Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. М. Митрякова, О. В. Починка, Реализация каскадов с конечным числом модулей топологической сопряженности на поверхностях, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 902–919

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10244>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:29:19

Реализация каскадов с конечным числом модулей топологической сопряженности на поверхностях

Т. М. Митрякова, О. В. Починка

В настоящей работе разработан метод построения каскадов на поверхностях, позволяющий моделировать негрубые дискретные динамические системы с конечным числом орбит гетероклинического касания и заданными модулями топологической сопряженности.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10244

Введение и формулировка результатов

Тематика настоящей работы восходит к классическим работам Андронова, Понтрягина, Леонтович, Майера [1], [2], в которых получение полных топологических инвариантов для потоков в ограниченной части плоскости основывалось на выделении тех траекторий, взаимное расположение которых однозначно задает качественную структуру разбиения фазового пространства динамической системы на траектории. Обобщением этих результатов явилась топологическая классификация грубых потоков на поверхностях, полученная в 1971 г. бразильским математиком Пейшото [3]. Он доказал, что полным топологическим инвариантом для такого потока является класс изоморфности его графа. Более того, он выделил множество допустимых графов и по каждому из них построил структурно устойчивый поток на поверхности. Таким образом, задача топологической эквивалентности грубых потоков на поверхностях решена исчерпывающим образом.

К решению дискретного аналога этой проблемы вновь причастны нижегородские математики. Безденежных, Гринес [4], [5] в 1985 г. доказали, что необходимым и достаточным условием топологической сопряженности градиентно-подобных (без гетероклинических пересечений) диффеоморфизмов на поверхностях является изоморфность их графов, аналогичных графу Пейшото. Ими же установлено, что каждый градиентно-подобный диффеоморфизм топологически сопряжен диффеоморфизму, являющемуся суперпозицией периодического преобразования и сдвига на

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м), Правительства Российской Федерации (грант № 11.G34.31.0039) и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

единицу времени градиентно-подобного (без замкнутых орбит) потока. Более того, в работе [6] они выделили периодические диффеоморфизмы на модульной поверхности с допустимым набором периодических данных и построили по нему множество стандартных потоков, сдвиг на единицу времени которых в композиции с исходным периодическим преобразованием дает градиентно-подобный диффеоморфизм.

В 1993 г. Гринес [7] доказал, что для диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом гетероклинических орбит, инварианта, подобного графу Пейшото и оснащенного информацией о гетероклинических пересечениях, хватает для описания необходимых и достаточных условий топологической сопряженности. Вопросы реализации диффеоморфизмов данного класса им не рассматривались.

Хорошо известно, что нарушение условия трансверсальности пересечения инвариантных многообразий седловых точек каскада приводит к негрубости системы. Палис [8] в 1978 г. впервые обнаружил континуум топологически несопряженных диффеоморфизмов в любой C^1 -окрестности диффеоморфизма поверхности, допускающего гетероклинические касания. Если в некоторой окрестности диффеоморфизма множество классов эквивалентности возможно описать с помощью конечного числа параметров, то говорят, что *диффеоморфизм имеет конечное число модулей топологической сопряженности*¹. Работа Палиса индуцировала ряд работ (см., например, работы [9]–[11]), в которых изучалась структура окрестности такого диффеоморфизма. Первый шаг в топологической классификации “далеких” каскадов с модулями был сделан авторами настоящей статьи. Именно, в работах [12], [13] выделен класс Ψ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов $f \in \text{Diff}^r(M^2)$, $r \geq 5$, ориентируемой поверхности M^2 , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек, и собственные значения λ_p, μ_p любой седловой точки $p \in \Omega_f$ удовлетворяют условиям

$$0 < \lambda_p < 1 < \mu_p \quad \text{и} \quad \lambda_p^n \cdot \mu_p^m \neq 1, \quad n, m \in \{1, 2\};$$

- 2) если $(W_p^s \setminus p) \cap (W_q^u \setminus q) \neq \emptyset$ для седловых точек $p, q \in \Omega_f$, то $p \neq q$ и для любого седла $r \in \Omega_f$ (включая p и q)

$$(W_r^s \setminus r) \cap (W_p^u \setminus p) = \emptyset \quad \text{и} \quad (W_q^s \setminus q) \cap (W_r^u \setminus r) = \emptyset;$$

- 3) блуждающее множество f содержит конечное число орбит гетероклинического касания и не существует седловых точек $p, q \in \Omega_f$ таких, что все четыре компоненты связности множеств $W_p^s \setminus p$ и $W_q^u \setminus q$ содержат точки одностороннего гетероклинического касания инвариантных многообразий W_p^s и W_q^u .

Заметим, что в случае отсутствия гетероклинических касаний, диффеоморфизм $f \in \Psi$ является диффеоморфизмом Морса–Смейла с конечным числом гетероклинических орбит и в силу работы [7] класс изоморфности его графа является полным топологическим инвариантом. Однако проблема выделения допустимых графов и их реализация является открытой. В работах [12], [13] используется принципиально новый подход к топологической классификации каскадов класса Ψ , позволивший в настоящей статье решить проблему реализации таких каскадов. Ключом к топологической классификации диффеоморфизмов класса Ψ является построение схемы

¹Термин “модуль топологической сопряженности” был предложен в работах Л. П. Шильникова и С. В. Гонченко и соответствует термину “moduli of stability”, который употребляется в западной литературе.

диффеоморфизма, которая представляет собой набор геометрических (связанных с топологией пересечения инвариантных многообразий седловых точек) и аналитических (связанных с орбитами одностороннего гетероклинического касания) объектов. Опишем конструкцию схемы.

Пусть Δ_f^u (Δ_f^s) – подмножество множества Ω_f , состоящее из источников (стоков), и $\Delta_f = \Delta_f^u \cup \Delta_f^s$. Пусть Σ_f – подмножество множества Ω_f , состоящее из всех седловых точек; Σ_f^s – подмножество множества Σ_f , состоящее из седловых точек, неустойчивые многообразия которых не содержат гетероклинические точки, и $\Sigma_f^u = \Sigma_f \setminus \Sigma_f^s$. Положим

$$A_f = W_{\Delta_f^u \cup \Sigma_f^s}^u, \quad R_f = W_{\Sigma_f^u \cup \Delta_f^s}^s, \quad \mathcal{M}_f = M^2 \setminus (A_f \cup R_f).$$

Тогда множества A_f и R_f являются аттрактором и репеллером² соответственно, а $\mathcal{M}_f = W_{A_f}^s \setminus A_f = W_{R_f}^u \setminus R_f$. При этом пространство орбит $\hat{T}_f$ действия диффеоморфизма f на многообразии $\mathcal{M}_f$ состоит из конечного числа копий двумерного тора, а естественная проекция $p_f: \mathcal{M}_f \rightarrow \hat{T}_f$ является накрытием, индуцирующим отображение η_f , составленное из эпиморфизмов в группу $\mathbb{Z}$, действующих на фундаментальных группах торов множества $\hat{T}_f$.

Для $\delta \in \{u, s\}$ и любой седловой точки $\sigma^\delta \in \Sigma_f^\delta$ положим $\hat{\gamma}_{\sigma^\delta} = p_f(W_{\sigma^\delta}^\delta \setminus \sigma^\delta)$. По построению $\hat{\gamma}_{\sigma^\delta}$ является парой гладких непересекающихся узлов (диффеоморфных образов окружности) на многообразии $\hat{T}_f$ таких, что $\eta_f([\hat{c}]) = 1$ для каждого узла $\hat{c}$ из множества $\hat{T}_f$. Положим

$$\hat{\Gamma}_f^\delta = \bigcup_{\sigma^\delta \in \Sigma_f^\delta} \hat{\gamma}_{\sigma^\delta}, \quad \hat{\Gamma}_f = \hat{\Gamma}_f^s \cup \hat{\Gamma}_f^u.$$

Из условий, наложенных на рассматриваемый класс Ψ , следует, что каждое из множеств $\hat{\Gamma}_f^u$, $\hat{\Gamma}_f^s$ является объединением непересекающихся пар узлов, а пересечение $\hat{\Gamma}_f^u \cap \hat{\Gamma}_f^s$ состоит из конечного числа точек трансверсального пересечения и касания.

Введенные объекты $\hat{T}_f$, $\hat{\Gamma}_f$ и η_f являются геометрической составляющей схемы диффеоморфизма f . Аналитическая составляющая схемы связана с точками одностороннего касания множеств $\hat{\Gamma}_f^u$ и $\hat{\Gamma}_f^s$. Пусть $\hat{\mathcal{A}}_f$ – набор точек одностороннего³ касания множеств $\hat{\Gamma}_f^s$ и $\hat{\Gamma}_f^u$ и для любой точки $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}_f$ $\hat{\gamma}_a^s \subset \hat{\Gamma}_f^s$ и $\hat{\gamma}_a^u \subset \hat{\Gamma}_f^u$, – пары узлов, содержащие точку $\hat{a}$. Тогда с точкой $\hat{a}$ связан набор действительных параметров $C_{\hat{a}} = (\Theta_{\hat{a}}, \tau_{\hat{a}}^1, \tau_{\hat{a}}^2, \dots, \tau_{\hat{a}}^{m_{\hat{a}}})$, где $m_{\hat{a}} + 1$ – число точек одностороннего касания $\hat{\gamma}_a^s$ и $\hat{\gamma}_a^u$, $\Theta_{\hat{a}} < 0$ (если $m_{\hat{a}} = 0$, то $C_{\hat{a}} = \Theta_{\hat{a}}$). Положим $\hat{C}_f = \{C_{\hat{a}}, \hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}_f\}$.

