Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Айтач, Т. Тураджи, З. Н. Одабаш, О числе зависимости медиального графа, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 803–811

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 14:41:45

О числе зависимости срединного графа

А. Айтач, Т. Тураджи, З. Н. Одабаш

Пусть $G = (V(G), E(G))$ – простой граф. Подмножество S множества вершин $V(G)$ графа G называется доминирующим в G , если для любой вершины $v \in V(G) - S$ существует вершина $u \in S$, для которой $uv \in E(G)$. Число доминирования $\gamma(G)$ определяется как минимум мощностей доминирующих множеств в G . Существует несколько типов параметров доминирования, которые зависят от характера доминирования и природы доминирующего множества, а именно, число зависимости, число жесткости, числа сильного и слабого доминирования и числа сильной и слабой зависимости. В статье исследуются числа сильного и слабого доминирования срединного графа для данного графа; кроме того, получено несколько результатов о числе зависимости, сильной зависимости и слабой зависимости срединных графов.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10243

1. Введение. За прошедшие полвека теория графов нашла широкое применение в информатике, исследовании операций, химии, электротехнике и технике связи. Область теории графов, развитие которой особенно актуально для многочисленных и разнообразных приложений к сетям коммуникаций, разработке алгоритмов, теории вычислительной сложности и т.п., связана с изучением параметров доминирования. Существует несколько типов параметров доминирования, которые зависят от характера доминирования и природы доминирующего множества. В этой статье мы рассмотрим числа сильного и слабого доминирования, число зависимости и числа сильной и слабой зависимости в связных графах.

В графе $G = (V(G), E(G))$ подмножество $S \subseteq V(G)$ множества вершин называется *доминирующим*, если любая вершина из $V(G) - S$ смежна хотя бы с одной вершиной из S . Число доминирования $\gamma(G)$ определяется как наименьшая мощность доминирующего множества. В теории графов понятие доминирования и его многочисленные версии хорошо изучены.

Если $uv \in E(G)$, то u и v доминируют друг над другом. Понятия сильного и слабого доминирования в графах были введены Сампаткумаром и Пушпалатой [1]. Если u и v – смежные вершины графа G и $\deg(u) \geq \deg(v)$, то u *сильно доминирует* над v . Аналогично, если $\deg(v) \geq \deg(u)$, то u *слабо доминирует* над v .

Работа второго и третьего авторов выполнена при поддержке Совета по научным и техническим исследованиям Турции.

Множество $S \subseteq V(G)$ называется *сильно доминирующим* множеством (sd-множеством) для графа G , если над каждой вершиной из $V(G) - S$ сильно доминирует хотя бы одна вершина из S . Аналогично, если над каждой вершиной из $V(G) - S$ слабо доминирует хотя бы одна вершина из S , то S называется *слабо доминирующим* множеством (wd-множеством).

Иногда с понятиями сильного и слабого доминирования приходится сталкиваться в реальной жизни. Например, пусть в сети дорог, связывающих определенные объекты-вершины, степень вершины v равна числу дорог, сходящихся в этой вершине. Если $\deg(u) \geq \deg(v)$, то, естественно, движение в u более интенсивно, чем в v , и наоборот. При регулировании движения между u и v нужно отдавать предпочтение транспортным средствам, движущимся из u в v . Таким образом, u сильно доминирует над v , а v слабо доминирует над u .

Число сильного доминирования $\gamma_s(G)$ и число слабого доминирования $\gamma_w(G)$ графа G определяются по аналогии с числом доминирования $\gamma(G)$.

При исследовании числа доминирования произвольного данного графа G прежде всего возникают вопросы о возрастании и убывании числа доминирования в графе G . Один из параметров устойчивости, который называется числом зависимости графа G , позволяет ответить на вопрос об убывании, а другой параметр, число жесткости, – на вопрос о возрастании. Понятие числа зависимости ввели Бауэр, Харари, Ниеминен и Сюффель в [2]; это число исследовали многие авторы – Финк, Джекобсон, Кинч и Робертс [3], Хартнелл и Ролл [4] и другие. Число зависимости $b(G)$ непустого графа G определяется как мощность наименьшего множества ребер, удаление которого из G приводит к увеличению числа доминирования.

