Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Исангулова, Квазиконформные отображения группы движений плоскости, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 947–950

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10247>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 17:48:10

Квазиконформные отображения группы движений плоскости

Д. В. Исангулова

1. Введение. Мы исследуем квазиконформные отображения группы $SE(2)$ – группы движений евклидовой плоскости, сохраняющих ориентацию. Всякое сохраняющее ориентацию движение плоскости есть композиция сдвига на вектор (x, y) и поворот на угол θ против часовой стрелки, поэтому $SE(2)$ еще называется *группой поворотов-сдвигов*. Это трехмерное топологическое многообразие, диффеоморфное $\mathbb{R}^2 \times S^1$, с умножением

$$(x_0, y_0, \theta_0) \cdot (x, y, \theta) = (x_0 + x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0, y_0 + x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0, \theta_0 + \theta)$$

и левоинвариантными векторными полями

$$A = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad C = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}.$$

На $SE(2)$ мы рассматриваем субриманову структуру, задаваемую *горизонтальным под-расслоением* $H = \text{span}\{A, B\}$ в касательном расслоении. Субриманова метрика или *метрика Карно–Каратеодори* d задается как инфимум длин всех горизонтальных кривых, соединяющих две точки (кусочно-гладкая кривая называется *горизонтальной*, если ее касательный вектор принадлежит H почти всюду). Для измерения длин горизонтальных кривых введем такое внутреннее произведение на H , при котором векторные поля A и B ортонормированы. По теореме Ращевского–Чоу метрика d корректно определена, поскольку векторные поля A и B удовлетворяют условию Хёрмандера: $\text{span}\{A, B, [A, B] = -C\}$ совпадает со всем касательным расслоением [1].

Группа движений плоскости с субримановой геометрией возникает в вопросах моделирования неголономного движения и оптимального контроля. Также геометрия группы $SE(2)$ возникает в задаче визуализации при моделировании восприятия человеческим мозгом плоского черно-белого изображения (см., например, монографию [2]). Субримановы геодезические вычислены в статье [3]. В работе автора [4] описаны C^2 -гладкие изометрии на $SE(2)$.

Напомним метрическое определение квазиконформности: гомеоморфизм $F: \Omega \rightarrow \Omega'$ связных областей $\Omega, \Omega' \subset SE(2)$ называется K -квазиконформным, если

$$\lim_{r \rightarrow +0} \frac{\max_{\eta \in \Omega} \{d(F(\xi), F(\eta)) \mid d(\xi, \eta) = r\}}{\min_{\eta \in \Omega} \{d(F(\xi), F(\eta)) \mid d(\xi, \eta) = r\}} \leq K < \infty \quad \text{для всякого } \xi \in \Omega.$$

Первый вопрос, возникающий при исследовании нового класса отображений: насколько богат этот класс? Теорема 1 утверждает, что множество квазиконформных отображений на группе $SE(2)$ бесконечномерно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть q – гладкая вещественнозначная функция и

$$k = \sup \sqrt{(ABq + BAq)^2 + (A^2q - B^2q - q)^2} < +\infty.$$

Тогда векторное поле $v = -BqA + AqB + qC$ порождает локальную однопараметрическую группу K_s -квазиконформных преобразований F_s , где

$$\frac{1}{2} \left(K_s + \frac{1}{K_s} \right) \leq e^{\sqrt{2}k|s|}.$$

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-921.2012.1) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (соглашение № 8206).

DOI: 10.4213/mzm10247

ПРИМЕР. Если $q = q(\theta)$ и $k = \sup |B^2q + q| < \infty$, то $F_s(x, y, \theta) = (f_s, g_s, \theta)$ с

$$f_s = x - s(Bq \cos \theta + q \sin \theta), \quad g_s = y - s(Bq \sin \theta - q \cos \theta).$$

Причем

$$\frac{1}{2} \left(K + \frac{1}{K} \right) \leq 1 + \frac{s^2 k^2}{2} \leq e^{\sqrt{2}k|s|}.$$

Теорема 2 дает описание всех C^4 -гладких 1-квазиконформных отображений на $SE(2)$.