Набор $S_f = (\hat{T}_f, \eta_f, \hat{\Gamma}_f, \hat{C}_f)$ называется *схемой диффеоморфизма* $f \in \Psi$. На рис. 1 изображена конструкция схемы диффеоморфизма $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ из класса Ψ . Схемы $S_f = (\hat{T}_f, \eta_f, \hat{\Gamma}_f, \hat{C}_f)$ и $S_{f'} = (\hat{T}_{f'}, \eta_{f'}, \hat{\Gamma}_{f'}, \hat{C}_{f'})$ диффеоморфизмов $f, f' \in \Psi$ соответственно называются *эквивалентными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\hat{\varphi}: \hat{T}_f \rightarrow \hat{T}_{f'}$ такой, что

²Пусть f – гомеоморфизм компактного метрического пространства X . Замкнутое f -инвариантное множество $A \subset X$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \text{int } U_A$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Репеллер определяется как аттрактор для f^{-1} .

³Точка касания x двух гладких одномерных подмногообразий N_1, N_2 многообразия M^2 называется *точкой одностороннего касания*, если существует окрестность V_x точки x такая, что N_2 пересекается не более, чем с одной компонентой связности множества $V_x \setminus N_1$.

Рис. 1. Построение схемы диффеоморфизма $f \in \Psi$

- 1) $\eta_{f'} \hat{\varphi}_* = \eta_f$;
- 2) $\hat{\varphi}(\hat{\Gamma}_f^\delta) = \hat{\Gamma}_{f'}^\delta$, причем $\hat{\varphi}(\hat{\gamma}_{\sigma^\delta}) = \hat{\gamma}_{\sigma'^\delta}$, где $\sigma^\delta \in \Sigma_f^\delta$ и $\sigma'^\delta \in \Sigma_{f'}^\delta$;
- 3) $C_{\hat{a}} = C_{\hat{\varphi}(\hat{a})}$ для $C_{\hat{a}} \in \hat{C}_f$.

Пусть Ψ^* – множество диффеоморфизмов $f \in \Psi$ таких, что параметр $\Theta_{\hat{a}}$ является иррациональным числом для любого $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}_f$. В работах [12], [13] получены следующие результаты:

- если схемы диффеоморфизмов $f, f' \in \Psi$ эквивалентны, то диффеоморфизмы топологически сопряжены;
- диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi^*$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.

В настоящей статье на основе свойств схемы S_f вводится понятие абстрактной схемы S (см. определение 1), состоящей из конечного числа двумерных торов $\hat{T}$ с наборами из m^s, m^u пар узлов $\hat{\Gamma}^s, \hat{\Gamma}^u$ соответственно точки касания которых оснащены определенными параметрами. В п. 1 описывается операция перестройки многообразия $\hat{T}$ вдоль множества $\hat{\Gamma}^s(\hat{\Gamma}^u)$, в результате которой вновь получается конечное число $k^s(k^u)$ двумерных торов. Основной результат данной работы состоит в доказательстве следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для каждой абстрактной схемы S существует диффеоморфизм $f_S \in \Psi$, заданный на поверхности рода $g = (2 + m^s + m^u - k^u - k^s)/2$, схема которого эквивалентна S .*

1. Структура схемы диффеоморфизма $f \in \Psi$

В этом разделе изучаются свойства схемы диффеоморфизма, необходимые для определения абстрактной схемы. Пусть $f \in \Psi$. Аналитические инварианты, входящие в схему S_f диффеоморфизма f , связаны с точками одностороннего касания, принадлежащими множеству $\hat{\Gamma}_f^u \cap \hat{\Gamma}_f^s$, и опираются на существование линеаризующей окрестности седловой точки.

Пусть $0 < \lambda < 1$, $\mu > 1$ и $f_{\mu,\lambda}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – линейный диффеоморфизм, заданный формулой $f_{\mu,\lambda}(x, y) = (\mu x, \lambda y)$, и

$$U_{\mu,\lambda} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x||y|^{-\log_\lambda \mu} < 1\}.$$

Положим

$$\begin{aligned} U_{\mu,\lambda}^s &= U_{\mu,\lambda} \setminus OX, & U_{\mu,\lambda}^u &= U_{\mu,\lambda} \setminus OY, \\ U_{\mu,\lambda}^+ &= \{(x, y) \in U_{\mu,\lambda} : y \geq 0\}, & U_{\mu,\lambda}^- &= \{(x, y) \in U_{\mu,\lambda} : y \leq 0\}. \end{aligned}$$

f -Инвариантная окрестность U_σ точки $\sigma \in \Sigma_f$ называется C^2 -линеаризирующей, если существует C^2 -диффеоморфизм $\psi_\sigma: U_\sigma \rightarrow U_{\mu_\sigma, \lambda_\sigma}$, сопрягающий диффеоморфизм $f|_{U_\sigma}$ с диффеоморфизмом $f_{\mu_\sigma, \lambda_\sigma}|_{U_{\mu_\sigma, \lambda_\sigma}}$.

Пусть $\mathcal{A}_f$ – множество точек одностороннего гетероклинического касания диффеоморфизма f и для любой точки $a \in \mathcal{A}_f$ $\sigma_a^s \in \Sigma_f^s$, $\sigma_a^u \in \Sigma_f^u$ – седловые точки такие, что $a \in W_{\sigma_a^s}^s \cap W_{\sigma_a^u}^u$. Из условия 3) определения класса Ψ следует, что все точки одностороннего касания из множества $W_{\sigma_a^s}^s \cap W_{\sigma_a^u}^u$ принадлежат не более чем трем компонентам связности множества $(W_{\sigma_a^s}^s \setminus \sigma_a^s) \cup (W_{\sigma_a^u}^u \setminus \sigma_a^u)$. Если в точности одна сепаратриса множества $(W_{\sigma_a^s}^s \setminus \sigma_a^s) \cup (W_{\sigma_a^u}^u \setminus \sigma_a^u)$ не содержит точек одностороннего касания, то ℓ_a – парная к ней сепаратриса (принадлежащая тому же инвариантному многообразию). Если в множестве $(W_{\sigma_a^s}^s \setminus \sigma_a^s) \cup (W_{\sigma_a^u}^u \setminus \sigma_a^u)$ две сепаратрисы не содержат точек одностороннего касания, то ℓ_a – устойчивая сепаратриса, участвующая в гетероклиническом касании. Пусть I_a – промежуток $[a, f(a)) \subset \ell_a$, $\mu_a = \mu_{\sigma_a^s}$, $\lambda_a = \lambda_{\sigma_a^u}$ и

$$\Theta_a = \frac{\ln \mu_a}{\ln \lambda_a}.$$

Тогда для любой точки z , принадлежащей компоненте связности U_a множества $U_{\sigma_a^s} \cap U_{\sigma_a^u}$, содержащей точку a , определены два набора координат

$$z^s = \psi_{\sigma_a^s}(z) = (z_x^s, z_y^s) \quad \text{и} \quad z^u = \psi_{\sigma_a^u}(z) = (z_x^u, z_y^u).$$

Пусть $g_a(x, y) = (\xi_a(x, y), \eta_a(x, y))$ – координатный вид отображения

$$g_a = \psi_{\sigma_a^u} \circ (\psi_{\sigma_a^s}|_{U_a})^{-1}: \psi_{\sigma_a^s}(U_a) \rightarrow \psi_{\sigma_a^u}(U_a)$$

и

$$\beta_a = \frac{\partial \eta_a}{\partial x}(a^s) = \frac{\partial \eta_a}{\partial x}((0, a_y^s)).$$

Пусть

$$H_a = (\text{int } I_a) \cap \mathcal{A}_f \cap W_{\sigma_a^s}^s \cap W_{\sigma_a^u}^u$$

и, если $H_a \neq \emptyset$, то точки множества H_a пронумерованы согласно ориентации на I_a от точки a к точке $f(a)$: $a_1, \dots, a_{m_a}$. Положим

$$\tau_a^i = \left| \frac{\beta_{a_i}}{\beta_a} \right|^{1/(\ln \mu_a)} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, m_a,$$

и для любой точки $a \in \mathcal{A}_f$ положим

$$C_a = \begin{cases} (\Theta_a, \tau_a^1, \tau_a^2, \dots, \tau_a^{m_a}), & \text{если } H_a \neq \emptyset, \\ \Theta_a, & \text{если } H_a = \emptyset. \end{cases}$$

Для точки $\hat{a} = p_f(a)$ положим $\Theta_{\hat{a}} = \Theta_a$, $m_{\hat{a}} = m_a$, $\tau_{\hat{a}}^i = \tau_a^i$, $i = 1, \dots, m_{\hat{a}}$, и $C_{\hat{a}} = C_a$. Согласно предложению 2.6 работы [12] набор параметров $C_{\hat{a}}$ не зависит от выбора точки a из $p_f^{-1}(\hat{a})$.

