Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, Простое доказательство теоремы экстраполяции для пространств Марцинкевича, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 939–943

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 05:54:00

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Простое доказательство теоремы экстраполяции для пространств Марцинкевича

Е. И. Бережной

Хорошо известно, что многие операторы анализа, например, оператор Гильберта или оператор сопряженной функции ограничены в пространстве L^p при $p \in (1, \infty)$, но не являются ограниченными в L^1 или L^∞ . Начиная с работы Яно [1] (см. также [2]), для определения “экстремального” пространства в предельном случае стали применять экстраполяционные теоремы. Позднее появилось много работ [3]–[5], обобщающих теоремы Яно и Зигмунда.

В настоящей статье рассматривается другой подход к доказательству теорем экстраполяции для квазилинейных операторов для пространств Марцинкевича. Этот подход учитывает геометрические свойства этих пространств. Впервые аналогичный подход на примере пространств Лоренца был продемонстрирован в [6]. Если говорить о связи наших результатов с результатами указанных выше работ и, в частности, с [3], то, во-первых, у нас рассматриваются операторы в шкале пространств Марцинкевича, а не Лебега, и, во-вторых, что более существенно, у нас по поведению роста норм операторов при стремлении к критическому показателю выписывается точное пространство Марцинкевича, которое является экстраполяционным. Приведенные ниже теоремы содержат и классическую теорему Зигмунда (см. пример 1 в конце работы), и последние результаты об экстраполяции операторов в окрестности L^∞ (см. [7]).

Пусть (Ω, Σ, μ) – пространство с σ -конечной мерой, $S(\mu)$ – множество измеримых функций на Ω , $\chi(D)$ – характеристическая функция множества D , причем мы будем считать меру непрерывной.

Для $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через f^* ее перестановку в невозрастающем порядке. Пусть X – симметричное пространство [8], $\psi(X, s) = \{\|\chi(D)\|_X : \mu(D) = s\}$ – его фундаментальная функция, которая является квазивогнутой. Каждая квазивогнутая функция φ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\tilde{\varphi}$, причем константа эквивалентности не превосходит 2. Напомним определение пространств Марцинкевича $M(\varphi)$. Зафиксируем промежуток $[0, a)$. Обозначим через $W(a)$ множество вогнутых функций $\varphi: [0, a) \rightarrow \mathbb{R}_+$, каждая из которых непрерывна, строго возрастает и обладает свойствами

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \varphi(s) = \infty.$$

Если $a = \infty$, то будем считать, что выполнено дополнительное условие $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$.

С каждой функцией $\varphi \in W$ связана функция

$$\tilde{\varphi}(s) = \frac{s}{\varphi(s)}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00321).

DOI: 10.4213/mzm10246

Операция $\widetilde{\varphi}$ является инволюцией на классе W .

Пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из тех f , для которых конечна норма

$$\|f|M(\varphi)\| = \sup_{0 < t < \mu(\Omega)} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t f^*(s) ds = \sup_{D \subset \Omega} \left\{ \frac{\varphi(\mu(D))}{\mu(D)} \int_D |f(s)| ds \right\}.$$

Если $\varphi(s) = s^\theta$ с $0 < \theta < 1$, то пространство Марцинкевича в этом случае будем обозначать M^θ . Если $\theta = 0$, то справедливо равенство $M^0 = L^\infty$.

Наряду с классическими пространствами Марцинкевича $M(\varphi)$ важную роль играет набор квазибанаховых симметричных пространств $\widetilde{M(\varphi)}$, также называющихся пространствами Марцинкевича, квазинорма в каждом из которых определяется равенством

$$N(f|\widetilde{M(\varphi)}) = \|\widetilde{f|\widetilde{M(\varphi)}}\| = \sup_{\alpha > 0} \alpha \varphi(\lambda(f, \alpha)).$$

Нетрудно видеть, что справедливо непрерывное вложение $M(\varphi) \subseteq \widetilde{M(\varphi)}$. Для совпадения пространств необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\sup_{0 < t < \mu(\Omega)} \left\{ \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t \frac{ds}{\varphi(s)} \right\} < \infty.$$