ТЕОРЕМА 2. Всякое C^4 -гладкое 1-квазиконформное отображение на группе $SE(2)$ изометрично и является композицией следующих отображений:

$$\begin{aligned} l_{(x_0, y_0, \theta_0)}(x, y, \theta) &= (x_0, y_0, \theta_0) \cdot (x, y, \theta) && (\text{левый сдвиг}), \\ \iota(x, y, \theta) &= (-x, y, -\theta), \quad \sigma(x, y, \theta) = (-x, -y, \theta) && (\text{отражения}). \end{aligned}$$

Приведем кратко схемы доказательств теорем 1 и 2.

2. Доказательство теоремы 1. При доказательстве теоремы 1 мы опираемся на работу [5], где доказаны сходные факты для контактных и квазиконформных потоков группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1$.

На группе $SE(2)$ определена контактная форма $\omega = -\sin \theta dx + \cos \theta dy$, согласованная с субримановой структурой: $\ker \omega = H$ и $(l_{\xi_0})_* \omega = \omega$, где $l_{\xi_0}(\xi) = \xi_0 \cdot \xi$ – левый сдвиг, $\xi_0, \xi \in SE(2)$. Как обычно, отображение $F = (f, g, \varphi)$ контактно, если $F^* \omega = \lambda \omega$. Отсюда получаем, что

$$Ag \cos \varphi = Af \sin \varphi, \quad Bg \cos \varphi = Bf \sin \varphi \quad (\text{условия контактности})$$

и $\lambda = \det D_h F$, где $D_h F(\xi): H_\xi \rightarrow H_{F(\xi)}$ – горизонтальный дифференциал, определяемый в базисе $\{A, B\}$ матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{Af}{\cos \varphi} & \frac{Bf}{\cos \varphi} \\ A\varphi & B\varphi \end{pmatrix}.$$

При этом, как и в евклидовом случае, $D_h l_{\xi_0} \equiv I$ и верно обратное: если $D_h F \equiv I$, то F – левый сдвиг.

Известно [6], что K -квазиконформное отображение F h -дифференцируемо почти всюду, контактно и

$$\|D_h F(\xi)\|_1^2 \leq K |\det(D_h F(\xi))| \quad \text{почти всюду},$$

где $\|\cdot\|_1$ – операторная норма матрицы.

Векторное поле v генерирует поток отображений F_s , если $dF_s/ds = v \circ F_s$ и $F_0 = \text{id}$. Поле v называется инфинитезимальным генератором потока F_s , причем F_s будет (локальной) однопараметрической группой преобразований.

Векторное поле вида $v = -BqA + AqB + qC$, где q – произвольная гладкая вещественнозначная функция, генерирует локальную однопараметрическую группу контактных преобразований; верно и обратное, всякое гладкое векторное поле v , которое генерирует локальную однопараметрическую группу контактных преобразований, имеет такой вид с $q = \langle \omega, v \rangle$ [4; теорема 2]. Отметим, что $\lambda_s = \det D_h F_s$ будет строго положительной.

Обозначим через M_s матрицу $D_h F_s$, а через $\alpha > \beta > 0$ – сингулярные числа M_s . Тогда

$$\|M_s\|_2^2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr}(M_s^t M_s) = \alpha^2 + \beta^2, \quad \det M_s = \alpha\beta, \quad \frac{\alpha}{\beta} \leq K.$$

Имеем [4; лемма]

$$\frac{d}{ds} M_s = V M_s, \quad \text{где} \quad V = \begin{pmatrix} -ABq & -B^2q - q \\ A^2q & BAq \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\frac{d}{ds} \frac{M_s^t M_s}{\det M_s} = \frac{1}{\det M_s} (M_s^t (V^t + V - \operatorname{tr} V \cdot I) M_s) = \frac{2}{\det M_s} M_s^t S M_s,$$