ЛЕММА 1. Пусть S_f – схема диффеоморфизма $f \in \Psi$. Тогда

- 1) пересечение $\hat{\gamma}_{\sigma^u} \cap \hat{\Gamma}_f^s$ непусто для каждого $\hat{\gamma}_{\sigma^u} \in \hat{\Gamma}_f^u$;
- 2) если множество $\hat{\gamma}_{\sigma_a^u} \cap \hat{\gamma}_{\sigma_a^s}$ содержит точки одностороннего касания, то все они принадлежат не более чем трем узлам из множества $\hat{\gamma}_{\sigma_a^u} \cup \hat{\gamma}_{\sigma_a^s}$;
- 3) если $m_{\hat{a}} > 0$ для точки $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}$, то для каждой точки $\hat{a}_k = p_f(a_k)$, $k = 1, \dots, m_{\hat{a}}$, имеют место равенства

$$\tau_{\hat{a}_k}^i = \frac{\tau_{\hat{a}_{k-1}}^{i+1}}{\tau_{\hat{a}_{k-1}}^1}, \quad i = 1, \dots, m_{\hat{a}} - 1, \quad \text{и} \quad \tau_{\hat{a}_k}^{m_{\hat{a}}} = e^{1/\Theta_{\hat{a}} - 1} \cdot \frac{1}{\tau_{\hat{a}_{k-1}}^1};$$

- 4) множество, полученное из многообразия $\hat{T}_f$ отождествлением узлов в каждой паре $\hat{\gamma}_{\sigma^s}$ множества $\hat{\Gamma}_f$, является связным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из определения множеств Σ_f^s и Σ_f^u следует, что любая пара узлов из множества $\hat{\Gamma}_f^u$ имеет непустое пересечение (трансверсальное или нетрансверсальное) хотя бы с одним узлом из множества $\hat{\Gamma}_f^s$. Следовательно, имеет место свойство 1).

2) Поскольку не существует седловых точек $p, q \in \Omega_f$ таких, что все четыре компоненты связности множеств $W_p^s \setminus p$ и $W_q^u \setminus q$ содержат точки одностороннего гетероклинического касания многообразий W_p^s и W_q^u , то, если множество $W_{\sigma_a^s}^s \cap W_{\sigma_a^u}^u$ непусто и содержит точки одностороннего касания, то точки одностороннего касания множества

$$\hat{\gamma}_{\sigma_a^u} \cap \hat{\gamma}_{\sigma_a^s}, \quad \text{где} \quad \hat{\gamma}_{\sigma_a^s} = p_f(W_{\sigma_a^s}^s \setminus \sigma_a^s), \quad \hat{\gamma}_{\sigma_a^u} = p_f(W_{\sigma_a^u}^u \setminus \sigma_a^u),$$

принадлежат не более чем трем узлам из множества $\hat{\gamma}_{\sigma_a^u} \cup \hat{\gamma}_{\sigma_a^s}$. Следовательно, имеет место свойство 2).

3) Для каждой точки $a_k = p_f^{-1}(\hat{a}_k) \in H_a$, $k = 1, \dots, m_a$, параметры $\tau_{a_k}^i$, $i = 1, \dots, m_a - 1$, удовлетворяют следующим равенствам:

$$\tau_{a_k}^i = \left| \frac{\beta_{a_{k+i}}}{\beta_{a_k}} \right|^{1/\ln \mu_a} = \left| \frac{\beta_{a_{k+i}}}{\beta_{a_{k-1}}} \cdot \frac{\beta_{a_{k-1}}}{\beta_{a_k}} \right|^{1/\ln \mu_a} = \frac{\tau_{a_{k-1}}^{i+1}}{\tau_{a_{k-1}}^1}.$$

Параметр

$$\tau_{a_k}^{m_a} = \left| \frac{\beta_{f(a_{k-1})}}{\beta_{a_k}} \right|^{1/\ln \mu_a}$$

и согласно пункту 2) предложения 2.4 работы [12]

$$\begin{aligned} \left| \frac{\beta_{f(a_{k-1})}}{\beta_{a_k}} \right|^{1/\ln \mu_a} &= \left| \frac{\lambda_a \mu_a^{-1} \beta_{a_{k-1}}}{\beta_{a_k}} \right|^{1/\ln \mu_a} = (\lambda_a \mu_a^{-1})^{1/\ln \mu_a} \left| \frac{\beta_{a_{k-1}}}{\beta_{a_k}} \right|^{1/\ln \mu_a} \\ &= (\lambda_a \mu_a^{-1})^{1/\ln \mu_a} \frac{1}{\tau_{a_{k-1}}^1} = e^{(1/\ln \mu_a) \ln(\lambda_a / \mu_a)} \frac{1}{\tau_{a_{k-1}}^1} \\ &= e^{(1/\ln \mu_a)(\ln \lambda_a - \ln \mu_a)} \frac{1}{\tau_{a_{k-1}}^1} = e^{(\ln \lambda_a / \ln \mu_a) - 1} \frac{1}{\tau_{a_{k-1}}^1} = e^{1/\Theta_a - 1} \frac{1}{\tau_{a_{k-1}}^1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tau_{a_k}^{m_a} = e^{1/\Theta_a - 1} \cdot \frac{1}{\tau_{a_{k-1}}^1}.$$

Таким образом, имеет место свойство 3) утверждения леммы.

4) Заметим, что

$$\bigcup_{i=1}^{k_f} p_f^{-1}(\hat{T}_i) = \mathcal{M}_f, \quad \text{где } \mathcal{M}_f = M^2 \setminus (W_{\Sigma_f^u}^u \cup W_{\Sigma_f^s}^s \cup \Delta_f).$$

Добавляя к множеству $\mathcal{M}_f$ сепаратрисы $W_{\Sigma_f^s}^u \setminus \Sigma_f^s$ и $W_{\Sigma_f^u}^s \setminus \Sigma_f^u$, получим связное многообразие, так как оно будет отличаться от M^2 лишь конечным числом точек. Тогда множество, полученное из многообразия $\hat{T}_f$ отождествлением узлов в каждой паре $\hat{\gamma}_{\sigma^\delta}$ множества $\hat{\Gamma}_f$, является связным.

2. Абстрактная схема

Пусть $b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – линейный диффеоморфизм, заданный формулой $b(x, y) = (x/2, y/2)$. Тогда пространство орбит $\mathbb{T} = (\mathbb{R}^2 \setminus O)_b$ действия диффеоморфизма b на $\mathbb{R}^2 \setminus O$ является стандартным двумерным тором и естественная проекция $p_{\mathbb{T}}: \mathbb{R}^2 \setminus O \rightarrow \mathbb{T}$ является накрытием. Обозначим через $\eta_{\mathbb{T}}: \pi_1(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{Z}$ эпиморфизм, соответствующий накрытию $p_{\mathbb{T}}$. Везде в дальнейшем будем рассматривать такие ориентированные узлы $\hat{\ell}$ на $\mathbb{T}$, для которых $\eta_{\mathbb{T}}([\hat{\ell}]) = 1$.

Пусть $\hat{T} = \bigcup_{i=1}^k \mathbb{T}_i^2$ – объединение $k \in \mathbb{N}$ непересекающихся копий стандартного двумерного тора и η – отображение, составленное из эпиморфизмов $\eta_{\mathbb{T}_1}, \dots, \eta_{\mathbb{T}_k}$. Для $\delta \in \{u, s\}$ и $m^\delta \geq 0$ обозначим через $\hat{\Gamma}^\delta$ подмножество многообразия $\hat{T}$, которое для $m^\delta = 0$ является пустым и для $m^\delta > 0$ состоит из попарно непересекающихся подмножеств $\hat{\gamma}_1^\delta, \hat{\gamma}_2^\delta, \dots, \hat{\gamma}_{m^\delta}^\delta$, каждое из которых состоит из пары непересекающихся гладких узлов, которые мы будем называть *парными*. Положим $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}^u \cup \hat{\Gamma}^s$. Везде в дальнейшем будем рассматривать множества $\hat{\Gamma}^u, \hat{\Gamma}^s$ такие, что пересечение $\hat{\Gamma}^u \cap \hat{\Gamma}^s$ состоит из конечного числа точек, каждая из которых является либо точкой трансверсального пересечения, либо точкой касания. Пусть $\hat{\mathcal{A}}$ – множество точек одностороннего касания, принадлежащих $\hat{\Gamma}^u \cap \hat{\Gamma}^s$, и для каждой точки $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}$ обозначим через $\hat{\gamma}_a^u$ и $\hat{\gamma}_a^s$ пары узлов таких, что $\hat{a} \in \hat{\gamma}_a^u \cap \hat{\gamma}_a^s$. Везде в дальнейшем будем рассматривать пары узлов $\hat{\gamma}_a^u, \hat{\gamma}_a^s$, среди которых существует хотя бы один узел, не содержащий точек одностороннего касания множеств $\hat{\gamma}_a^u, \hat{\gamma}_a^s$. Если такой узел в точности один, то обозначим через $\hat{\ell}_a$ парный к нему узел. Если таких узлов два, то через $\hat{\ell}_a$ обозначим узел пары $\hat{\gamma}_a^s$, участвующий в гетероклиническом касании. Каждой точке $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}$ поставим в соответствие набор параметров $C_{\hat{a}}$ по следующему правилу:

