Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Д. Гельман, Точки покоя обобщенных динамических систем, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 28–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1025>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 09:38:04

УДК 517.938+515.126.4

ТОЧКИ ПОКОЯ ОБОБЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Б. Д. Гельман

В настоящей статье выделяется класс обобщенных динамических систем, у которых интегральная воронка (множество траекторий системы, выходящих из данной точки) является ациклическим множеством в пространствах кривых. В этом классе динамических систем для доказательства существования точек покоя удастся применить теорию неподвижных точек многозначных отображений. На этом пути удастся получить новые теоремы о точках покоя обобщенных динамических систем.

Библиография: 11 названий.

Обобщенные динамические системы возникли в связи с изучением обыкновенных дифференциальных уравнений без единственности и дифференциальных включений. Основы этой теории были заложены в работах А. Д. Мышкиса, Е. А. Барбашина, Б. М. Будака, Е. Роксина и др.

В работе Мышкиса [1] была поставлена задача исследования точек покоя обобщенных динамических систем. В ней данная задача сводилась к изучению неподвижных точек многозначных отображений, образы которых имели сложную топологическую структуру. Однако, эта задача оказалась очень сложной, так как описать структуру образов многозначного отображения (возникающего при изучении этой задачи в размерностях больше 1) оказалось невозможно. Некоторые результаты о существовании точек покоя обобщенных динамических систем были получены также в работах [2], [3].

В настоящей статье выделяется класс обобщенных динамических систем, для которых соответствующие многозначные отображения имеют специальный вид: они представляются в виде композиции однозначного непрерывного отображения и многозначного отображения с ациклическими образами. Так как для таких отображений развита теория неподвижных точек (см., например, [2], [4]), удастся доказать некоторые теоремы о существовании точек покоя для динамических систем из этого класса.

Необходимые в дальнейшем сведения из теории обобщенных динамических систем содержатся в монографиях [5]–[7].

1. Основные факты теории обобщенных динамических систем. Пусть Y – подмножество банахова пространства E . Обозначим через $K(Y)$ множество всех непустых компактных подмножеств в Y , через $Kv(Y)$ множество всех непустых компактных выпуклых подмножеств в Y .

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00360.

Многозначное отображение (М-отображение) метрического пространства X в метрическое пространство Z – это соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subset Z$, называемое *образом точки x* . В дальнейшем, если образы М-отображения F являются компактами, то будем записывать это следующим образом: $F: X \rightarrow K(Z)$. Аналогично, $F: X \rightarrow Kv(Z)$ означает, что образы $F(x)$ являются выпуклыми компактными множествами.

Графиком многозначного отображения $F: X \rightarrow K(Z)$ называется множество

$$\Gamma_X(F) = \{(x, z) \mid z \in F(x), x \in X\} \subset X \times Z.$$

Естественно определены проекции $t: \Gamma_X(F) \rightarrow X$, $t(x, z) = x$, и $r: \Gamma_X(F) \rightarrow Z$, $r(x, z) = z$.

Очевидно, что для любого $x \in X$ справедливо равенство $F(x) = r \cdot t^{-1}(x)$.

Всюду в дальнейшем М-отображения обозначаются прописными, а однозначные – строчными буквами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многозначное отображение $F: X \rightarrow C(Z)$ называется *полу-непрерывным сверху в точке $x_0 \in X$* , если для любого открытого множества $V \subset Z$, $V \supset F(x_0)$, существует открытая окрестность U точки x_0 такая, что $F(U) \subset V$.

Если отображение F полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$, то оно называется *полунепрерывным сверху*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Многозначное отображение $F: X \rightarrow C(Z)$ называется *полунепрерывным снизу в точке $x_0 \in X$* , если для любого открытого множества $V \subset Z$ такого, что $F(x_0) \cap V \neq \varnothing$, найдется открытая окрестность U точки x_0 такая, что $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для любого $x \in U$.

Если F полунепрерывно снизу в каждой точке $x \in X$, то оно называется *полунепрерывным снизу*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Многозначное отображение $F: X \rightarrow C(Z)$ называется *непрерывным*, если оно одновременно полунепрерывно сверху и снизу.