где

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -ABq - BAq & A^2q - B^2q - q \\ A^2q - B^2q - q & ABq + BAq \end{pmatrix},$$

и получаем оценку

$$\frac{d}{ds} \frac{\|M_s\|_2^2}{\det M_s} = \frac{2}{\det M_s} \operatorname{tr}(M_s^t S M_s) \leq 2 \frac{\|M_s\|_2^2}{\det M_s} \|S\|_2.$$

Окончательно получаем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \leq e^{2s\|S\|_2} \leq e^{\sqrt{2}ks},$$

поскольку

$$\|S\|_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2(ABq + BAq)^2 + 2(A^2q - B^2q - q)^2} \leq \frac{k}{\sqrt{2}}.$$

3. Схема доказательства теоремы 2. Вначале мы находим 1-квазиконформные потоки. Для этого решаем систему дифференциальных уравнений

$$AAq - BBq - q = 0, \quad ABq + BAq = 0.$$

Раскладывая функцию q в ряд Фурье по переменной θ и предполагая, что $q \in C^4$, получаем, что

$$q = (C_1 + C_0x) \cos \theta + (C_2 + C_0y) \sin \theta.$$

Последнее соответствует левому сдвигу $F_s = l_{(a(s), b(s), sC_0)}$, где

$$a(s) = \frac{-C_1 + C_1 \cos(sC_0) - C_2 \sin(sC_0)}{C_0}, \quad b(s) = \frac{-C_2 + C_2 \cos(sC_0) + C_1 \sin(sC_0)}{C_0},$$

если $C_0 \neq 0$, и

$$a(s) = -sC_2, \quad b(s) = sC_1,$$

если $C_0 = 0$.

Далее, показываем, что всякое C^4 -гладкое 1-квазиконформное отображение F можно встроить в поток. Применяя левые сдвиги, можно считать, что существуют две окрестности единицы группы U и V такие, что $F(U) = V$.

Обозначим через G_s гладкий поток 1-квазиконформных отображений. По вышеописанному G_s есть поток левых сдвигов и $D_h G_s \equiv I$.

Введем еще одно 1-квазиконформное отображение $\Phi_s = F^{-1} \circ G_s \circ F$. Так как $G_0 = \operatorname{id}$ и оба отображения F и F^{-1} корректно определены в окрестности единицы группы, то при малых s семейство Φ_s будет C^4 -гладким потоком 1-квазиконформных отображений на некоторой окрестности единицы группы и, следовательно, Φ_s – поток левых сдвигов и $D_h \Phi_s \equiv I$. Имеем

$$D_h G_s(F(\xi)) \cdot D_h F(\xi) = D_h F(\Phi_s(\xi)) \cdot D_h \Phi_s(\xi) \implies D_h F(\xi) = D_h F(\Phi_s(\xi)).$$

Фиксируем точку ξ из окрестности единицы. При варьировании G_s и s , множество точек $\Phi_s(\xi)$ совпадает с целой окрестностью единицы. Поэтому $D_h F \equiv \operatorname{const}$. Нетрудно показать, что

$$D_h F \equiv \pm I \quad \text{или} \quad D_h F \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Во всех трех случаях F изометрично и является суперпозицией отображений из теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. К. Рашевский, *Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-матем.*, **2** (1938), 83–94. [2] L. Capogna, D. Danielli, S. D. Pauls, J. T. Tyson, *An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem*, Progr. Math., **259**, Birkhäuser-Verlag, Basel, 2007. [3] I. Moiseev, Yu. L. Sachkov, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **16:2** (2010), 380–399. [4] Д. В. Исангулова, *Вестн. Кемеровского гос. ун-та*, 2011, № 3/1 (47), 243–249. [5] A. Korányi, H. M. Reimann, *Invent. math.*, **80:2** (1985), 309–338. [6] S. K. Vodopyanov, *The Interaction of Analysis and Geometry*, Contemp. Math., **424**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 247–301.

Д. В. Исангулова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

г. Новосибирск

E-mail: dasha@math.nsc.ru

Поступило

08.11.2012