Число сильной зависимости $b_s(G)$ графа G равно наименьшей мощности множества ребер $E' \subseteq E(G)$, для которого $\gamma_s(G - E') > \gamma_s(G)$ [5]. Число слабой зависимости $b_w(G)$ графа G равно наименьшей мощности множества ребер $E' \subseteq E(G)$, для которого $\gamma_w(G - E') > \gamma_w(G)$; мы рассматриваем число сильной зависимости для непустого графа G [6]. В этой статье мы исследуем числа сильного и слабого доминирования срединного графа данного графа, а затем получаем несколько результатов о числе зависимости и числе сильной и слабой зависимости для срединного графа.

Всюду ниже $\alpha(G)$ и $\beta(G)$ обозначают число покрытия и число независимости графа G .

2. Основные результаты. В этом пункте мы напомним некоторые известные результаты.

ТЕОРЕМА 1 [6]. Если G – непустой граф с единственным минимальным доминирующим множеством, то $b(G) = 1$.

ТЕОРЕМА 2 [6]. Число сильной зависимости

- а) полного графа K_n , $n \geq 2$, равно $b_s(K_n) = \lceil n/2 \rceil$;
- б) цикла C_n , $n \geq 3$, равно

$$b_s(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

с) пути P_n , $n \geq 3$, равно

$$b_s(P_n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

d) колеса W_n , $n \geq 4$, равно $b_s(W_n) = 1$;

e) полного двудольного графа $K_{r,t}$, $4 \leq r \leq t$, равно

$$b_s(K_{r,t}) = \begin{cases} 2r, & \text{если } t = r + 1, \\ r & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3 [6]. Число слабой зависимости

f) полного графа K_n , $n \geq 2$, равно $b_w(K_n) = 1$;

g) цикла C_n , $n \geq 3$, равно

$$b_w(C_n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{3}, \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

h) пути P_n , $n \geq 3$, равно

$$b_w(P_n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n = 3 \text{ или } 5, \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

i) колеса W_n , $n \geq 4$, равно

$$b_w(W_n) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \equiv 2 \pmod{3}, \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

j) полного двудольного графа $K_{r,t}$, $4 \leq r \leq t$, равно $b_w(K_{r,t}) = t$.

ТЕОРЕМА 4 [6]. Если T – нетривиальное дерево, то $b_s(T) \leq 3$.

ТЕОРЕМА 5 [6]. Если любая вершина дерева T смежна с двумя или более концевыми вершинами, то $b_s(T) = 1$.

ТЕОРЕМА 6 [6]. Если T – нетривиальное дерево, то $b_w(T) \leq \Delta(T)$, где $\Delta(T)$ обозначает максимальную степень вершины в G .

3. Некоторые точные значения числа зависимости для срединных графов. В этом пункте мы даем определение срединного графа и вычисляем числа доминирования и зависимости для срединного графа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 [7]. Срединный граф $M(G)$ графа G – это граф, который получается, если на каждое ребро графа G поместить новую вершину и соединить ребрами те новые вершины, которые лежат на смежных в G ребрах.

Можно показать, что срединные графы $M(G)$ более стабильны, чем графы G . В этой статье мы изучаем число зависимости, число сильной зависимости и число слабой доминируемости для срединного графа $M(G)$ произвольного графа G .

