Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Никитин, Классы Бесова на бесконечномерных пространствах, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 951–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 09:52:56

Классы Бесова на бесконечномерных пространствах

Е. В. Никитин

В этой работе вводятся пространства Бесова на бесконечномерных пространствах с гауссовской мерой аналогично прямому определению через интегральное условие, известному в конечномерном случае (см. [1], [2]). Основной результат – теорема вложения для введенных пространств.

Для всякой функции u на $\mathbb{R}^n$ и всякого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ положим $\Delta_h u(x) = u(x) - u(x - h)$. При $s > 0$, $p > 1$ и $q \geq 1$ класс Бесова функций на пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется как множество всех функций $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h|^{-s-n} \|(\Delta_h)^m u\|_p^q (dh) < \infty.$$

Пусть X – локально выпуклое пространство с топологическим сопряженным X^* . Вероятностная мера γ , определенная на σ -алгебре $\mathcal{E}(X)$, порожденной X^* , называется *гауссовской* (см. [3]), если для всякого функционала $f \in X^*$ мера $\gamma \circ f^{-1}$ является гауссовской на прямой. Основной пример – стандартная гауссовская мера на $X = \mathbb{R}^\infty$ (счетная степень прямой), равная счетной степени стандартной гауссовской меры на прямой.

Класс гладких цилиндрических функций $\mathcal{FC}^\infty$ состоит из функций вида

$$f(x) = g(l_1(x), \dots, l_n(x)), \quad \text{где } g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n), \quad l_i \in X^*.$$

Если $X = \mathbb{R}^\infty$, то это функции от конечного числа переменных с ограниченными производными всех порядков.

Для $p \geq 1$ и $r \in \mathbb{N}$ классы Соболева $W^{p,r}(\gamma)$ определяются как пополнение пространства гладких цилиндрических функций $\mathcal{FC}^\infty$ по соболевской норме $\|\cdot\|_{W^{p,r}}$, определяемой по формуле

$$\|f\|_{W^{p,r}} = \sum_{k=0}^r \|D_H^k f\|_{L^p(\gamma, \mathcal{H}_k)}.$$

Здесь $D_H^k f$ является отображением из X в пространство k -линейных отображений Гильберта–Шмидта из $H(\gamma)$ в $\mathbb{R}^1$; $D_H f$ для функций из $\mathcal{FC}^\infty$ определяется для $h \in H(\gamma)$ по формуле

$$D_H f(x)h = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} (f(x + th) - f(x)).$$

Производные более высокого порядка $D_H^k f$ определяются индуктивно как $D_H(D_H^{k-1} f)$. Подробнее о классах Соболева в бесконечномерных пространствах см. [3]–[7].

Пусть теперь на локально выпуклом пространстве X задана центрированная радоновская гауссовская мерой γ (см. [3]). Пространство Камерона–Мартина $H = H(\gamma)$ состоит из всех векторов $h \in X$, имеющих конечную норму

$$|h|_H := \sup\{l(h) : l \in X^*, \|l\|_{L^2(\gamma)} \leq 1\}.$$

Эта норма порождается скалярным произведением $\langle k, h \rangle$, которое можно задать так: для всякого $h \in H$ найдется элемент l_h из замыкания X^* в $L^2(\gamma)$, удовлетворяющий тождеству

$$l(h) = \int_X l_h l d\gamma, \quad l \in X^*.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 10-01-00518, 11-01-90421-Укр-ф-а).

DOI: 10.4213/mzm10248

Тогда $\langle k, h \rangle = (l_h, l_k)_{L^2(\gamma)}$. Для стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^\infty$ получаем $H = \ell^2$ с обычным скалярным произведением.

Положим $\Delta_h u(x) = u(x) - u(x-h)$, где $h \in H(\gamma)$. Норму в $L^p(\gamma)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, ν – борелевская вероятностная мера на $H(\gamma)$ и m – наименьшее целое, большее s . Класс Бесова $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ состоит из всех таких функций $u \in L^p(\gamma)$, что

$$\int_H |h|_H^{-s} \|(\Delta_h)^m u\|_p^q \nu(dh) < \infty.$$

Норма в $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ задается формулой

$$\|u\|_{s;p,q,\nu} := \|u\|_p + \left(\int_H |h|_H^{-s} \|(\Delta_h)^m u\|_p^q \nu(dh) \right)^{1/q}.$$

Отметим, что определяемые так пространства существенно зависят не только от трех числовых параметров, как обычные классы Бесова, но и от дополнительного параметра, которым является мера на пространстве Камерона–Мартина.

ЛЕММА 1. Пространства $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ являются банаховыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ из класса Бесова $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$ фундаментальна по норме $\|\cdot\|_{s;p,q,\nu}$. Тогда она фундаментальна и по норме в $L^p(\gamma)$ и в силу полноты $L^p(\gamma)$ сходится к некоторой функции φ из $L^p(\gamma)$. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\varphi_j\}$ сходится к φ почти всюду. Из теоремы Фату ясно, что $\varphi \in B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$. Теперь достаточно доказать, что какая-нибудь подпоследовательность в $\{\varphi_j\}$ сходится к φ по норме $B^{s;p,q,\nu}(\gamma)$. Для этого выберем еще одну подпоследовательность, обозначая ее снова через $\{\varphi_j\}$, для которой

$$\|\varphi_k - \varphi_j\|_{s;p,q,\nu} \leq 2^{-j} \quad \text{при } k > j.$$

Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k - \varphi_j) = \varphi - \varphi_j$ почти всюду. Положив

$$Q_j := |(\Delta_h)^m (\varphi - \varphi_j)|^p, \quad Q_{j,k} := |(\Delta_h)^m (\varphi_k - \varphi_j)|^p,$$