- 1) если множество $\hat{\gamma}_a^u \cap \hat{\gamma}_a^s$ содержит в точности одну точку $\hat{a}$ одностороннего касания, то $C_{\hat{a}} = \Theta_{\hat{a}}$, где $\Theta_{\hat{a}}$ – действительное отрицательное число;
- 2) если множество $\hat{\gamma}_a^u \cap \hat{\gamma}_a^s$ содержит более одной точки одностороннего касания $\hat{a}, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{m_{\hat{a}}}$, которые пронумерованы согласно ориентации на узле $\hat{\ell}_{\hat{a}}$, то $C_{\hat{a}} = (\Theta_{\hat{a}}, \tau_{\hat{a}}^1, \tau_{\hat{a}}^2, \dots, \tau_{\hat{a}}^{m_{\hat{a}}})$, где $\Theta_{\hat{a}} < 0$, а $\tau_{\hat{a}}^i > 0$ для всех $i = 1, \dots, m_{\hat{a}}$.

Положим

$$\widehat{C} = \bigcup_{\widehat{a} \in \widehat{\mathcal{A}}} C_{\widehat{a}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Набор $S = (\widehat{T}, \eta, \widehat{\Gamma}, \widehat{C})$ назовем *абстрактной схемой*, если выполняются следующие условия:

- 1) пересечение $\widehat{\gamma}_i^u \cap \widehat{\Gamma}^s$ непусто для каждого $\widehat{\gamma}_i^u \in \widehat{\Gamma}^u$;
- 2) если множество $\widehat{\gamma}_a^u \cap \widehat{\gamma}_a^s$ непусто, то для любой точки $\widehat{a} \in \widehat{\mathcal{A}}$ существует узел, принадлежащий хотя бы одному из множеств $\widehat{\gamma}_a^u, \widehat{\gamma}_a^s$, не содержащий точек одностороннего касания из множества $\widehat{\gamma}_a^u \cap \widehat{\gamma}_a^s$;
- 3) если множество $\widehat{\gamma}_a^u \cap \widehat{\gamma}_a^s$ содержит более одной точки одностороннего касания, то $\Theta_{\widehat{a}} = \Theta_{\widehat{a}_k}$ и

$$\tau_{\widehat{a}_k}^i = \frac{\tau_{\widehat{a}_{k-1}}^{i+1}}{\tau_{\widehat{a}_{k-1}}^1}, \quad i \in \{1, \dots, m_{\widehat{a}} - 1\}, \quad \tau_{\widehat{a}_k}^{m_{\widehat{a}}} = e^{1/\Theta_{\widehat{a}} - 1} \frac{1}{\tau_{\widehat{a}_{k-1}}^1};$$

- 4) множество, полученное из многообразия $\widehat{T}$ отождествлением узлов в каждой паре $\widehat{\gamma}_r^\delta$ множества $\widehat{\Gamma}$, является связным.

Из леммы 1 следует, что схема диффеоморфизма $f \in \Psi$ является абстрактной. Естественным образом понятие эквивалентности схем распространяется на абстрактные схемы.

3. Реализация диффеоморфизмов класса Ψ

1. Технические леммы. В этом пункте приведены некоторые технические леммы, которые будут использованы при реализации абстрактной схемы диффеоморфизмом из класса Ψ .

Пусть $\widehat{P}$ – гладкое ориентируемое замкнутое двумерное многообразие, состоящее из конечного числа двумерных торов $\widehat{P}_1, \dots, \widehat{P}_r$ таких, что для любого $j = 1, \dots, r$ фундаментальная группа многообразия $\widehat{P}_j$ допускает эпиморфизм $\eta_{\widehat{P}_j} : \pi_1(\widehat{P}_j) \rightarrow \mathbb{Z}$. Обозначим через η отображение, составленное из эпиморфизмов $\eta_{\widehat{P}_1}, \dots, \eta_{\widehat{P}_r}$. Далее пара $(\widehat{P}, \eta)$ будет обозначать многообразие $\widehat{P}$, оснащенное отображением η . Пусть $\widehat{\gamma}$ – пара гладких замкнутых кривых на $\widehat{P}$ таких, что $\eta_{\widehat{P}}([\widehat{\ell}]) = 1$ для каждого узла $\widehat{\ell}$ пары $\widehat{\gamma}$. Обозначим через $N(\widehat{\gamma}) \subset \widehat{P}$ трубчатую окрестность узлов $\widehat{\gamma}$, которую будем отождествлять с множеством $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$. Определим диффеоморфизм $\mu : \partial N(\widehat{\gamma}) \rightarrow \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0$ формулой $\mu(x, y, z) = (z, y, x)$. Положим

$$\widehat{P}_{\widehat{\gamma}} = (\widehat{P} \setminus \text{int } N(\widehat{\gamma})) \bigcup_{\mu} (\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1)$$

и будем говорить, что пространство $\widehat{P}_{\widehat{\gamma}}$ получено *перестройкой многообразия $\widehat{P}$ вдоль $\widehat{\gamma}$* . Введенная операция естественным образом обобщается до перестройки многообразия $\widehat{P}$ вдоль множества $\widehat{B}$, состоящего из конечного числа попарно непесекающихся пар замкнутых кривых. Будем обозначать через $\widehat{P}_{\widehat{B}}$ пространство, полученное перестройкой многообразия $\widehat{P}$ вдоль $\widehat{B}$.

На рис. 2 изображена перестройка двумерного тора вдоль пары узлов. Результатом такой перестройки является многообразие $\widehat{P}_{\widehat{\gamma}}$, гомеоморфное паре двумерных торов.

Рис. 2. Перестройка двумерного тора вдоль пары узлов

ЛЕММА 2. Для любого множества $\hat{B}$, состоящего из конечного числа попарно непересекающихся пар замкнутых кривых многообразия $(\hat{P}, \eta)$, пространство $\hat{P}_{\hat{B}}$ является дизъюнктивным объединением конечного числа двумерных торов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{P}$ – гладкое ориентируемое замкнутое двумерное многообразие, состоящее из конечного числа двумерных торов $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_r$, фундаментальная группа каждого из которых допускает эпиморфизм $\eta_{\mathbb{T}}: \pi_1(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{Z}$ в группу $\mathbb{Z}$. Для любого $j = 1, \dots, r$ обозначим через $\eta_{\hat{P}_j}: \pi_1(\hat{P}_j) \rightarrow \mathbb{Z}$ эпиморфизм фундаментальной группы многообразия $\hat{P}_j$ и через η – отображение, составленное из эпиморфизмов $\eta_{\hat{P}_1}, \dots, \eta_{\hat{P}_r}$. Пусть $\hat{B}$ – множество, состоящее из конечного числа попарно непересекающихся пар замкнутых кривых $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_m$ таких, что $\eta[\hat{c}] = 1$ для каждого узла $\hat{c}$ пары $\hat{\gamma}_i$, $i = 1, \dots, m$. Обозначим через $N(\hat{B}) \subset \hat{P}$ – объединение трубчатых окрестностей узлов пар $\hat{\gamma}_m$, каждую из которых отождествляем с множеством $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$. Обозначим через $\mu_i: \partial N(\hat{\gamma}_i) \rightarrow \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0$, $i = 1, \dots, m$, диффеоморфизм, заданный формулой $\mu_i(x, y, z) = (z, y, x)$, и через μ – диффеоморфизм, совпадающий с μ_i на $N(\hat{\gamma}_i)$ для $i = 1, \dots, m$. Каждое множество $\hat{\gamma}_r$ состоит из двух непересекающихся узлов. Следовательно, каждая компонента связности множества $\hat{P}_{\hat{B}} = \hat{P} \setminus \text{int } N(\hat{B})$ является цилиндром (см., например, [14]).

По построению гомеоморфизм μ отождествляет граничные окружности множества $\hat{P}_{\hat{B}}$ с граничными окружностями двумерных колец. Таким образом, каждая компонента связности множества $\hat{P}_{\hat{B}}$ есть тор.

ЛЕММА 3. Пусть A, B – гладкие ориентируемые 2-многообразия без края и A', B' – их открытые 2-подмногообразия такие, что существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $g: A' \rightarrow B'$. Тогда топологическое пространство $C = A \cup_g B$ и естественная проекция $p_C: \bar{C} \rightarrow C$, где $\bar{C} = A \cup B$, удовлетворяют следующим условиям:

- i) C является сепарабельным топологическим пространством;
- ii) отображения $p_A = p_C|_A$, $p_B = p_C|_B$ являются топологическими вложениями;
- iii) дифференциальные структуры многообразий A, B индуцируют посредством отображений p_A, p_B структуру гладкого ориентируемого 2-многообразия без края на пространстве C .