ТЕОРЕМА 8. Пусть G – непустой граф порядка n , и пусть $M(G)$ – срединный граф графа G . Тогда

$$\gamma_w(M(G)) = n = |V(G)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая вершина, добавленная при построении графа $M(G)$, смежна с по крайней мере одной вершиной графа G , и степени добавленных вершин по меньшей мере на единицу больше степеней соответствующих вершин графа G . Для того, чтобы w -множество в графе $M(G)$ слабо доминировало над всеми вершинами графа $M(G)$, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало все вершины графа G . Такое w -множество в $M(G)$ единственно – оно состоит из всех вершин графа G . Значит, $\gamma_w(M(G)) = n = |V(G)|$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $M(P_n)$ – срединный граф пути P_n . Тогда

$$\gamma_s(M(P_n)) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граф $M(P_n)$ получается из P_n добавлением $n - 1$ вершин. Среди добавленных вершин две вершины имеют степень 3 и $n - 3$ вершины имеют степень 4. Всякое γ_s -множество, доминирующее над концевыми вершинами графа $M(P_n)$, должно содержать две новые вершины степени 3. Эти две вершины доминируют над четырьмя вершинами графа P_n . В $M(P_n)$ остается еще $n - 4$ вершины графа P_n . Одна из вершин максимальной степени в $M(P_n)$ доминирует не более чем над двумя вершинами графа P_n . Чтобы искомое γ_s -множество доминировало над $n - 4$ оставшимися вершинами, мы должны включить в него еще $(n - 4)/2$ новых вершин. На самом деле, поскольку количество вершин n может быть как четным, так и нечетным, число новых вершин, которые нужно включить в γ_s -множество, равно $\lceil (n - 4)/2 \rceil$. Окончательно получаем $\gamma_s(M(P_n)) = 2 + \lceil (n - 4)/2 \rceil = \lfloor n/2 \rfloor$, что и требовалось.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $M(C_n)$ – срединный граф цикла C_n . Тогда

$$\gamma_s(M(C_n)) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граф $M(C_n)$ содержит в общей сложности $2n$ вершин – n вершин степени 2 и n вершин степени 4. Рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 9, приводят к заключению, что множество, сильно доминирующее над всеми вершинами графа, должно включать $\lceil n/2 \rceil$ вершин. Значит, $\gamma_s(M(C_n)) = \lceil n/2 \rceil$, что и требовалось.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $M(K_{1,n})$ – срединный граф графа $K_{1,n}$. Тогда

$$\gamma_s(M(K_{1,n})) = n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы сильно доминировать над n концевыми вершинами графа $M(K_{1,n})$, сильно доминирующее множество графа $M(K_{1,n})$ должно содержать n вершин степени $n + 1$. Эти n вершин степени $n + 1$ сильно доминируют также над вершиной степени n . Таким образом, сильно доминирующее множество минимальной мощности в графе $M(K_{1,n})$ содержит n вершин, откуда

$\gamma_s(M(K_{1,n})) = n$. Более того, сильно доминирующее множество в графе $M(K_{1,n})$, которое определяет число сильного доминирования этого графа, единственно и состоит из всех вершин, добавленных к $K_{1,n}$ при построении графа $M(K_{1,n})$.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $M(P_n)$ – срединный граф пути P_n . Тогда

$$b(M(P_n)) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 2, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граф $M(P_n)$ является связным графом с $|V(M(P_n))| = 2n - 1$ вершинами и $|E(M(P_n))| = 3n - 4$ ребрами. Число доминирования графа $M(P_n)$ равно $\gamma(M(P_n)) = \lceil n/2 \rceil$ [8]. Рассмотрим отдельно случаи нечетного и четного числа вершин в P_n .