получим $Q_j = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_{j,k}$ почти всюду. Теперь оценим второе слагаемое в выражении для нормы $\|\varphi - \varphi_j\|_{s;p,q,\nu}$, дважды применяя лемму Фату:

$$\begin{aligned} \int_H |h|_H^{-s} \left(\int_X Q_j d\gamma \right)^{q/p} d\nu &\leq \int_H |h|_H^{-s} \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\int_X Q_{j,k} d\gamma \right)^{q/p} d\nu \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_H |h|_H^{-s} \left(\int_X Q_{j,k} d\gamma \right)^{q/p} d\nu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - \varphi_j\|_{s;p,q,\nu}^q \leq 2^{-qj}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|\varphi - \varphi_j\|_{s;p,q,\nu} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть вероятностная мера ν на $H(\gamma)$ такова, что функция $\exp(M|h|_H^2)$ интегрируема по ν при некотором $M > q/(2(p_1 - p))$. Тогда при $p_1 > p$ и $0 < s \leq 1$ имеем

$$W^{p_1,1}(\gamma) \subset B^{s;p,q,\nu}(\gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всякой функции $f \in W^{p,1}$ при каждом $h \in H$ почти всюду верно равенство

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \langle D_H f(x+th), h \rangle dt.$$

Оценим L^p -норму $\Delta_h f$ (возведенную в степень p). Чтобы занести степень p внутрь интеграла, применим неравенство Йенсена:

$$\begin{aligned} \int_X |f(x+h) - f(x)|^p \gamma(dx) &\leq |h|^p \int_X \left(\int_0^1 |D_H f(x+th)|_H dt \right)^p \gamma(dx) \\ &\leq |h|^p \int_0^1 \int_X |D_H f(x+th)|_H^p \gamma(dx) dt. \end{aligned}$$

В последнем интеграле сделаем замену переменных, взяв $x+th$ за новую переменную и применив формулу Камерона–Мартина, согласно которой при сдвиге гауссовской меры γ на вектор h из пространства Камерона–Мартина получается эквивалентная исходной мера с плотностью $\exp(l_h - |h|_H^2/2)$. Получаем соотношения

$$\begin{aligned} |h|^p \int_0^1 \int_X |D_H f(x+th)|_H^p \gamma(dx) dt &= |h|^p \int_0^1 \int_X |D_H f(x)|_H^p e^{tl_h - (t^2/2)|h|^2} \gamma(dx) dt \\ &\leq |h|^p \int_0^1 \left(\int_X |D_H f(x)|_H^{pr} \gamma(dx) \right)^{1/r} \left(\int_X e^{m(tl_h - (t^2/2)|h|^2)} \gamma(dx) \right)^{1/m} dt \\ &= |h|^p \left(\int_X |D_H f(x)|_H^{pr} \gamma(dx) \right)^{1/r} \int_0^1 e^{((m-1)/2)|h|^2 t^2} dt. \end{aligned}$$

Чтобы отделить плотность, возникающую из формулы Камерона–Мартина, мы воспользовались неравенством Гёльдера для некоторых чисел $r > 1$, $m > 1$ таких, что $r^{-1} + m^{-1} = 1$, выбираемых далее. Эта часть явно интегрируется по X . Подставив полученную оценку в выражение для нормы Бесова, получаем

$$\begin{aligned} \int_H |h|^{-s} \|\Delta_h f\|_{L^p}^q \nu(dh) &\leq \left(\int_X |D_H f(x)|_H^{pr} \gamma(dx) \right)^{q/(pr)} \int_H |h|^{1-s} \left(\int_0^1 e^{((m-1)/2)|h|^2 t^2} dt \right)^{q/p} \nu(dh) \\ &\leq \left(\int_X |D_H f(x)|_H^{p_1} \gamma(dx) \right)^{q/p_1} \int_H |h|^{1-s} e^{(q/(2(p_1-p)))|h|^2} \nu(dh) \\ &\leq C(s, M) \int_H e^{M|h|^2} \nu(dh) \left(\int_X |D_H f(x)|_H^{p_1} \gamma(dx) \right)^{q/p_1}. \end{aligned}$$

Положив $r = p_1/p$, получаем, что для любой функции $f \in W^{p_1,1}$ конечна норма $\|f\|_{B^{p,q,1,\nu}}$, а это дает нужное вложение с оценкой для норм. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1996. [2] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Pure Appl. Math. (Amst.), **140**, Academic Press, New York, 2003. [3] В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Наука, М., 1997. [4] V. I. Bogachev, *J. Math. Sci. (New York)*, **87**:4 (1997), 3577–3731. [5] V. I. Bogachev, *Differentiable Measures and the Malliavin Calculus*, Math. Surveys Monogr., **164**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. [6] V. Bogachev, E. Mayer-Wolf, **167**:1 (1999), 1–68. [7] I. Shigekawa, *Stochastic Analysis*, Transl. Math. Monogr., **224**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

Е. В. Никитин

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: yegor.nikitin@gmail.com

Поступило

02.12.2012