Если при этом многообразие A является связным и подмногообразие B' имеет непустое пересечение с каждой компонентой связности многообразия B , то многообразие C является связным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Поскольку любое многообразие по определению обладает счетной базой топологии, то многообразия A, B являются сепарабельными, т.е. имеют счетные всюду плотные подмножества N_A, N_B соответственно. Так как по определению естественная проекция p_C является непрерывным отображением, то множество $N_C = p_C(N_A) \cup p_C(N_B)$ является счетным всюду плотным подмножеством пространства C . Откуда следует, что пространство C является сепарабельным. Покажем, что оно линейно связно и, следовательно, связно в случае, когда многообразие A является связным и подмногообразие B' имеет непустое пересечение с каждой компонентой связности многообразия B .

Пусть $x, y \in C$. Рассмотрим следующие возможности:

- a) $x, y \in p_C(A)$;
- b) $x \in p_C(A), y \in p_C(B)$;
- c) $x, y \in p_C(B)$.

В случае a) путь, соединяющий точки x и y в C , очевидно существует.

В случае b) положим $\tilde{x} = p_C^{-1}(x) \cap A$ и $\tilde{y} = p_C^{-1}(y) \cap B$. В силу условия 2) существует точка $z \in B'$, лежащая в той же компоненте связности множества B , что и точка $\tilde{y}$. Следовательно, существует путь c_1 , соединяющий точки z и $\tilde{y}$ в B' . Положим $w = g^{-1}(z)$. В силу условия 1) существует путь c_2 , соединяющий точки $\tilde{x}$ и w в A . Тогда путь $c = p_C(c_2) * p_C(c_1)$ является путем, соединяющим точки x и y в C .

В случае c) положим $\tilde{x} = p_C^{-1}(x) \cap B$ и $\tilde{y} = p_C^{-1}(y) \cap B$. В силу условия 2) существуют точки $z_x \in B', z_y \in B'$, лежащие в той же компоненте связности множества B , что и точки $\tilde{x}, \tilde{y}$ соответственно. Следовательно, существуют пути c_x, c_y , соединяющие точки $\tilde{x}$ и z_x, z_y и $\tilde{y}$ в B соответственно. Положим $w_x = g^{-1}(z_x), w_y = g^{-1}(z_y)$. В силу условия 1) существует путь c_z , соединяющий точки w_x и w_y в A . Тогда путь $c = p_C(c_x) * p_C(c_z) * p_C(c_y)$ является путем, соединяющим точки x и y в C .

ii) По построению отображение p_A является взаимно однозначным и непрерывным. Покажем, что оно открыто. Пусть $U \subset A$ – открытое подмножество многообразия A . Тогда $p_C^{-1}(p_A(U)) = U \cup g(U \cap A')$. Поскольку $U \cap A'$ – открытое подмножество A' и g – диффеоморфизм, то $g(U \cap A')$ – открытое подмножество B' . Так как B' – открытое подмножество B , то $g(U \cap A')$ – также открытое подмножество B . Таким образом, $p_C^{-1}(p_A(U))$ – открытое подмножество $A \cup B$, откуда следует, что $p_A(U)$ – открытое подмножество C . Аналогичным образом устанавливается, что отображение p_B является топологическим вложением.

iii) Пусть $\Psi = \{(U_i, \psi_i), i \in I\}, \Phi = \{(V_j, \phi_j), j \in J\}$ – гладкие структуры многообразий A и B соответственно. Тогда

$$\mathcal{W} = \{p_A(U_i), i \in I; p_B(V_j), j \in J\}$$

есть открытое покрытие пространства C и

$$\chi = \{(p_A(U_i), \psi_i p_A^{-1}), i \in I; (p_B(V_j), \phi_j p_B^{-1}), j \in J\}$$

есть структура топологического 2-многообразия без края на множестве C . Покажем, что структура χ является гладкой и ориентируемой.

Для этого надо проверить гладкую ориентируемую согласованность любой пары карт атласа χ . Она очевидно выполняется для любой пары карт вида

$$(p_A(U_{i_1}), \psi_{i_1} p_A^{-1}), (p_A(U_{i_2}), \psi_{i_2} p_A^{-1}),$$

так же, как и для любой пары карт вида

$$(p_B(V_{j_1}), \phi_{j_1} p_B^{-1}), \quad (p_B(V_{j_2}), \phi_{j_2} p_B^{-1}).$$

Проверим согласованность пары карт вида

$$(p_A(U_i), \psi_i p_A^{-1}), \quad (p_B(V_j), \phi_j p_B^{-1})$$

в предположении, что $W = p_A(U_i) \cap p_B(V_j) \neq \emptyset$. Положим $W_A = p_A^{-1}(W)$, $W_B = p_B^{-1}(W)$. Тогда отображение перехода $h = \phi_j p_B^{-1} p_A \psi_i^{-1}: \psi_i(W_A) \rightarrow \phi_j(W_B)$ является гладким и сохраняющим ориентацию, поскольку таковым является отображение $g = p_B^{-1} p_A|_{A'}$.

ЛЕММА 4 [12; предложение 2.2]. Пусть σ – гиперболическая седловая неподвижная точка диффеоморфизма $f: M^2 \rightarrow M^2$, $N_\sigma \subset W_\sigma^s$ – компактная окрестность точки σ и $r \in N_\sigma$. Тогда для любой последовательности точек $\{r_n\} \subset (M^2 \setminus N_\sigma)$, сходящейся к точке r , существует подпоследовательность $\{r_{n_j}\}$, последовательность целых чисел $k_j \rightarrow +\infty$ и точка $q \in (W_\sigma^u \setminus \sigma)$ такие, что последовательность точек $\{f^{k_j}(r_{n_j})\}$ сходится к точке q .

2. Построение диффеоморфизма по абстрактной схеме. В этом пункте по абстрактной схеме S мы построим диффеоморфизм $f_S \in \Psi$ такой, что схемы S_{f_S} и S эквивалентны. Конструкция делается по шагам. Для доказательства хаусдорфовости многообразий, построенных на каждом шаге, а также для доказательства компактности итогового многообразия мы отправляем читателя к работам [15] и [16], где аналогичные конструкции использовались для реализации диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразиях. На рис. 3 приведенные ниже шаги построения диффеоморфизма по абстрактной схеме проиллюстрированы на примере реализации диффеоморфизма по схеме, состоящей из двух торов с одной парой устойчивых и одной парой неустойчивых узлов.

Шаг 1. Каждому узлу $\hat{\gamma}_i^s \in \hat{\Gamma}^s$ поставим в соответствие действительное число $\mu_{\hat{\gamma}_i^s} > 1$, каждому узлу $\hat{\gamma}_j^u \in \hat{\Gamma}^u$ поставим в соответствие действительное число $0 < \lambda_{\hat{\gamma}_j^u} < 1$ по следующему правилу: $\mu_{\hat{\gamma}_i^s} = 2$, если $\hat{\gamma}_i^s \cap \hat{\mathcal{A}} = \emptyset$; $\lambda_{\hat{\gamma}_j^u} = 1/2$, если $\hat{\gamma}_j^u \cap \hat{\mathcal{A}} = \emptyset$; и для любой пары касающихся узлов $\hat{\gamma}_a^u, \hat{\gamma}_a^s$ выполняется равенство $\Theta_a = (\ln \mu_{\hat{\gamma}_a^s}) / (\ln \lambda_{\hat{\gamma}_a^u})$.

Пусть $\delta \in \{u, s\}$. Для множества узлов $\hat{\Gamma}^\delta = \hat{\gamma}_1^\delta \cup \dots \cup \hat{\gamma}_{m^\delta}^\delta$ обозначим через $V(\hat{\Gamma}^\delta) = V(\hat{\gamma}_1^\delta) \cup \dots \cup V(\hat{\gamma}_{m^\delta}^\delta)$ множество их попарно непересекающихся гладких трубчатых окрестностей. Обозначим через T многообразие, составленное из k копий многообразия $\mathbb{R}^2 \setminus O$, через $f_b: T \rightarrow T$ – диффеоморфизм, совпадающий с диффеоморфизмом b на каждой копии плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus O$, и через $p: T \rightarrow \hat{T}$ – накрытие, совпадающее с $p_{\mathbb{T}}$ на каждой копии $\mathbb{R}^2 \setminus O$. Положим

$$\gamma_j^u = p^{-1}(\hat{\gamma}_j^u), \quad j \in \{1, \dots, m^u\}, \quad \gamma_i^s = p^{-1}(\hat{\gamma}_i^s), \quad i \in \{1, \dots, m^s\},$$

$$\Gamma^\delta = p^{-1}(\hat{\Gamma}^\delta), \quad V(\Gamma^\delta) = p^{-1}(V(\hat{\Gamma}^\delta)).$$

Для каждой пары узлов, имеющих точки одностороннего касания, выберем одну точку одностороннего касания и обозначим множество всех таких точек через $\hat{A}$.