Случай 1: число n нечетно. После удаления одного ребра из графа $M(P_n)$ число $\gamma(M(P_n))$ не изменится. После удаления двух, скажем, висячих ребер из $M(P_n)$ (обозначим множество этих ребер через $S' = \{e_1, e_2\}$) остается граф $M(P_n) - S'$, имеющий три компоненты связности, две из которых – изолированные вершины. Самая большая компонента графа $M(P_n) - S'$ имеет $n - 3$ вершины степени 4. Достаточно взять $(n - 1)/2$ вершин, чтобы получить множество, доминирующее над всеми оставшимися вершинами в самой большой компоненте. Таким образом, $\gamma(M(P_n) - S') = 1 + 1 + (n - 1)/2 = (n - 3)/2$, что на единицу больше, чем $\gamma(M(P_n)) = (n + 1)/2$.

Итак, после удаления множества ребер S' из графа $M(P_n)$ мы получаем граф, состоящий из трех компонент, число доминирования которого на единицу больше числа доминирования графа $M(P_n)$. Значит, для нечетного n число зависимости графа $M(P_n)$ равно $b(M(P_n)) = 2$.

Случай 2: число n четно. В этом случае $M(P_n)$ имеет единственное минимальное доминирующее множество, которое содержит две вершины степени 2 и $(n - 4)/2$ вершин степени 4. По теореме 1 для четного n имеем $b(M(P_n)) = 1$.

ТЕОРЕМА 13. Пусть $M(C_n)$ – срединный граф цикла C_n . Тогда

$$b(M(C_n)) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 3, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного числа вершин в C_n .

Случай 1: число n четно. Поскольку $\gamma(M(C_n)) = n/2$ [8], после удаления менее двух ребер γ не меняется. После удаления двух ребер, инцидентных одной и той же вершине степени 2, эта вершина становится изолированной и γ возрастает, что и требовалось доказать.

Случай 2: число n нечетно. В этом случае имеем $\gamma(M(C_n)) = (n - 1)/2 + 1$ [8], т.е. $(n - 1)/2$ вершин недостаточно для доминирования над всеми вершинами графа $M(C_n)$, и в минимальное доминирующее множество нужно добавить еще одну вершину. Таким образом, после удаления двух ребер того же вида, что и в случае 1, из результирующего графа следует удалить еще одно ребро. Это ребро должно быть инцидентно одной из вершин степени 3 и одной из вершин графа $M(C_n)$,

добавленных к C_n при построении срединного графа. Обозначая множество удаленных вершин через S' , мы получим $\gamma(M(C_n) - S') > \gamma(M(C_n))$. Следовательно, $b(M(C_n)) = 3$.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $M(K_{1,n})$ – срединный граф графа $K_{1,n}$. Тогда

$$b(M(K_{1,n})) = n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граф $M(K_{1,n})$ связан; он имеет $|V(M(K_{1,n}))| = 2n + 1$ вершин и $|E(M(K_{1,n}))| = 2n + \binom{n}{2}$ ребер. Число доминирования графа $M(K_{1,n})$ равно $\gamma(M(K_{1,n})) = n$ [8]. После удаления из графа $M(K_{1,n})$ множества ребер S' мощности меньше n получается граф, число доминирования которого совпадает с числом доминирования графа $M(K_{1,n})$.

Если удалить, скажем, n висячих ребер графа $M(K_{1,n})$ (мы обозначим множество этих ребер через $S' = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$), то получится граф $M(K_{1,n}) - S'$, имеющий $n + 1$ компоненту, n из которых – изолированные вершины, а оставшаяся компонента представляет собой полный граф K_{n+1} . Число доминирования наибольшей компоненты K_{n+1} равно 1. Таким образом, $\gamma(M(K_{1,n}) - S') = n + 1$, что на единицу больше, чем $\gamma(M(K_{1,n})) = n$. Минимальная мощность множества ребер S' графа $M(K_{1,n})$, при удалении которых из $M(K_{1,n})$ получается граф с числом доминирования, превосходящим число доминирования графа $M(K_{1,n})$, равна n ; значит, число зависимости графа $M(K_{1,n})$ равно $b(M(K_{1,n})) = n$.

