего чем $[0, T_m]$, и прийти к выводу, что $Y'_m < 0$ на всей области определения функции $\Phi_m(t)$. Интегрируя неравенство для Y'_m , мы получаем

$$Y_m(t) \leq Y_m(0) - A_m t, \quad (45)$$

что по существу и означает разрушение решения в некоторый момент T_{m0} :

$$\lim_{t \rightarrow T_{m0}} \sup \Phi_m(t) = +\infty, \quad T_{m0} \in (0, Y_m(0)A_m^{-1}). \quad (46)$$

Остается выяснить два вопроса: во-первых, из слабой сходимости $\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u}$ в $\mathbf{H}^1(\Omega)$ доказать сходимость $\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t)$; во-вторых, разобраться с глобальной разрешимостью.

Энергетическое равенство (36) можно переписать в виде

$$\Phi_m(t) = \Phi_m(0) + \int_0^t \left(\|\mathbf{u}_m\|_4^4 - \nu_0((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) - \nu_1((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m))^2 \right) ds. \quad (47)$$

Теперь можно осуществить переход $m \rightarrow \infty$, который в силу (31), а также того, что $\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u}$ сильно в $\mathbf{L}^4$ и $\mathbf{L}^2$, приведет к тому, что для почти всех $t \in (0, T)$

$$\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(0) + \int_0^t \varphi(s) (\|\mathbf{u}\|_4^4 - \nu_0((\mathbf{u}, \mathbf{u})) - \nu_1((\mathbf{u}, \mathbf{u}))^2) ds, \quad (48)$$

где функция $\varphi(s) = 1$ при $s \in [0, t]$ и $\varphi(s) = 0$ при $s \in (t, T]$. Тому же равняется и $\Phi(t)$, если в определении слабого решения (6) взять $\mathbf{v}(s) = \mathbf{u}(s)\varphi(s)$.

Таким образом, переходя к пределу по $m \rightarrow \infty$, из (45) получаем оценку снизу для $\Phi(t)$

$$\Phi(t) \geq \frac{\Phi(0)e^{\beta t/(\alpha-1)}}{(1 - \Phi(0)^{\alpha-1} A t)^{1/(\alpha-1)}}, \quad (49)$$

обеспечивающую разрушение решения за конечное время.

Теперь разберем вопрос глобальной разрешимости. В силу теорем вложения из первого энергетического равенства следует справедливость следующей цепочки:

$$\Phi' + 2\nu_0 C_2 \Phi + 4\nu_1 C_2^2 \Phi^2 \leq \Phi' + \nu_0((\mathbf{u}, \mathbf{u})) + \nu_1((\mathbf{u}, \mathbf{u}))^2 \leq 4C_1^4 \Phi^2. \quad (50)$$

Отсюда следует, что если $4\nu_1 C_2^2 \geq 4C_1^4$, то задача глобально разрешима в силу неравенства $\Phi' \leq 0$. Если же $4\nu_1 C_2^2 \leq 4C_1^4$, то задача глобально разрешима при достаточно малых начальных данных, так как при

$$\Phi(0) \leq \frac{2\nu_0 C_2}{4C_1^4 - 4\nu_1 C_2^2}$$

имеет место оценка сверху

$$\Phi(t) \leq \frac{e^{-b_1 t}}{\Phi(0)^{-1} - (1 - e^{-b_1 t})b_2/b_1} \quad (51)$$

для всех $t \in [0, +\infty)$, $b_1 = 2\nu_0 C_2$, $b_2 = 4C_1^4 - 4\nu_1 C_2^2$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [7], в которой Ладыженской разбирается вопрос глобальной разрешимости задач с нелинейной вязкостью, предложенных для описания движения вязких несжимаемых жидкостей, помимо разобранных вязкости

$$\left[\nu_0 + \nu_1 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3,3} (\partial_j u_i)^2 d\mathbf{x} \right] \Delta \mathbf{u}$$

рассматривается вязкость вида

$$\sum_{k=1}^3 \partial_k \left(\left[\nu_0 + \nu_1 \sum_{i,j=1}^{3,3} (\partial_j u_i)^2 \right] \partial_k \mathbf{u} \right),$$

для которой также может быть поставлен вопрос о разрушении. При этом для доказательства единственности и локальной разрешимости необходимо объединить результаты данной работы и работы [7]. Для доказательства разрушения следует воспользоваться энергетическими равенствами, аналогичными равенствам (17), (18):

$$\frac{d}{dt} \Phi_m + \nu_0 ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) + \nu_1 \sum_{i,j,k,l=1}^{3,3,3,3} \int_{\Omega} (\partial_j u_i)^2 (\partial_k u_l)^2 d\mathbf{x} = \|\mathbf{u}_m\|_4^4, \quad (52)$$

$$J_m = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_m\|_4^4 - \frac{\nu_0}{2} \frac{d}{dt} ((\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m)) - \frac{\nu_1}{4} \frac{d}{dt} \sum_{i,j,k,l=1}^{3,3,3,3} \int_{\Omega} (\partial_j u_i)^2 (\partial_k u_l)^2 d\mathbf{x} - ((\mathbf{u}_m, \nabla) \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m'). \quad (53)$$

В точности повторяя приведенные выше рассуждения, можно прийти к неравенству (41) и получить результат о разрушении.

В заключение хотелось бы выразить искреннюю признательность М. О. Корпусову за полезное обсуждение результатов и неоценимую помощь.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, “О разрушении решения системы уравнений Осколкова”, *Матем. сб.*, **200**:4 (2009), 83–108.
- [2] J. T. Beale, T. Kato, A. Majada, “Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equation”, *Comm. Math. Phys.*, **94**:1 (1984), 61–66.
- [3] S. Friedlander, N. Pavlović, “Blowup in a three-dimensional vector model for the Euler equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **57**:6 (2004), 705–725.
- [4] Е. В. Юшков, “О разрушении решения нелокальной системы уравнений гидродинамического типа”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:1 (2012), 201–224.

- [5] Е. В. Юшков, “О разрушении решений задач гидродинамического типа с сингулярным источником”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:8 (2012), 1523–1535.
- [6] А. П. Осколков, “О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 9, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **59**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1976, 133–177.
- [7] О. А. Ладыженская, “О новых уравнениях для описания движений вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач”, *Краевые задачи математической физики*. 5, Тр. МИАН СССР, **102**, 1967, 85–104.
- [8] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **69**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1977, 77–102.
- [9] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, *Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике. Геометрические и топологические свойства линейных пространств*, КРАСАНД, М., 2011.
- [10] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970.
- [11] F. E. Browder, “Existence and uniqueness theorems for solutions of nonlinear boundary value problems”, *Proc. Sympos. Appl. Math.*, **17**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965, 24–49.

Е. В. Юшков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: yushkov.msu@mail.ru

Поступило

30.01.2013