Для каждой точки $\hat{a} \in \hat{A}$ выберем одну точку a из множества $p^{-1}(\hat{a})$, положим $\Theta_a = \Theta_{\hat{a}}$, $\tau_a = 1$ и обозначим множество всех таких точек через A .

Пусть $\hat{a} \in \hat{A}$ и $\hat{\ell}_{\hat{a}}$ – узел, введенный перед определением 1. Положим

$$a = p^{-1}(\hat{a}) \cap A, \quad \ell_a = p^{-1}(\hat{\ell}_{\hat{a}}), \quad \mathcal{I}_a = [a, f(a)) \subset \ell_a.$$

Обозначим через $A_{\mathcal{I}_a}$ множество точек одностороннего касания, принадлежащих промежутку $\mathcal{I}_a$, пронумеруем их следующим образом: $a_i = p^{-1}(\hat{a}_i) \cap \mathcal{I}_a$, $i = 1, \dots, m_a$, и положим

$$\tau_{a_1} = \tau_{\hat{a}}^1, \quad \dots, \quad \tau_{a_{m_a}} = \tau_{\hat{a}}^{m_a}.$$

Положим $\mathbf{A} = \bigcup_{a \in A} A_{\mathcal{I}_a}$.

Положим $V_i^s = V(\gamma_i^s)$, $U_i = U_{\mu_{\gamma_i^s}, 1/2}$, $U_i^s = U_i \cap U_{\mu_{\gamma_i^s}, 1/2}^s$. Пространство орбит действия диффеоморфизма $f_{\mu_{\gamma_i^s}, 1/2}$ на $U_{\mu_{\gamma_i^s}, 1/2}^s$ диффеоморфно пространству орбит $V(\gamma_i^s)$ действия диффеоморфизма f_b на $V(\gamma_i^s)$ для любого $i \in \{1, \dots, m^s\}$. Следовательно, существует диффеоморфизм $\nu_i^s: V_i^s \rightarrow U_i^s$, сопрягающий ограничение диффеоморфизма $f_{\mu_{\gamma_i^s}, 1/2}$ на U_i^s с ограничением диффеоморфизма f_b на V_i^s и такой, что $\nu_i^s(\gamma_i^s) = Oy \setminus O$.

Положим

$$U^s = \prod_{i=1}^{m^s} U_i^s, \quad G_s = \prod_{i=1}^{m^s} U_i, \quad U_+^s = \prod_{i=1}^{m^s} U_{\mu_{\gamma_i^s}, 1/2}^+,$$

$$U_-^s = \prod_{i=1}^{m^s} U_{\mu_{\gamma_i^s}, 1/2}^-, \quad V^s = \prod_{i=1}^{m^s} V_i^s.$$

Обозначим через $F_s: G_s \rightarrow G_s$ диффеоморфизм, совпадающий с $f_{\mu_{\gamma_i^s}, 1/2}$ на U_i для каждого $i = 1, \dots, m^s$. Обозначим через $\nu^s: V^s \rightarrow U^s$ диффеоморфизм, составленный из $\nu_1^s, \dots, \nu_{m^s}^s$. Обозначим через $\mathbf{A}^+$ ($\mathbf{A}^-$) подмножество множества $\mathbf{A}$, состоящее из точек α таких, что $\nu^s(\Gamma^u \cap U_\alpha) \subset U_+^s$ ($\nu^s(\Gamma^u \cap U_\alpha) \subset U_-^s$). Не уменьшая общности, можно считать, что в некоторой окрестности U_α каждой точки $\alpha \in \mathbf{A} \cap \Gamma^s$ образ $\nu^s(\Gamma^u \cap U_\alpha)$ есть кривая, уравнение которой $x = \pm(y - \check{\alpha})^2$, где $(0, \check{\alpha}) = \nu^s(\alpha)$ и $+$ ($-$) берется в случае, когда $\alpha \in \mathbf{A}^+$ ($\alpha \in \mathbf{A}^-$).

Положим $\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s} = T \cup G_s$. На множестве $\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}$ введем минимальное отношение эквивалентности $\sim$, удовлетворяющее следующему условию: $x \sim y$, если $y = \nu^s(x)$. Обозначим через $\mathcal{N}_{\Sigma^s}$ множество классов эквивалентности и через $\mathcal{P}_{\Sigma^s}: \tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s} \rightarrow \mathcal{N}_{\Sigma^s}$ – естественную проекцию, ставящую в соответствие точке $x \in \tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}$ ее класс эквивалентности. Положим

$$\mathcal{P}_T = \mathcal{P}_{\Sigma^s}|_T \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_{G_s} = \mathcal{P}_{\Sigma^s}|_{G_s}.$$

Согласно лемме 3 отображения $\mathcal{P}_T$, $\mathcal{P}_{G_s}$ являются топологическими вложениями, индуцирующими структуру гладкого ориентируемого 2-многообразия без края на пространстве $\mathcal{N}_{\Sigma^s} = T \cup_{\nu^s} G_s$. Аналогично работам [15] и [16] доказывается, что топологическое пространство $\mathcal{N}_{\Sigma^s}$ является хаусдорфовым. Таким образом, $\mathcal{N}_{\Sigma^s}$ – гладкое ориентируемое 2-многообразие без края (возможно несвязное), а отображения

$$f_T = \mathcal{P}_T(f_b(\mathcal{P}_T^{-1}(x))): \mathcal{P}_T(T) \rightarrow \mathcal{P}_T(T),$$

$$f_{G_s} = \mathcal{P}_{G_s}(F_s(\mathcal{P}_{G_s}^{-1}(x))): \mathcal{P}_{G_s}(G_s) \rightarrow \mathcal{P}_{G_s}(G_s)$$

являются диффеоморфизмами. Поскольку $\mathcal{P}_T(V^s) = \mathcal{P}_{G_s}(U^s)$, то покажем, что

$$f_T|_{\mathcal{P}_T(V^s)} = f_{G_s}|_{\mathcal{P}_{G_s}(U^s)}.$$

Действительно, если $x \in \mathcal{P}_T(V^s)$, то из определения склеивающего отображения ν^s следует, что $\mathcal{P}_T^{-1}(x) = (\nu^s)^{-1}(\mathcal{P}_{G_s}^{-1}(x))$ и $\mathcal{P}_T(y) = \mathcal{P}_{G_s}(\nu^s(y))$ для любой точки $y \in V^s$. Тогда

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \mathcal{P}_T(f_b(\mathcal{P}_T^{-1}(x))) = \mathcal{P}_{G_s}(\nu^s((f_b((\nu^s)^{-1}(\mathcal{P}_{G_s}^{-1}(x)))))) \\ &= \mathcal{P}_{G_s}(F_s(\mathcal{P}_{G_s}^{-1}(x))) = f_{G_s}(x). \end{aligned}$$

Положим

$$U_i^1 = \left\{ (x, y) \in U_i : |x||y|^{-\log_{1/2} \mu_{\hat{\gamma}_i^s}} \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Положим

$$G_s^1 = \prod_{i=1}^{m^s} U_i^1 \quad \text{и} \quad K_s = \mathcal{P}_{G_s}(G_s^1).$$

По построению множество ∂K_s замкнуто в пространстве $\mathcal{N}_{\Sigma^s}$ и $f_T|_{\partial K_s} = f_{G_s}|_{\partial K_s}$. Тогда в силу леммы о склейке (см. [17; гл. 12, лемма 12.2]) отображение $f_{\Sigma^s} : \mathcal{N}_{\Sigma^s} \rightarrow \mathcal{N}_{\Sigma^s}$, определенное формулой

$$f_{\Sigma^s}(x) = \begin{cases} f_T(x), & x \in (\mathcal{P}_T(T) \setminus \text{int } K_s), \\ f_{G_s}(x), & x \in K_s, \end{cases}$$

является диффеоморфизмом многообразия $\mathcal{N}_{\Sigma^s}$. По построению неблуждающее множество диффеоморфизма f_{Σ^s} состоит из m^s седловых неподвижных точек.

Шаг 2. Положим

$$\xi(x, y) = \beta(y - d) + b, \quad \eta^\pm(x, y) = \pm\beta(y - d)^2 - \beta x,$$

где $d, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\beta > 0$. Рассмотрим диффеоморфизм $g_{d,\beta,b}^\pm : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданный формулой

$$g_{d,\beta,b}^\pm(x, y) = (\xi(x, y), \eta^\pm(x, y)).$$

Заметим, что $g_{d,\beta,b}^\pm(0, d) = (b, 0)$, образом параболы $x = \pm(y - d)^2$ является ось $\eta = 0$, образом оси $x = 0$ является парабола $\eta = \pm(1/\beta)(\xi - b)^2$.