Напомним, что оператор T называется *квазилинейным*, если для абсолютной константы c_0 на области определения T выполнены неравенства

$$\| |T\lambda x|X \| \leq c_0 |\lambda| \|Tx|X\|, \quad \left\| T\left(\sum x_k\right) \right\|X\| \leq c_0 \sum \|Tx_k|X\|.$$

Если X – идеальное пространство, то типичными примерами квазилинейных операторов являются модули линейных операторов и операторы вида $T(x)(t) = \sup_{\delta \in \Delta} |T_\delta(x)|(t)$, где T_δ – линейные операторы. В частности, квазилинейными являются различные операторы максимальной функции.

Для квазилинейных операторов $T: Y \rightarrow X$ можно определить норму с помощью обычного равенства:

$$\|T: Y \rightarrow X\| = \sup_{\|x\|_Y \leq 1} \|Tx|X\|.$$

Основная задача, рассматриваемая в настоящей работе, имеет следующий вид.

ЗАДАЧА. Зафиксируем $\tau_0, \tau_1, 0 \leq \tau_0 < \tau_1 \leq 1$, и банахово пространство X , и пусть задан квазилинейный оператор $T: X \rightarrow M^\tau, \tau \in (\tau_0, \tau_1]$, для которого выполняются условия

$$\|T|X \rightarrow M^\tau\| = \xi(\tau), \quad \text{причем} \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \xi(\tau) = \infty.$$

Требуется охарактеризовать “наименьшее” пространство M_{ext} такое, что оператор ограниченно действует из X в пространство M_{ext} .

Рассмотрим сначала случай конечной меры; без ограничения общности будем считать, что $\mu(\Omega) = 1$.

Отметим, что из интерполяционной теоремы следует, что функция $\xi(\tau)$ эквивалентна логарифмически выпуклой функции, а из вложения $M^\tau \subset M^{\tau+\delta}, \delta > 0$, следует, что $\xi(\tau)$ не возрастает по τ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть фиксирована пара чисел $0 \leq \tau_0 < \tau_1 \leq 1$, банахово пространство Y и квазилинейный оператор $T: Y \rightarrow S(\mu)$. Пусть задана функция $\xi(\tau)$, которая не возрастает по τ и эквивалентна логарифмически выпуклой. Для $t \in (0, 1)$ определим функцию

$$\psi_\xi(t) = \sup_{\tau \in (\tau_0, \tau_1]} \frac{t^\tau}{\xi(\tau)}. \quad (1)$$

Для того, чтобы при всех $\tau \in (\tau_0, \tau_1]$ выполнялось неравенство

$$\|T|Y \rightarrow M^\tau\| \leq c\xi(\tau), \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех x из Y выполнялось неравенство

$$\sup_{t \in (0,1)} \frac{\psi_\xi(t)}{t} \int_0^t (Tx)^*(s) ds \leq c\|x|Y\|, \quad (3)$$

т.е. оператор T был ограничен как оператор из Y в $M(\widehat{\psi}_\xi)$.

Доказательство. Сначала отметим, что функция $\psi_\xi(t)$ не убывает, а функция

$$\frac{\psi_\xi(t)}{t} = \sup_{\tau \in (\tau_0, \tau_1]} \frac{t^{\tau-1}}{\xi(\tau)}$$

не возрастает на $(0, 1)$. Поэтому функция $\psi_\xi(t)$ является квазивогнутой на $(0, 1)$. Непосредственно из определения функции $\psi_\xi(t)$ следует, что $\lim_{t \rightarrow 0} \psi_\varphi(t) = 0$ и, значит, $\widehat{\psi}_\xi \in W(1)$. Поэтому определено пространство $M(\widehat{\psi}_\xi)$.