Пусть E – банахово пространство, $X \subset E$, $F: X \rightarrow C(E)$ – некоторое М-отображение. Точку x_0 будем называть *неподвижной точкой* М-отображения F , если $x_0 \in F(x_0)$.

Существует несколько различных определений обобщенной динамической системы (динамической системы без единственности). Наиболее распространенным является определение, предложенное Барбашиным [8].

Пусть X – топологическое пространство, $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, $\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Многозначное отображение $\Psi: X \times \mathbb{R} \rightarrow K(X)$ называется *обобщенной динамической системой*, если выполнены следующие условия:

- 1) $\Psi(\cdot, 0): X \rightarrow X$ является id_X ;
- 2) для любых $x \in X$ и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 \cdot t_2 \geq 0$, имеем $\Psi(\Psi(x, t_1), t_2) = \Psi(x, t_1 + t_2)$;
- 3) для любых $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$ из того, что $y \in \Psi(x, t)$ следует, что $x \in \Psi(y, -t)$;
- 4) М-отображение Ψ полунепрерывно сверху;
- 5) для любого $x_0 \in X$ М-отображение $\Psi(x_0, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow K(X)$ непрерывно.

Примером обобщенной динамической системы является система, задаваемая оператором сдвига по траекториям автономного дифференциального включения (или дифференциального уравнения без единственности): $\dot{x} \in F(x)$, где $F: X \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывное сверху М-отображение и решения данного включения нелокально продолжимы на всю числовую ось.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Траекторией обобщенной динамической системы на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ называется непрерывное отображение $x: [a, b] \rightarrow X$, удовлетворяющее для любых $t_0, t_1 \in [a, b]$ соотношению $x(t_1) \in \Psi(x(t_0), t_1 - t_0)$.*

В дальнейшем X является метрическим пространством.

Справедливы следующие свойства траекторий обобщенных динамических систем (см., например, [5]).

СВОЙСТВО 1. *Всякая траектория обобщенной динамической системы является непрерывным отображением.*

СВОЙСТВО 2. *Если x_1 – траектория обобщенной динамической системы на промежутке $[a, b]$, а x_2 – траектория этой системы на промежутке $[b, c]$, причем $x_1(b) = x_2(b)$, то отображение $x: [a, c] \rightarrow X$,*

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & \text{если } t \in [a, b], \\ x_2(t), & \text{если } t \in (b, c], \end{cases}$$

также является траекторией этой системы на промежутке $[a, c]$.

СВОЙСТВО 3. *Если Ψ – обобщенная динамическая система, то для любых $a \leq b$, $x_1 \in \Psi(x_0, b - a)$ на отрезке $[a, b]$ существует траектория x такая, что $x(a) = x_0$, $x(b) = x_1$.*

Пусть $A \subset X$. Обозначим через $\Sigma(A, [a, b])$ множество траекторий x системы Ψ на отрезке $[a, b]$ таких, что $x(a) \in A$.

СВОЙСТВО 4. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $\Psi: X \times \mathbb{R} \rightarrow K(X)$ – обобщенная динамическая система. Тогда для любого компактного подмножества $A \subset X$ и любого $[a, b] \subset \mathbb{R}$ множество $\Sigma(A, [a, b])$ компактно в топологии равномерной сходимости.*

Заменив в определении 4 числовую прямую $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}_+$ и исключив условие 3), получим определение односторонней обобщенной динамической системы. Для односторонней динамической системы естественно определяется понятие траектории и справедливы свойства, аналогичные свойствам 1–4. Кроме этого, справедливо следующее свойство.

ЛЕММА 1. *Пусть X – компактное метрическое пространство, $\Psi: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow K(X)$ – односторонняя динамическая система. Тогда М-отображение $\Sigma: X \rightarrow K(C([0, t], X))$, $\Sigma(x) = \Sigma(x, [0, T])$, является полунепрерывным сверху.*

Доказательство этой леммы очевидно.

