Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Жукова, Аттракторы слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один, *Матем. заметки*, 2013, том 93, выпуск 6, 944–946

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 04:28:09

Аттракторы слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один

Н. И. Жукова

Цель работы – представить единый метод исследования слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один. Мы развиваем технику Франса [1] и идеи, примененные нами к конформным слоениям [2].

1. Параболические геометрии ранга один. Пусть G – простая группа Ли действительного ранга один с конечным центром, а P – ее параболическая подгруппа. Сохраним обозначения из [1]. Пусть $\mathbf{X} = G/P$. Такие однородные пространства $\mathbf{X}$ являются границами $\mathbf{X} = \partial\mathbf{H}_{\mathbb{K}}^d$ различных d -мерных гиперболических пространств $\mathbf{H}_{\mathbb{K}}^d$. Здесь $\mathbb{K}$ есть $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ или алгебра октанионов $\mathbb{O}$. Предполагается, что $d \geq 2$, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, и $d = 2$ для $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, во всех остальных случаях $d \geq 1$.

Таким образом, $\mathbf{X} = G/P = \partial\mathbf{H}_{\mathbb{K}}^d$, где $G = \text{Iso}(\mathbf{H}_{\mathbb{K}}^d)$ и P – стационарная подгруппа группы G в некоторой точке границы $\partial\mathbf{H}_{\mathbb{K}}^d$. Известен полный список этих групп и соответствующих однородных пространств:

- $G = SO(1, d)$, $d \geq 2$ при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, причем $\mathbf{X} = \partial\mathbf{H}_{\mathbb{R}}^d$ есть сфера $\mathbf{S}^{d-1}$;
- $G = SU(1, d)$, $d \geq 1$ при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, причем $\mathbf{X} = \partial\mathbf{H}_{\mathbb{C}}^d$ есть сфера $\mathbf{S}^{2d-1}$;
- $G = \text{Sp}(1, d)$, $d \geq 1$ при $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, причем $\mathbf{X} = \partial\mathbf{H}_{\mathbb{H}}^d$ есть сфера $\mathbf{S}^{4d-1}$;
- $G = F_4^{-20}$ при $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, причем $\mathbf{X} = \partial\mathbf{H}_{\mathbb{K}}^d$ есть сфера $\mathbf{S}^{15}$.

Определения и факты о картановых и параболических геометриях можно найти, например, в книге Чапа и Словака [3]. Пусть G – группа Ли и P – ее замкнутая подгруппа, а $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{p}$ – их алгебры Ли. Пусть $B(N, P)$ – P -расслоение с проекцией $p: B \rightarrow N$. Невырожденная P -эквивариантная $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма ω на B называется *картановой связностью*. Пара $\xi = (B(N, P), \omega)$ называется *картановой геометрией* типа (G, P) , а (N, ξ) – *картановым многообразием*.

Картанова геометрия $\xi = (B(N, P), \omega)$ типа (G, P) , где G – простая группа Ли действительного ранга один с конечным центром, а P – ее параболическая подгруппа, называется *параболической геометрией ранга один* или, для краткости, – P_1 -геометрией. Параболическая геометрия называется *регулярной*, если ее кривизна согласована с градуировкой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в смысле [1]. Картанова геометрия $(G(\mathbf{X}, P), \omega_G)$, где ω_G – форма Маурера–Картана на G , обозначается через ξ^0 .

Пусть $\xi = (B(N, P), \omega)$ и $\xi' = (B'(N', P), \omega')$ – картановы геометрии одного типа (G, P) . *Изоморфизмом* ξ и ξ' называется такой диффеоморфизм $\hat{f}: B \rightarrow B'$, что $f^*\omega' = \omega$ и $\hat{f} \circ R_a = R_a \circ \hat{f}$ для всех $a \in P$, где R_a – правое действие элемента $a \in P$ на B и B' соответственно. Проекция $f: N \rightarrow N'$ диффеоморфизма $\hat{f}$ называется *изоморфизмом картановых многообразий* (N, ξ) и (N', ξ') . Обозначим через $\text{Aut}(N, \xi)$ группу автоморфизмов (N, ξ) .