Положим

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_j^u &= \mathcal{P}_{\Sigma^s}(\gamma_j^u), \quad V(\bar{\gamma}_j^u) = \mathcal{P}_{\Sigma^s}(V(\gamma_j^u)), \quad j \in \{1, \dots, m^u\}, \\ \bar{\mathbf{A}}^+ &= \mathcal{P}_{\Sigma^s}(\mathbf{A}^+), \quad \bar{\mathbf{A}}^- = \mathcal{P}_{\Sigma^s}(\mathbf{A}^-), \quad \bar{\mathbf{A}} = \mathcal{P}_{\Sigma^s}(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

и $\tau_{\bar{\alpha}} = \tau_\alpha$ для любой точки $\bar{\alpha} \in \bar{\mathbf{A}}$ такой, что $\bar{\alpha} = \mathcal{P}_{\Sigma^s}(\alpha)$. Положим

$$V_j^u = V(\bar{\gamma}_j^u), \quad U_j = U_{2, \lambda_{\bar{\gamma}_j^u}}, \quad U_j^u = U_j \cap U_{2, \lambda_{\bar{\gamma}_j^u}}^u.$$

По построению пространство орбит действия диффеоморфизма f_{Σ^s} на множестве $V(\bar{\gamma}_j^u)$ для любого $j \in \{1, \dots, m^u\}$ диффеоморфно $V(\bar{\gamma}_j^u)$ и, следовательно, диффеоморфно пространству орбит действия диффеоморфизма $f_{2, \lambda_{\bar{\gamma}_j^u}}$ на множестве $U_{2, \lambda_{\bar{\gamma}_j^u}}^u$.

Рис. 3. Реализация каскада по абстрактной схеме

Тогда существует диффеоморфизм $\nu_j^u: V_j^u \rightarrow U_j^u$, сопрягающий ограничение диффеоморфизма $f_{2, \lambda_{\tilde{\gamma}_j^u}}$ на U_j^u с ограничением диффеоморфизма f_{Σ^s} на V_j^u и такой, что $\nu_j^u(\tilde{\gamma}_j^u) = O_x \setminus O$.

Положим

$$U^u = \prod_{i=1}^{m^u} U_j^u, \quad G_u = \prod_{i=1}^{m^u} U_j, \quad V^u = \prod_{i=1}^{m^u} V_j^u$$

и обозначим через $F_u: G_u \rightarrow G_u$ диффеоморфизм, совпадающий с $f_{2, \lambda_{\tilde{\gamma}_j^u}}$ на U_j для каждого $j = 1, \dots, m^u$. Обозначим через $\nu^u: V^u \rightarrow U^u$ диффеоморфизм, составленный из $\nu_1^u, \dots, \nu_{m^u}^u$. Не уменьшая общности, будем считать, что в некоторой окрестности точки $\bar{\alpha} \in \bar{\mathbf{A}}^\pm$ диффеоморфизм ν^u совпадает с диффеоморфизмом $g_{\bar{\alpha}, \tau_{\bar{\alpha}}, b_{\bar{\alpha}}}^\pm \circ \nu^s \circ \mathcal{P}_T^{-1}$, где $\nu^u(\bar{\alpha}) = (b_{\bar{\alpha}}, 0)$.

Положим $\tilde{\mathcal{N}}_\Sigma = \tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s} \cup G_u$. На множестве $\tilde{\mathcal{N}}_\Sigma$ введем минимальное отношение эквивалентности $\sim$, удовлетворяющее следующему условию: $x \sim y$, если $y = \nu^u(x)$. Обозначим через $\mathcal{N}_\Sigma$ множество классов эквивалентности и через $\mathcal{P}_\Sigma: \tilde{\mathcal{N}}_\Sigma \rightarrow \mathcal{N}_\Sigma$ — естественную проекцию, ставящую в соответствие точке $x \in \tilde{\mathcal{N}}_\Sigma$ ее класс эквивалентности.

Положим

$$\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}} = \mathcal{P}_\Sigma|_{\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}} \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_{G_u} = \mathcal{P}_\Sigma|_{G_u}.$$

Согласно лемме 3 отображения $\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}}, \mathcal{P}_{G_u}$ являются топологическими вложениями, индуцирующими структуру гладкого ориентируемого 2-многообразия без края на пространстве $\mathcal{N}_{\Sigma} = \tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s} \cup_{\nu^u} G_u$. Аналогично работам [15] и [16] доказывается, что топологическое пространство $\mathcal{N}_{\Sigma}$ является связным и хаусдорфовым. Таким образом, $\mathcal{N}_{\Sigma}$ – гладкое ориентируемое связное 2-многообразие без края, а отображения

$$f_{\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}} = \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}}(f_{\Sigma^s}(\mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}}^{-1}(x))) : \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}}(\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}) \rightarrow \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}}(\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}),$$

и

$$f_{G_u} = \mathcal{P}_{G_u}(F_u(\mathcal{P}_{G_u}^{-1}(x))) : \mathcal{P}_{G_u}(G_u) \rightarrow \mathcal{P}_{G_u}(G_u)$$

являются диффеоморфизмами.

Аналогично шагу 1 показывается, что отображение $f_{\Sigma} : \mathcal{N}_{\Sigma} \rightarrow \mathcal{N}_{\Sigma}$, определенное формулой

$$f_{\Sigma}(x) = \begin{cases} f_{\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}}(x), & x \in \mathcal{P}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}}(\tilde{\mathcal{N}}_{\Sigma^s}), \\ f_{G_u}(x), & x \in \mathcal{P}_{G_u}(G_u), \end{cases}$$

является диффеоморфизмом многообразия $\mathcal{N}_{\Sigma}$.

По построению диффеоморфизм f_{Σ} имеет $m = m^u + m^s$ седловых неподвижных точек, множество которых обозначим через $\Sigma_{f_{\Sigma}}$, и блуждающее множество диффеоморфизма f_{Σ} содержит конечное число орбит трансверсального гетероклинического пересечения и конечное число орбит одностороннего гетероклинического касания.

Шаг 3. Положим $N^u = \mathcal{N}_{\Sigma} \setminus W_{\Sigma_{f_{\Sigma}}}^u$. Обозначим через $\hat{T}^u$ пространство орбит действия f_{Σ} на N^u и через $p_u : N^u \rightarrow \hat{T}^u$ – накрытие. По построению пространство $\hat{T}^u$ гомеоморфно пространству, полученному перестройкой многообразия $\hat{T}$ вдоль множества $\hat{\Gamma}^u$. В силу леммы 2 пространство $\hat{T}^u$ является дизъюнктивным объединением k^u копий торов. Обозначим через T^u многообразие, составленное из k^u копий многообразия $\mathbb{R}^2$, через T^u – многообразие, составленное из k^u копий многообразия $\mathbb{R}^2 \setminus O$, через $F_{b^{-1}} : T^u \rightarrow T^u$ – диффеоморфизм, совпадающий с диффеоморфизмом b^{-1} на каждой копии $\mathbb{R}^2 \setminus O$. Тогда существует диффеоморфизм $\chi_u : T^u \rightarrow N^u$, сопрягающий ограничение диффеоморфизма $F_{b^{-1}}$ на T^u с ограничением диффеоморфизма f_{Σ} на N^u .

Положим $\tilde{\mathcal{N}}^u = \mathcal{N}_{\Sigma} \cup T^u$. На множестве $\tilde{\mathcal{N}}^u$ введем минимальное отношение эквивалентности $\sim$, удовлетворяющее следующему условию: $x \sim y$, если $y = \chi_u(x)$. Обозначим через $\mathcal{N}^u$ множество классов эквивалентности и через $\mathcal{P}^u : \tilde{\mathcal{N}}^u \rightarrow \mathcal{N}^u$ – естественную проекцию, ставящую в соответствие точке $x \in \tilde{\mathcal{N}}^u$ ее класс эквивалентности.

Положим

$$\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{\Sigma}} = \mathcal{P}^u|_{\mathcal{N}_{\Sigma}} \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_{T^u} = \mathcal{P}^u|_{T^u}.$$

Согласно лемме 3 отображения $\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{\Sigma}}, \mathcal{P}_{T^u}$ являются топологическими вложениями, индуцирующими структуру гладкого ориентируемого связного 2-многообразия без края на пространстве $\mathcal{N}^u$. Аналогично работам [15] и [16] доказывается, что топологическое пространство $\mathcal{N}^u = \mathcal{N}_{\Sigma} \cup_{\chi_u} T^u$ является хаусдорфовым. Таким образом, $\mathcal{N}^u$ – гладкое ориентируемое связное 2-многообразие без края, а отображения

$$f_{\mathcal{N}_{\Sigma}} = \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{\Sigma}}(f_{\Sigma}((\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{\Sigma}})^{-1}(x))) : \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{\Sigma}}(\mathcal{N}_{\Sigma}) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{\Sigma}}(\mathcal{N}_{\Sigma}),$$

$$f_{T^u} = \mathcal{P}_{T^u}(F_{b^{-1}}((\mathcal{P}_{T^u})^{-1}(x))) : \mathcal{P}_{T^u}(T^u) \rightarrow \mathcal{P}_{T^u}(T^u)$$

являются диффеоморфизмами. Аналогично шагам 1 и 2 доказывается, что

$$f_{\mathcal{N}_\Sigma}|_{\mathcal{P}_{\mathcal{N}_\Sigma}(T^u)} = f_{T^u}|_{\mathcal{P}_{T^u}(N^u)}.$$

На каждой копии $\mathbb{R}^2$ выберем диск $d^u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ и обозначим через D^u многообразие, составленное из k^u копий диска d^u . Положим $\mathcal{D}^u = \mathcal{P}_{T^u}(D^u)$. По построению множество $\partial\mathcal{D}^u$ замкнуто в пространстве $\mathcal{N}^u$ и $f_{\mathcal{N}_\Sigma}|_{\partial\mathcal{D}^u} = f_{T^u}|_{\partial\mathcal{D}^u}$. Тогда в силу леммы о склейке (см. [17; гл. 12, лемма 12.2]) отображение $f^u: \mathcal{N}^u \rightarrow \mathcal{N}^u$, определенное формулой

$$f^u(x) = \begin{cases} f_{\mathcal{N}_\Sigma}(x), & x \in (\mathcal{P}_{\mathcal{N}_\Sigma}(\mathcal{N}_\Sigma) \setminus \text{int } \mathcal{D}^u), \\ f_{T^u}(x), & x \in \mathcal{D}^u, \end{cases}$$

является диффеоморфизмом многообразия $\mathcal{N}^u$.