2. Аппроксимируемые динамические системы. Пусть $\Psi: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow K(X)$ – односторонняя динамическая система.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем говорить, что односторонняя динамическая система Ψ является *аппроксимируемой на множестве X* , если существует последовательность динамических систем $\{f_n\}$, $f_n: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ (*аппроксимирующее семейство*) таких, что выполнены следующие условия:

- 1) для любых $(x, t) \in X \times \mathbb{R}_+$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n(x, t); \Psi(x, t)) = 0;$$

- 2) для любых $\varepsilon > 0$, $T > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$ такое, что для $t_0, t_1 \in [0, T]$, $|t_0 - t_1| < \delta$, справедливо неравенство

$$\rho(f_n(x, t_0); f_n(x, t_1)) < \varepsilon$$

для любых n и $x \in X$.

ПРИМЕР. Пусть $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Kv}(\mathbb{R}^n)$ – полунепрерывное сверху M -отображение. Пусть существует число a такое, что

$$\max_{y \in F(x)} \|y\| \leq a.$$

Рассмотрим дифференциальное включение $\dot{x} \in F(x)$. При сделанных предположениях решения задачи Коши этого включения существуют и нелокально продолжимы на множество $\mathbb{R}_+$ при любых начальных условиях.

Рассмотрим одностороннюю обобщенную динамическую систему Ψ , порожденную оператором сдвига по траекториям этого дифференциального включения. Нетрудно доказать, что эта динамическая система является аппроксимируемой в $\mathbb{R}^n$. Здесь, аппроксимирующее семейство порождено операторами сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, правые части которых являются ε -аппроксимациями M -отображения F .

Изучим свойства интегральной воронки $\Sigma(x, [a, b])$ аппроксимируемой динамической системы. Нам понадобится следующее понятие.

Пусть X – метрическое пространство, $H^n(X, G)$ – когомологии Александера–Чеха пространства X с коэффициентами в группе G (см., например, [9]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Будем говорить, что пространство X является G -*ациклическим*, если приведенные когомологии $\overline{H}^n(X, G) = 0$ для любого $n \geq 0$.

В дальнейшем будем опускать G и говорить просто об ациклическости, считая группу G фиксированной.

Ациклическость X означает, что это множество устроено достаточно просто, в нем отсутствуют “дыры”.

ЛЕММА 2. Пусть X – метрическое пространство, A – компактное подмножество в X . Пусть существует последовательность полунепрерывных сверху M -отображений $\{F_n\}$, $F_n: [0, 1] \times A \rightarrow K(X)$, удовлетворяющих условиям:

- 1) множество $F_n(\lambda, x)$ является ациклическим для любых $(\lambda, x) \in [0, 1] \times A$ и любого n ;
- 2) для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для любого $n \geq n_0$ множество $F_n([0, 1] \times A) \subset U_\varepsilon(A)$;

- 3) для любых $x \in A$, $n \in N$ выполнено включение $x \in F_n(0, x)$;
 4) для любого n существует точка $a_n \in X$ такая, что $a_n \in F_n(1, x)$ для всех $x \in A$.

Тогда множество A является ациклическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε – произвольное положительное число, $F_n([0, 1] \times A) \subset U_\varepsilon(A)$. Пусть отображения $i_n, j_n: A \rightarrow X$ определены соотношениями $i_n(x) = x$, $j_n(x) = a_n$. Обозначим через I отрезок $[0, 1]$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_\varepsilon(A) & & \\
 & \nearrow r_0 & \uparrow r & \nwarrow r_1 & \\
 \Gamma_A(i_n) & \xrightarrow{\hat{\alpha}_0} & \Gamma_{I \times A}(F_n) & \xrightarrow{\hat{\alpha}_1} & \Gamma_A(j_n) \\
 t_0 \downarrow & & t \downarrow & & t_1 \downarrow \\
 A & \xrightarrow{\alpha_0} & I \times A & \xrightarrow{\alpha_1} & A
 \end{array}$$

Здесь $\alpha_0(x) = (0, x)$, $\alpha_1(x) = (1, x)$; t_0, t, t_1 – проекции из графиков на области определений; r_0, r, r_1 – проекции из графиков на области значений; $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\alpha}_1$ – соответствующие вложения.