Пусть выполнено (2). Зафиксируем $x \in Y$ и положим $y(t) = Tx(t)$. Из предположений теоремы следует, что при всех $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ выполнено неравенство

$$\|Tx|M^\tau\| = \sup_{t \in (0,1)} t^{\tau-1} \int_0^t y^*(s) ds \leq c\xi(\tau) \cdot \|x|Y\|.$$

Из последнего соотношения следует, что при всех $t \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$t^{-1} \int_0^t y^*(s) ds \leq ct^{-\tau} \xi(\tau) \cdot \|x|Y\|.$$

Минимизируя правую часть по $\tau \in (\tau_0, \tau_1]$, приходим к неравенству (3).

Для доказательства обратного зафиксируем $\tau \in (\tau_0, \tau_1]$. Неравенство (3) эквивалентно выполнению при всех $t \in (0, 1)$ неравенства

$$\frac{1}{t} \int_0^t (Tx)^*(s) ds \leq c \frac{1}{\psi_\xi(t)} \|x|Y\|.$$

Учитывая определение (1), получим

$$\frac{1}{t} \int_0^t (Tx)^*(s) ds \leq c\xi(\tau)t^{-\tau}\|x|Y\|.$$

Теорема доказана.

Эта теорема имеет полный аналог для квазибанаховых пространств Марцинкевича $\widetilde{M}^\tau$. Нужно просто в формулировке теоремы 1 заменить пространства M^τ и $M(\widehat{\psi}_\xi)$ на $\widetilde{M}^\tau$ и $M(\widehat{\psi}_\xi)$ соответственно.

В следующем сюжете мы уходим от пространств Марцинкевича M^τ , образующих степенную шкалу, к шкале пространств Марцинкевича, порожденной пространством $M(\varphi)$.

Пусть задано идеальное пространство X и число $\theta \in (0, 1)$. Пространство X_θ состоит из тех измеримых функций, для каждой из которых конечна норма $\|x|X_\theta\| = \| |x|^{1/\theta} |X\|^\theta$. Если $X = M(\varphi)$ (соответственно $X = \widetilde{M}(\varphi)$), то $M(\varphi)_\theta$ (соответственно $\widetilde{M}(\varphi)_\theta$) является симметричным пространством, норма в котором задается равенством

$$\|x|M(\varphi)_\theta\| = \sup_{0 < t < \mu(\Omega)} \left(\frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t (f^*(s))^{1/\theta} ds \right)^\theta = \sup_{D \subset \Omega} \left\{ \frac{\varphi(\mu(D))}{\mu(D)} \int_D |f(s)|^{1/\theta} d\mu \right\}^\theta$$

и

$$\|x|\widetilde{M(\varphi)}_\theta\| = \sup_{0 < t < \mu(\Omega)} \varphi(t)^\theta \cdot f^*(t)$$

соответственно.

Для набора пространств $M(\varphi)_\theta$ ($\widetilde{M(\varphi)}_\theta$) также естественно рассматривать теоремы экстраполяции.

ТЕОРЕМА 2. Пусть фиксированы пара чисел $0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1$ и банахово пространство Y . Для квазилинейного оператора $T: Y \rightarrow M(\varphi)_\theta$ ($T: Y \rightarrow \widetilde{M(\varphi)}_\theta$) положим

$$\|T: Y \rightarrow M(\varphi)_\theta\| = \xi(\theta) \quad (\|T: Y \rightarrow \widetilde{M(\varphi)}_\theta\| = \xi(\theta)),$$

$\theta \in (\theta_0, \theta_1]$. Для $t \in (0, 1)$ определим функцию

$$\psi_{\xi, \varphi}(t) = \sup_{\theta \in (\theta_0, \theta_1]} \frac{\varphi(t)^\theta}{\xi(\theta)}.$$

Тогда для любого x из области определения T верно неравенство

$$\sup_{t \in (0, a)} \frac{\psi_{\xi, \varphi}(t)}{t} \int_0^t (Tx)^*(s) ds \leq c \|x\|_Y \quad \left(\sup_{t \in (0, a)} \psi_{\xi, \varphi}(t) (Tx)^*(t) \leq c \|x\|_Y \right),$$

и поэтому можно считать, что оператор T ограничен как оператор из Y в $M(\widehat{\psi_{\xi, \varphi}})$ ($M(\widehat{\psi_{\xi, \varphi}})$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\psi_{\xi, \varphi}(t)$ является квазивогнутой на $(0, 1)$, причем выполнено $\lim_{t \rightarrow 0} \psi_{\xi, \varphi}(t) = 0$, и, значит, определена эквивалентная ей вогнутая функция $\widehat{\psi_{\xi, \varphi}} \in W(1)$. Поэтому определено пространство $M(\widehat{\psi_{\xi, \varphi}})$.