СЛЕДСТВИЕ 15. Пусть G – граф порядка n , содержащий звезду в качестве остовного подграфа. Тогда

$$b(G) = \left\lfloor \frac{m(\deg_{n-1}(v))}{2} \right\rfloor,$$

где $m(\deg_{n-1}(v))$ обозначает число вершин степени $n - 1$ в графе G .

ТЕОРЕМА 16. Пусть G – непустой граф порядка n , и пусть $M(G)$ – срединный граф графа G . Тогда

$$b_w(M(G)) = 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения срединного графа вытекает, что при удалении менее двух ребер число слабого доминирования не меняется. Пусть D – минимальное w_d -множество. Как показано при доказательстве теоремы 8, множество D состоит из вершин графа $M(G)$, имеющих минимальную степень, т.е. из вершин графа G . Чтобы увеличить число $\gamma_w(M(G))$, нужно добавить в D одну из вершин графа $M(G)$, добавленных к G при построении $M(G)$. По определению срединного графа эта вершина v_{e_k} смежна двум вершинам графа G , которые принадлежат D и доминируют над v_{e_k} . Чтобы исключить доминирование над v_{e_k} , нужно удалить два ребра, инцидентных этим двум вершинам; при этом вершину v_{e_k} следует включить в D .

ТЕОРЕМА 17. Пусть $M(P_n)$ – срединный граф пути P_n , $n > 7$. Тогда

$$b_s(M(P_n)) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 1, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению γ_s -множество содержит вершины максимальной степени. Чтобы увеличить мощность γ_s -множества, нужно включить в него одну из вершин минимальной степени. Эта вершина должна доминировать сама над собой, и чтобы ее изолировать, нужно удалить некоторые ребра.

Случай 1: число n нечетно. После удаления одного ребра число γ_s не изменится. После удаления двух ребер, инцидентных концевым вершинам, γ_s увеличится на единицу. В результате такой операции эти две вершины станут изолированными, т.е. образуют две компоненты связности. В оставшейся компоненте $\lfloor n/2 \rfloor$ вершин максимальной степени сильно доминируют над компонентой. Для оставшегося графа γ_s равно $2 + (n - 1)/2 = (n + 3)/2$, что на единицу больше, чем $\gamma_s(M(P_n))$. Это доказывает требуемое утверждение.

Случай 2: число n нечетно. Чтобы увеличить γ_s , нужно удалить ребро, инцидентное концевой вершине графа $M(P_n)$. В результате одна вершина становится изолированной и должна принадлежать любому γ_s -множеству. Что касается другой компоненты, γ_s -множество должно включать $n/2$ вершин максимальной степени. Этого количества вершин достаточно, чтобы сильно доминировать над остальными. Таким образом, γ_s -множество имеет мощность $1 + n/2$, откуда вытекает требуемое утверждение.

Значения числа зависимости $b_s(M(P_n))$ для $n < 8$ представлены в следующей таблице.

ТАБЛИЦА 1. Значения числа $b_s(M(P_n))$ для $n < 8$

n	2	3	4	5	6	7
$b_s(M(P_n))$	1	2	3	2	1	1

ТЕОРЕМА 18. Пусть $M(C_n)$ – срединный граф цикла C_n . Тогда

$$b_s(M(C_n)) = \begin{cases} 2, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 3, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного числа вершин в цепи C_n .

Случай 1: число n четно. При удалении менее двух вершин из графа $M(C_n)$ число $\gamma_s(M(C_n))$ не меняется. При удалении ребер, инцидентных одной из вершин цикла C_n , это число увеличивается на единицу. Окончательно получаем $b_s(M(C_n)) = 2$.