По построению диффеоморфизм f^u имеет m седловых неподвижных точек, множество которых обозначим через Σ_{f^u} , k^u источников точек, множество которых обозначим через $\Delta_{f^u}^u$, и блуждающее множество диффеоморфизма f^u содержит конечное число орбит трансверсального гетероклинического пересечения и конечное число орбит одностороннего гетероклинического касания.

Шаг 4. Положим

$$N^s = \mathcal{N}^u \setminus (W_{\Sigma_{f^u}}^s \cup \Delta_{f^u}^u).$$

Обозначим через $\widehat{T}^s$ пространство орбит действия f^u на N^s и через $p_s: N^s \rightarrow \widehat{T}^s$ – накрытие. По построению пространство $\widehat{T}^s$ гомеоморфно пространству, полученному перестройкой многообразия $\widehat{T}$ вдоль множества $\widehat{\Gamma}^s$. В силу леммы 2 пространство $\widehat{T}^s$ является дизъюнктивным объединением k^s копий торов. Обозначим через T^s многообразие, составленное из k^s копий многообразия $\mathbb{R}^2$, через T^s – многообразие, составленное из k^s копий многообразия $\mathbb{R}^2 \setminus O$, и через $F_b: T^s \rightarrow T^s$ – диффеоморфизм, совпадающий с диффеоморфизмом b на каждой копии $\mathbb{R}^2 \setminus O$. Тогда существует диффеоморфизм $\chi_s: T^s \rightarrow N^s$, сопрягающий ограничение диффеоморфизма F_b на T^s с ограничением диффеоморфизма f^u на N^s .

Положим

$$\widetilde{\mathcal{N}}^s = \mathcal{N}^u \cup T^s.$$

На множестве $\widetilde{\mathcal{N}}^s$ введем минимальное отношение эквивалентности $\sim$, удовлетворяющее следующему условию: $x \sim y$, если $y = \chi_s(x)$. Обозначим через M множество классов эквивалентности и через $\mathcal{P}_M: \widetilde{\mathcal{N}}^s \rightarrow M$ естественную проекцию, ставящую в соответствие точке $x \in \widetilde{\mathcal{N}}^s$ ее класс эквивалентности.

Положим

$$\mathcal{P}_{\mathcal{N}^u} = \mathcal{P}_M|_{\mathcal{N}^u} \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_{T^s} = \mathcal{P}_M|_{T^s}.$$

Согласно лемме 3 отображения $\mathcal{P}_{\mathcal{N}^u}$, $\mathcal{P}_{T^s}$ являются топологическими вложениями, индуцирующими структуру гладкого ориентируемого связного 2-многообразия без края на пространстве M . Аналогично работам [15] и [16] доказывается, что топологическое пространство $M = \mathcal{N}^u \cup_{\chi_s} T^s$ является хаусдорфовым и компактным. Таким образом, M – гладкое связное ориентируемое 2-многообразие без края, а отображения

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{N}^u} &= \mathcal{P}_{\mathcal{N}^u}(f^u(\mathcal{P}_{\mathcal{N}^u}^{-1}(x))): \mathcal{P}_{\mathcal{N}^u}(\mathcal{N}^u) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{N}^u}(\mathcal{N}^u), \\ f_{T^s} &= \mathcal{P}_{T^s}(F_b(\mathcal{P}_{T^s}^{-1}(x))): \mathcal{P}_{T^s}(T^s) \rightarrow \mathcal{P}_{T^s}(T^s) \end{aligned}$$

являются диффеоморфизмами. Аналогично шагу 1 доказывается, что

$$f_{\mathcal{N}^u}|_{\mathcal{P}_{\mathcal{N}^u}(T^s)} = f_{T^s}|_{\mathcal{P}_{T^s}(N^s)}.$$

Аналогично шагу 3 доказывается, что отображение $f_S: M \rightarrow M$, определенное формулой

$$f_S(x) = \begin{cases} f_{\mathcal{N}^u}(x), & x \in \mathcal{P}_{\mathcal{N}^u}(\mathcal{N}^u), \\ f_{T^s}(x), & x \in \mathcal{P}_{T^s}(T^s), \end{cases}$$

является диффеоморфизмом многообразия M .

По построению неблуждающее множество Ω_{f_S} состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек: m седловых точек, k^u источников и k^s стоков. Положим $k = k^u + k^s$. Обозначим через $\Sigma_{f_S} \subset \Omega_{f_S}$ множество седловых точек диффеоморфизма f_S , через $\Delta_{f_S}^u (\Delta_{f_S}^s) \subset \Omega_{f_S}$ — множество источников (стоков) диффеоморфизма f_S .

Таким образом, диффеоморфизм f_S принадлежит классу Ψ и непосредственно из построения следует, что его схема S_{f_S} эквивалентна исходной схеме S .

Шаг 5. Покажем, что для диффеоморфизма $f_S: M \rightarrow M$ из класса Ψ , имеющего схему S_{f_S} , род g многообразия M вычисляется по формуле

$$g = \frac{2 + m - k}{2}.$$

Действительно, используя технику работы Пикстона [18], на многообразии M можно построить функцию Морса (C^2 -гладкую функцию с невырожденными критическими точками) $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что множество ее критических точек совпадает с множеством Ω_{f_S} и индекс q (число отрицательных собственных значений Гессiana $((\partial^2 \varphi)/(\partial x_i \partial x_j))|_p$) критической точки p равен $\dim W_p^u$. Согласно теории Морса

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^2 (-1)^q C_q,$$

где C_q — число критических точек функции φ с индексом q . Таким образом,

$$\chi(M) = \sum_{p \in \Omega_{f_S}} (-1)^{\dim W_p^u}.$$

Таким образом, эйлерова характеристика многообразия M равна разности между числом узлов (стоков и источников) и седел диффеоморфизма f_S . Откуда $2 - 2g = k - m$.

Авторы выражают благодарность В. З. Гринесу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *ДАН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250.
- [2] Е. А. Леонтович, А. Г. Майер, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *ДАН СССР*, **103**:4 (1955), 557–560.

- [3] M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical Systems*, Academic Press, New York, 1973, 389–419.
- [4] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 1”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, Изд-во Горьковск. ун-та., Горький, 1984, 22–38.
- [5] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 2”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*, Изд-во Горьковск. ун-та., Горький, 1987, 24–31.
- [6] А. Н. Безденежных, В. З. Гринес, “Реализация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *Дифференциальные и интегральные уравнения*, Изд-во Горьковск. ун-та., Горький, 1985, 33–37.
- [7] В. З. Гринес, “Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях”, *Матем. заметки*, **54:3** (1993), 3–17.
- [8] J. Palis, “A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability”, *Dynamical Systems*, Vol. III, Astérisque, **51**, Soc. Math. France, Paris, 1978, 335–346.
- [9] W. de Melo, “Moduli of stability of two-dimensional diffeomorphisms”, *Topology*, **19:1** (1980), 9–21.
- [10] W. de Melo, J. Palis, “Moduli of stability for diffeomorphisms”, *Global Theory of Dynamical Systems*, Lecture Notes in Math., **819**, Springer-Verlag, Berlin, 1980, 318–339.
- [11] W. de Melo, S. J. van Strien, “Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **7:3** (1987), 415–462.
- [12] Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 198–219.
- [13] Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “К вопросу о классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности”, *Нелинейная динам.*, **6:1** (2010), 91–105.
- [14] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Math. Lecture Ser., **7**, Publish or Perish, Houston, TX, 1990.
- [15] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43:2** (2004), 369–391.
- [16] Х. Бонатти, В. З. Гринес, О. В. Починка, “Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **250**, Наука, М., 2005, 5–53.
- [17] Ч. Косневски, *Начальный курс алгебраической топологии*, Современная математика. Вводные курсы, Мир, М., 1983.
- [18] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16:2** (1977), 167–172.

Т. М. Митрякова

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

E-mail: tatiana.mitryakova@yandex.ru

Поступило

20.04.2012

Исправленный вариант

31.05.2012

О. В. Починка

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

E-mail: olga-pochinka@yandex.ru