Окончание доказательства можно получить по схеме доказательства теоремы 1.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть функция $\xi(\tau)$ при всех $\tau \in (\tau_0, \tau_1]$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{c(\tau - \tau_0)} \leq -\frac{\xi'(\tau)}{\xi(\tau)} \leq \frac{c}{(\tau - \tau_0)}. \quad (4)$$

Положим

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{t^{\tau_0}}{\xi(\tau_0 + 1/\ln(1/t))} & \text{при } t \in (0, e^{-1/(\tau_1 - \tau_0)}), \\ e \frac{t^{\tau_1}}{\xi(\tau_1)} & \text{при } t \in [e^{-1/(\tau_1 - \tau_0)}, 1). \end{cases} \quad (5)$$

Следует заметить, что функция $\phi(s)$ не всегда вогнута.

С помощью прямых вычислений получим, что при всех $s > 0$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{c_1} \psi_\xi(s) \leq \phi(s) \leq c_1 \psi_\xi(s)$$

с константой c_1 , не зависящей от s .

Отметим, что условию (4) удовлетворяют функции $\xi(t) = t^\alpha$, $\xi(t) = t^\alpha (\ln t)^{\beta_1}$, $\xi(t) = t^\alpha (\ln t)^{\beta_1} (\ln(\ln t))^{\beta_2}$ и т.д. при $\alpha < 0$, $\beta_1 \in \mathbb{R}$, $\beta_2 \in \mathbb{R}$.

Используя пример 1, из теоремы 1 получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mu(\Omega) = a < \infty$, Y – некоторое банахово пространство. Пусть для квазилинейного оператора $T: Y \rightarrow M^\tau$ функция $\|T: Y \rightarrow M^\tau\| = \xi(\tau)$, $\tau \in (0, 1]$, удовлетворяет неравенствам (4).

Тогда $\|T\|_{Y \rightarrow M(\psi_\xi)} < \infty$, где функция ψ_ξ при малых t определена равенством (5).

Если $\|T|L^p \rightarrow L^p\| = \xi(1/p)$, то

$$\|T|L^\infty \rightarrow L^p\| \leq \xi\left(\frac{1}{p}\right) \quad \text{и} \quad \|T|L^\infty \rightarrow M^{1/p}\| \leq \xi\left(\frac{1}{p}\right).$$

Поэтому если в теореме 3 положить $Y = L^\infty$, то из теоремы 3 и примера 1 получается широкое обобщение теоремы Зигмунда–Яно [2].

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть теперь $\mu(\Omega) = \infty$. Тогда в равенстве (1) функцию $\psi_\xi(t)$ нужно доопределить при $t \geq 1$ равенством $\psi_\xi(t) = \psi_\xi(1 - 0)t^{\tau_1}$. Доказательство в этом случае остается без изменений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. Yano, *J. Math. Soc. Japan*, **3**:2 (1951), 296–305. [2] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, 2, Мир, М., 1965. [3] С. В. Асташкин, К. В. Лыков, *Сиб. матем. журн.*, **47**:5 (2006), 974–992. [4] С. В. Асташкин, К. В. Лыков, *Сиб. матем. журн.*, **50**:2 (2009), 250–266. [5] G. E. Karadzhov, M. Milman, *J. Approx. Theory*, **133**:1 (2005), 38–99. [6] Е. И. Бережной, А. А. Перфильев, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:3 (2000), 66–68. [7] M. J. Carro, *Publ. Mat.*, 2002, Spec. Vol., 27–37. [8] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.

Е. И. Бережной

Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова
E-mail: ber@uniyar.ac.ru

Поступило

03.03.2012

Исправленный вариант

21.12.2012