Везде далее $\xi = (B(N, P), \omega)$ – регулярная параболическая геометрия ранга один.

2. Существенность локального изоморфизма. Пусть $\gamma: U \rightarrow V$ – такой локальный изоморфизм параболического многообразия (N, ξ) , что $\gamma(v) = v \in U \cap V$, и $\hat{\gamma}$ – (какой-либо) локальный изоморфизм геометрии ξ с проекцией γ . Зафиксируем точку $\hat{v} \in p^{-1}(v)$. Существует единственный элемент a из группы P , удовлетворяющий равенству $\hat{\gamma}(\hat{v}) = \hat{v}a$. Рассмотрим индуцированную подгруппу $\Gamma_{\hat{v}} := \langle a \rangle$ группы P , порожденную элементом a . Нетрудно проверить корректность следующего определения.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ “Научные и научно-педагогические кадры” (проект № 14.B37.21.0361) и проект № 1.1907.2011.

DOI: 10.4213/mzm10249

© Н. И. Жукова, 2013

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если локальный изоморфизм γ геометрии ξ имеет такую неподвижную точку v , что индуцированная группа $\Gamma_{\hat{v}}$, где $p(\hat{v}) = v$, не является относительно компактной подгруппой группы Ли P , то γ называется *существенным* (в точке v). В противном случае локальный изоморфизм γ называется *несущественным*.

Применяя отображение развертки для параболической геометрии ξ , мы показываем, что техника, использованная Франсом в [1] для группы автоморфизмов $\text{Aut}(N, \xi)$, применима к псевдогруппе локальных изоморфизмов $\mathcal{H}(N, \xi)$ геометрии (N, ξ) . Благодаря этому мы получили следующее достаточное локальное условие для выполнения гипотезы Лихнеровича для произвольной параболической геометрии ранга один.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ξ – произвольная регулярная параболическая геометрия ранга один на N . Если существует существенный локальный изоморфизм параболического многообразия (N, ξ) , то (N, ξ) изоморфно либо параболическому многообразию (X, ξ^0) , если N компактно, либо параболическому многообразию $(X \setminus \{\nu\}, \xi^0|_{X \setminus \{\nu\}})$, где $\nu \in X$, в противном случае.

Нами доказан следующий критерий собственности действия группы автоморфизмов $\text{Aut}(N, \xi)$ параболического многообразия (N, ξ) .

ТЕОРЕМА 2. Полная группа автоморфизмов $\text{Aut}(N, \xi)$ действует собственнo на N тогда и только тогда, когда она не содержит существенных автоморфизмов.

Из теорем 1 и 2 вытекает основная теорема Франса из [1], согласно которой если группа автоморфизмов регулярной параболической геометрии ранга один (N, ξ) действует на N не собственнo, то выполняется утверждение теоремы 1.

Другой критерий собственности действия на N группы автоморфизмов P_1 -геометрии ξ в терминах вейлевых структур получен Альтом в [4].

3. Критерий римановости P_1 -слоения. Слоение (M, F) , заданное N -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$, имеет *трансверсальную геометрию* ξ и называется *P_1 -слоением*, если на N задана такая регулярная параболическая геометрия ранга один ξ , что каждый γ_{ij} – локальный изоморфизм (N, ξ) .

Напомним, что псевдогруппа локальных изоморфизмов, порожденная локальными изоморфизмами γ_{ij} , $i, j \in J$, называется *псевдогруппой голономии* слоения (M, F) и обозначается $\mathcal{H}(M, F)$. Пусть L – произвольный слой слоения (M, F) , возьмем $x \in L \cap U_i$, $i \in J$. Группа ростков в точке $v = f_i(x)$ локальных диффеоморфизмов из $\mathcal{H}(M, F)$ называется (*ростковой*) *группой голономии* слоя L . Имеет смысл следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа голономии слоя L называется *существенной*, если она содержит росток существенного локального изоморфизма в точке $v = f_i(x)$, где $x \in L \cap U_i$.