Случай 2: число n нечетно. При удалении тех же ребер, что и в случае 1, $\gamma_s(M(C_n))$ не меняется. Вдобавок к этим ребрам следует удалить одно из ребер графа $M(C_n)$, смежное с одним из удаленных ребер и инцидентное вершинам степеней 3 и 4. Таким образом, чтобы увеличить число $\gamma_s(M(C_n))$ на единицу, надо удалить в общей сложности три ребра. Следовательно, $b_s(M(C_n)) = 3$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 19. Пусть $M(K_{1,n})$ – срединный граф графа $K_{1,n}$. Тогда

$$b_s(M(K_{1,n})) = n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\gamma_s(K_{1,n}) = 1$, доказательство аналогично доказательству теоремы 14.

ТЕОРЕМА 20. Если G – граф порядка n , который содержит звезду в качестве индуцированного подграфа, то

$$b_s(G) = \left\lceil \frac{m(\deg_{n-1}(v))}{2} \right\rceil,$$

где $m(\deg_{n-1}(v))$ обозначает число вершин степени $n-1$ в графе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для рассматриваемого графа G имеем $\gamma_s(G) = 1$. Чтобы увеличить $\gamma_s(G)$, нужно удалить ребра, инцидентные парам вершин максимальной степени, что приводит к уменьшению на единицу степени каждой вершины максимальной степени.

ТЕОРЕМА 21. Если G – непустой связный граф порядка n , для которого $\alpha(G) = 1$, то

$$b(G) = 1, \quad b_w(G) = n - 1, \quad b_s(G) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha(G) = 1$, то без ограничения общности можно считать, что G содержит звезду в качестве остовного подграфа, $b(G) = b_s(G) = 1$ и $b_w(G) = 1$. Таким образом, имеем $b(G) = b_s(G) = 1$ и $b_w(G) = 1$.

4. Заключение. Теория графов бурно развивается благодаря взаимодействию с такими областями науки как информатика. В свою очередь, наиболее бурно развивающийся раздел теории графов – это, вероятно, доминирование. Существует несколько типов параметров доминирования, которые зависят от характера доминирования и природы доминирующего множества, а именно, числа сильного и слабого доминирования, число зависимости и числа слабой и сильной зависимости. В этой статье приведены точные значения чисел сильного и слабого доминирования для срединных графов. Кроме того, получено несколько результатов о числе зависимости и числах сильной и слабой зависимости для срединных графов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Sampathkumar, L. Pushpa Latha, “Strong weak domination and domination balance in a graph”, *Discrete Math.*, **161**:1-3 (1996), 235–242.
- [2] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen, C.L. Suffel, “Domination alteration sets in graph”, *Discrete Math.*, **47**:2-3 (1983), 153–161.
- [3] J.F. Fink, M.S. Jacobson, L.F. Kinch, J. Roberts, “The bondage number of a graph”, *Discrete Math.*, **86**:1-3 (1990), 47–57.
- [4] D.F. Hartnell, D.F. Rall, “Bounds on the bondage number of a graph”, *Discrete Math.*, **128**:1-3 (1994), 173–177.
- [5] J. Ghoshal, R. Laskar, D. Pillone, C. Wallis, “Strong bondage and strong reinforcement numbers of graphs”, *Congr. Numer.*, **108** (1995), 33–42.

- [6] K. Ebadi, L. Pushpalatha, “Smarandachely bondage number of a graph”, *Int. J. Math. Comb.*, **4** (2010), 09–19.
- [7] M. Nihei, “Algebraic connectivity of the line graph, the middle graph and the total graph of a regular graph”, *Ars Combin.*, **69** (2003), 215–221.
- [8] A. Mamut, E. Vumar, “A note on the integrity of middle graphs”, *Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory*, Lecture Notes in Comput. Sci., **4381**, Springer-Verlag, Berlin, 2007, 130–134.

А. Айтач

Ege University, Турция

E-mail: aysun.aytac@ege.edu.tr

Поступило

01.11.2011

Т. Тураджи

Ege University, Турция

E-mail: tufanturaci@gmail.com

З. Н. Одабаш

Izmir University of Economics, Турция

E-mail: zeynep.odabas@ieu.edu.tr