Переходя к индуцированной диаграмме в приведенных когомологиях, замечаем, что гомоморфизмы $t_0^*, t_1^*, \alpha_0^*, \alpha_1^*$ являются изоморфизмами, а t^* – изоморфизм в силу теоремы Виеториса (см. [10]). Тогда гомоморфизмы $\hat{\alpha}_0^*$ и $\hat{\alpha}_1^*$ также являются изоморфизмами. Следовательно, $r_0^* = \hat{\alpha}_0^* \cdot (\hat{\alpha}_1^*)^{-1} \cdot r_1^*$. Так как гомоморфизм r_0^* может быть представлен в виде $\hat{r}_1^* \cdot i^*$, где

$$\Gamma_A(j_n) \xrightarrow{\hat{r}_1} a_n \xrightarrow{i} U_\varepsilon(A),$$

то r_1^* является нулевым гомоморфизмом. Следовательно, $r_0^* = 0$.

Таким образом, вложение $i_n: A \rightarrow U_\varepsilon(A)$ индуцирует нулевой гомоморфизм для любого $\varepsilon > 0$. Так как в силу жесткости теории когомологий Александера–Чеха (см., например, [9])

$$\varinjlim \overline{H}^k(U_\varepsilon(A), G) = \overline{H}^k(A, G),$$

то $\overline{H}^k(A, G) = 0$ для любого $k \geq 0$.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – компактное метрическое пространство. Пусть $\Psi: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow K(X)$ – односторонняя динамическая система. Если Ψ является аппроксимируемой на X , то множество $\Sigma(x_0, [0, T]) \subset C([0, T], X)$ является G -ациклическим для любой группы G и любых $x_0 \in X$ и $T > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_n: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ – аппроксимирующее семейство динамической системы Ψ . Рассмотрим последовательность непрерывных отображений $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n: \Sigma(x_0, [0, t]) \times [0, 1] \rightarrow C([0, T], X)$, где φ_n определено условием

$$\varphi_n(u, \lambda)(t) = \begin{cases} u(t), & \text{если } t \in [0, (1 - \lambda)T], \\ f_n(u((1 - \lambda)T), t - (1 - \lambda)T), & \text{если } t \in ((1 - \lambda)T, T]. \end{cases}$$

Покажем, что последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условиям леммы 2.

Действительно, образ $\varphi_n(u, \lambda)$ – это одна точка, т.е. G -ациклическое множество. При $\lambda = 0$ получаем, что $\varphi_n(u(\cdot), 0)(t) = u(t)$, т.е. является единичным отображением. При $\lambda = 1$ получаем, что $\varphi_n(u(\cdot), 1) = f_n(x_0, t)$, т.е. не зависит от выбора $u(\cdot) \in \Sigma(x_0, [0, t])$.

Осталось доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для любого $n \geq n_0$ и любых $u(\cdot) \in \Sigma(x_0, [0, T])$, $\lambda \in [0, 1]$ выполнено включение

$$\varphi_n(u(\cdot), \lambda) \in U_\varepsilon(\Sigma(x_0, [0, T])) \subset C_{([0, t], X)}.$$

Предположим противное. Тогда существуют $x_0, \varepsilon_0 > 0$, последовательности $\{\lambda_n\} \in [0, 1]$, $\{u_n(\cdot)\} \in \Sigma(x_0, [0, T])$ такие, что

$$\rho(\varphi_n(u_n(\cdot), \lambda_n); \Sigma(x_0, [0, T])) \geq \varepsilon_0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_n \rightarrow \lambda_* \in [0, 1]$, $u_n(\cdot) \rightarrow u_* \in \Sigma(x_0, [0, T])$.