Применяя предложение 2, доказанное автором в [2], мы получили следующий критерий римановости исследуемых слоений.

ТЕОРЕМА 3. P_1 -Слоение (M, F) является римановым тогда и только тогда, когда оно не имеет слоев с существенной группой голономии.

4. Существования аттракторов. Напомним, что любое объединение слоев слоения (M, F) называется *насыщенным подмножеством* M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Непустое замкнутое насыщенное подмножество $\mathcal{M}$ в M называется *аттрактором* слоения (M, F) , если существует такая насыщенная открытая окрестность $\text{Attr}(\mathcal{M})$ множества $\mathcal{M}$, что замыкание каждого слоя из $\text{Attr}(\mathcal{M}) \setminus \mathcal{M}$ содержит $\mathcal{M}$. При этом $\text{Attr}(\mathcal{M})$ называется *бассейном* аттрактора $\mathcal{M}$.

Минимальное множество слоения (M, F) есть непустое замкнутое насыщенное подмножество M , не имеющее собственных подмножеств, обладающих этими свойствами. В отличие от компактных многообразий, на некомпактных многообразиях существуют слоения без минимальных множеств. Применение теорем 1 и 3 позволило нам доказать следующую теорему без предположения компактности слоеного многообразия.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого P_1 -слоения (M, F) выполняется одно из двух следующих утверждений:*

- (1) *слоение (M, F) риманово;*
- (2) *существует слой с существенной группой голономии; замыкание $M = \bar{L}$ любого слоя L с существенной группой голономии является аттрактором и минимальным множеством, причем сужение слоения на бассейн $\text{Attr}(M)$ аттрактора M есть (G, X) -слоение; объединение K замыканий всех слоев с существенной группой голономии образует замкнутое подмножество M , а ограничение (M_0, F_{M_0}) этого слоения на открытое подмножество $M_0 := M \setminus K$ – риманово слоение.*

В случае, когда (M, F) – конформное слоение коразмерности $q \geq 3$, подобный результат был получен автором в [2].

5. Строение P_1 -слоений на компактных многообразиях. Используя теорему 4 и рассуждения автора для конформных слоений [2], доказана

ТЕОРЕМА 5. *Если (M, F) – P_1 -слоение на компактном многообразии M , то выполняется одно из следующих двух утверждений:*

- (1) *слоение (M, F) полное риманово;*
- (2) *слоение (M, F) трансверсально однородное, имеет непустое конечное множество минимальных множеств M_j , $j = 1, \dots, t$, являющихся аттракторами, причем каждый слой принадлежит бассейну по крайней мере одного из этих аттракторов.*

Теорему 5 можно рассматривать как положительный ответ на аналог гипотезы Лигнеровича для P_1 -слоений.

Для конформных слоений коразмерности $q \geq 3$ этот результат получен нами в [2], а трансверсальная однородность доказана Таркини [5] при дополнительном предположении трансверсальной аналитичности конформного слоения.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть (M, F) – собственное нериманово P_1 -слоение на компактном многообразии M . Тогда (M, F) – (G, X) -слоение, имеющее непустое конечное множество компактных слоев L_j , $j = 1, \dots, t \geq 1$, причем каждый L_j – аттрактор и любой слой этого слоения принадлежит бассейну по крайней мере одного из этих аттракторов.*

Примеры конформных слоений с различными минимальными множествами-аттракторами построены нами в [6].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. Frances, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **40**:5 (2007), 741–764. [2] Н. И. Жукова, *Сиб. матем. журн.*, **52**:3 (2011), 555–574. [3] A. Čap, J. Slovák, *Parabolic Geometries. I. Background and General Theory*, Math. Surveys Monogr., **154**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009. [4] J. Alt, *SIGMA*, **7** (2011), 039, 16 pp. [5] C. Tarquini, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **52**:2 (2004), 453–480. [6] Н. И. Жукова, *Матем. сб.*, **203**:3 (2012), 79–106.

Н. И. Жукова
 Нижегородский государственный
 университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: n.i.zhukova@rambler.ru

Поступило
 27.12.2012