Положим $x_n(\cdot) = \varphi_n(u_n(\cdot), \lambda_n)$. В силу сделанных предположений множество $A = \{x_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty \subset C_{([0, T], X)}$ является равномерно непрерывным. Следовательно, из последовательности $\{x_n(\cdot)\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность $\{x_n(\cdot)\}$ сходится к $x_*(\cdot)$ в пространстве $C_{([0, T], X)}$. Покажем, что $x_*(\cdot)$ принадлежит множеству $\Sigma(x_0, [0, T])$.

Так как $x_n(t) = u_n(t)$ при $t \in [0, (1 - \lambda_n)T]$, то $x_*(t) = u_*(t)$ при $t \in [0, (1 - \lambda_*)T]$, т.е. $x_*(\cdot)$ является траекторией динамической системы Ψ на промежутке $[0, (1 - \lambda_*)T]$, выходящей из точки x_0 .

Покажем теперь, что $x_*(\cdot)$ является траекторией динамической системы Ψ на промежутке $[(1 - \lambda_*)T, T]$. Пусть $t_0, t_1 \in [(1 - \lambda_*)T, T]$, $t_0 < t_1$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, t_1 - t_0)$ существует номер n_0 такой, что $(1 - \lambda_n)T < t_0 + \varepsilon < t_1$ при $n \geq n_0$.

По построению функций $x_n(\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} x_n(t_1) &= f_n(u_n((1 - \lambda_n)T); t_1 - (1 - \lambda_n)T) \\ &= f_n(f_n(u_n((1 - \lambda_n)T); t_0 + \varepsilon - (1 - \lambda_n)T), t_1 - t_0 - \varepsilon). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$f_n(u_n((1 - \lambda_n)T); t_0 + \varepsilon - (1 - \lambda_n)T) = x_n(t_0 + \varepsilon).$$

Тогда

$$x_n(t_1) = f_n(x_n(t_0 + \varepsilon), t_1 - t_0 - \varepsilon).$$

В силу определения 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n(x_n(t_0 + \varepsilon), t_1 - t_0 - \varepsilon); \Psi(x_n(t_0 + \varepsilon), t_1 - t_0 - \varepsilon)) = 0.$$

Откуда в силу полунепрерывности сверху M -отображения Ψ , равномерной непрерывности последовательности $\{f_n\}$ и сходимости $\{x_n(\cdot)\} \rightarrow x_*(\cdot)$ получаем включение

$$x_*(t_1) \in U_\eta(\Psi(x_*(t_0), t_1 - t_0))$$

для любого $\eta > 0$. Следовательно, $x_*(t_1) \in \Psi(x_*(t_0), t_1 - t_0)$, т.е. $x_*(\cdot)$ является траекторией динамической системы Ψ на промежутке $[(1 - \lambda_*)T, T]$. Из свойства 2 получаем, что $x_*(\cdot) \in \Sigma(x_0, [0, T])$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

3. Точки покоя обобщенных динамических систем. Пусть $\Psi: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ – односторонняя обобщенная динамическая система.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Точкой покоя односторонней динамической системы Ψ называется точка $x_0 \in X$ такая, что $x_0 \in \Psi(x_0, t)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Наличие точки покоя динамической системы эквивалентно существованию постоянной траектории этой системы.

Справедливо следующее утверждение (см. [1]).

ЛЕММА 3. Пусть X – компактное метрическое пространство, M -отображение $F: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow K(X)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $F(x, 0) = x$ для любого $x \in X$;
- 2) $F(x, t_1 + t_2) \supset F(F(x, t_1), t_2)$ для $0 < t_1, t_2 < \infty$;
- 3) F – полунепрерывное сверху M -отображение.

Тогда для существования точки покоя системы F необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись $x_\varepsilon \in X$ и $\delta_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ такие, что $x_\varepsilon \in F(x_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$.

Очевидно, что односторонняя динамическая система Ψ удовлетворяет условиям этой леммы. Следовательно, лемма 3 позволяет сводить теоремы существования точек покоя односторонних обобщенных динамических систем к теоремам о неподвижных точках M -отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Метрическое пространство Y называется абсолютным окрестностным ретрактом (ANR-пространством), если для любого гомеоморфизма h , отображающего Y на замкнутое подмножество $h(Y)$ метрического пространства X , множество $h(Y)$ является ретрактом некоторого открытого множества $U \subset X$ такого, что $h(Y) \subset U$.

Справедлива следующая теорема (см., например, [4]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть Y – компактное ациклическое ANR-пространство и M -отображение $F: Y \rightarrow K(Y)$ удовлетворяет следующему условию:

существуют метрическое пространство Z , непрерывное отображение $l: Z \rightarrow Y$ и полунепрерывное сверху M -отображение $G: Y \rightarrow K(Z)$ с ациклическими образами такие, что $F(x) = l \cdot G(x)$ для любого $x \in Y$.

Тогда M -отображение F имеет в Y неподвижную точку.

Заметим, что эта теорема является обобщением теоремы Какутани (см. [11]), так как любое замкнутое выпуклое ограниченное подмножество конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$ является компактным ациклическим ANR-пространством.

Пусть $\Psi: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ – односторонняя динамическая система.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Множество $Y \subset X$ называется инвариантным для Ψ , если для любых $x \in Y, t \in \mathbb{R}_+$ справедливо включение $\Psi(x, t) \subset Y$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – компактное метрическое пространство, $\Psi: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow K(X)$ – односторонняя обобщенная динамическая система. Пусть компакт $Y \subset X$ является инвариантным множеством для Ψ . Если

- 1) множество Y является ациклическим ANR-пространством,
- 2) динамическая система Ψ является аппроксимируемой,

то динамическая система Ψ имеет в Y точку покоя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 множество $\Sigma(x_0, [0, T])$ является ациклическим для любых $x_0 \in X, T > 0$. Рассмотрим M -отображение $F_T: Y \rightarrow K(Y)$, определенное условием

$$F_T(x_0) = \{y \in Y \mid y = x(T), x(\cdot) \in \Sigma(x_0, [0, T])\}.$$

В силу свойства 3 траекторий обобщенных динамических систем очевидно, что $F_T(x_0) = \Psi(x_0, T)$ для любых $x_0 \in Y, T > 0$. С другой стороны, $F_T(x_0) = l \cdot \Sigma(x_0)$, где $\Sigma: Y \rightarrow K(C_{([0, T], X)})$, $\Sigma(x_0) = \Sigma(x_0, [0, T])$ и имеет ациклические образы, а $l: C_{([0, T], X)} \rightarrow X$, $l(x(\cdot)) = x(T)$.

В силу леммы 1 M -отображение Σ является полунепрерывным сверху. Очевидно также, что отображение l является непрерывным. Поэтому M -отображение F_T удовлетворяет условиям теоремы 2. Следовательно, у него существует неподвижная точка в Y .

Таким образом, в силу произвольности T получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_\varepsilon \in Y$ такая, что $x_\varepsilon \in F_\varepsilon(x_\varepsilon) = \Psi(x_\varepsilon, \varepsilon)$. Следовательно, в силу леммы 3 односторонняя динамическая система Ψ имеет точку покоя в Y .

Теорема доказана.

Используя число Лефшеца для многозначных отображений (см. [4]) и ациклическость M -отображения Σ , можно доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – компактное ANR-пространство, $\Psi: X \times \mathbb{R}_+ \rightarrow K(X)$ – односторонняя динамическая система. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) динамическая система Ψ является аппроксимируемой на X ;
- 2) существует $T \in \mathbb{R}_+$ такое, что множество $\Psi(X, T)$ ациклично в X .

Тогда система Ψ имеет в X точку покоя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_n = T/n$. Рассмотрим M -отображение $F_n = F_{t_n}: X \rightarrow K(X)$, определенное условием

$$F_n(x_0) = \{y \in Y \mid y = x(t_n), x(\cdot) \in \Sigma(x_0, [0, t_n])\}.$$

В силу свойств обобщенной динамической системы имеем равенство $F_T(x) = (F_n)^n(x)$. Действительно, если $y \in F_T(x_0)$, то существует траектория $x(\cdot) \in \Sigma(x_0, [0, T])$ такая, что $x(T) = y$. Имеем,

$$x(t_n) \in F_n(x_0), \quad x(2t_n) \in \Psi(x(t_n), t_n) = F_n(x(t_n)) \in (F_n)^2(x_0).$$

Продолжая эту процедуру дальше, получим $y = x(T) \in (F_n)^n(x)$.

В обратную сторону, пусть $y \in (F_n)^n(x)$. Тогда найдется точка $y_{n-1} \in (F_n)^{n-1}(x)$ такая, что $y \in F_n(y_{n-1})$. Следовательно, существует траектория $x_{n-1}(\cdot) \in \Sigma(y_{n-1}, [0, t_n])$. Тогда отображение $z_{n-1}(t) = x_{n-1}(t - (n-1)t_n)$ будет траекторией динамической системы на промежутке $[(n-1)t_n, T]$. Аналогичный процесс построения траекторий можно продолжить дальше, тогда получим последовательность траекторий $z_0(\cdot), z_1(\cdot), \dots, z_{n-1}(\cdot)$ на соответствующих промежутках $[0, t_n], [t_n, 2t_n], \dots, [(n-1)t_n, T]$.

Склеив эти траектории, получим траекторию $z(\cdot)$ такую, что $y = z(T)$. Это и доказывает требуемое равенство.

Как и в теореме 3, M -отображение $F_n(x) = l \cdot \Sigma(x)$, где $\Sigma: X \rightarrow K(C_{([0, t_n], X)})$, $\Sigma(x) = \Sigma(x, [0, t_n])$ и имеет ациклические образы, а $l: C_{([0, t_n], X)} \rightarrow X$, $l(x(\cdot)) = x(t_n)$.

Для таких M -отображений построено число Лефшеца и доказана теорема о неподвижной точке (см., например, [4]). Можно доказать (см. [4]), что число Лефшеца $\Lambda(F_n) = 1$, так как $(F_n)^n(X)$ является ациклическим множеством в X . Следовательно, M -отображение F_n имеет в X неподвижную точку x_n , т.е. $x_n \in F_n(x_n) = \Psi(t_n, x_n)$.

Так как такую точку x_n можно построить для любого n , получаем последовательность точек $\{x_n\}$, которые являются неподвижными для M -отображения Ψ при $t_n = T/n$. В силу того, что последовательность $\{t_n\}$ стремится к 0, выполнены все условия леммы 3. Следовательно, динамическая система Ψ имеет точку покоя, что и доказывает теорему.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мышкис А. Д. Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории // Матем. сб. 1954. Т. 34(76). № 3. С. 525–540.
- [2] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // УМН. 1980. Т. 35. № 1. С. 59–126.
- [3] Обуховский В. В. Асимптотические теоремы о неподвижной точке и точке покоя динамических систем без единственности // Сб. работ аспирантов по теории функций и дифференц. уравнениям. Воронеж: ВГУ, 1974. С. 30–38.
- [4] Gorniewicz L. Homological methods in fixed point theory of multi-valued maps. Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). V. 129. Warsaw: Polish Acad. Sci., 1975.
- [5] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.
- [6] Сибирский К. С., Шубэ А. С. Полудинамические системы. Кишинев: Штиинца, 1987.
- [7] Szego G. P., Treccani G. Semigrupper di trasformazioni multivoche. Lecture Notes in Math. V. 101. Berlin: Springer, 1969.
- [8] Варбашин Е. А. К теории обобщенных динамических систем // Уч. записки МГУ. 1948. Т. 135. № 2. С. 110–113.
- [9] Спенсер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
- [10] Скляренко Е. Г. О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии // УМН. 1964. Т. 19. № 6. С. 47–70.
- [11] Kakutani S. A generalization of Brouwer's fixed point theorem // Duke Math. J. 1941. V. 8. № 3. P. 457–459.

Воронежский государственный университет
E-mail: gelman@alg.vsu.ru

Поступило
18.04.96
Исправленный вариант
15.10.97