Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, Резонансная теорема для подпространств, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 803–811

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10250>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:17:18

Резонансная теорема для подпространств

Е. И. Бережной

При некоторых дополнительных предположениях на неограниченную последовательность операторов и геометрию пространств показано, что в классической резонансной теореме Банаха–Штейнгауза множество расходимости содержит за исключением нуля некоторое бесконечномерное пространство.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10250

В геометрической теории банаховых пространств хорошо известна резонансная теорема Банаха–Штейнгауза, которая гласит, что если последовательность норм линейных операторов $B_n: X \rightarrow Y$ неограничена, то существует множество второй категории $V \subset X$ такое, что для каждого $x \in V$ выполняется $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|B_n x \mid Y\| = \infty$. В классическом варианте теоремы Банаха–Штейнгауза пространства банаховы, а операторы линейные. Для решения некоторых задач было бы полезно, чтобы множество, на котором последовательность $\{B_n x\}_1^\infty$ неограничена, также имело линейную структуру. Таким образом, имеет смысл следующая

Задача А. Пусть заданы два банаховых пространства X, Y и последовательность линейных операторов $B_n: X \rightarrow Y$, причем

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|B_n \mid X \rightarrow Y\| = \infty.$$

Существует ли подпространство $Z \subset X$ размерности больше 1 (бесконечномерное подпространство) такое, что для каждого отличного от тождественного нуля $x \in Z$ выполняется соотношение

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|B_n x \mid Y\| = \infty?$$

Символом $\|x \mid X\|$ обозначается норма элемента x в пространстве X , а символом $\|B \mid X \rightarrow Y\|$ – норма оператора B , действующего из X в Y .

Для иллюстрации задачи А приведем два примера.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00147).

ОПРОВЕРГАЮЩИЙ ПРИМЕР. Пусть на банаховом пространстве X задан ненулевой линейный функционал $f_0: X \rightarrow R$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ формулой $f_n(x) = nf_0(x)$ определим семейство линейных функционалов на X . Для элементов этого семейства будет выполнено равенство

$$\|f_n | X \rightarrow R\| = n\|f_0 | X \rightarrow R\|$$

и, следовательно, выполнено соотношение

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n | X \rightarrow R\| = \infty.$$

Если имеются два линейно независимых вектора $x_0, x_1 \in X$, для которых $f_0(x_0) \neq 0$, $f_0(x_1) \neq 0$ и, следовательно,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x_0)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x_1)| = \infty,$$

то для вектора

$$x_2 = x_0 - \frac{f_0(x_0)}{f_0(x_1)} x_1$$

при любом $n \in \mathbb{N}$ будет выполняться соотношение $f_n(x_2) = 0$. Таким образом, любое подпространство в X , в котором для каждого отличного от нуля вектора будет выполнено равенство $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| = \infty$, будет одномерным, натянутым на вектор $x \notin \text{Ker } f_0$.

ПОДТВЕРЖДАЮЩИЙ ПРИМЕР. Пусть в банаховом пространстве X задано семейство векторов $\{e_n\}_1^\infty$, для которых выполнены следующие условия: для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $\|e_n | X\| = 1$,

$$\inf\{\|e_n - x | X\| : x \in \text{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots)\} \geq \frac{1}{2}.$$

С помощью теоремы Хана–Банаха построим последовательность линейных функционалов $f_{nk}: X \rightarrow R$, удовлетворяющих условиям

$$f_{nk}(e_n) = k, \quad f_{nk}(x) = 0 \quad \forall x \in \text{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots).$$

Тогда для любого отличного от нуля $x \in \text{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}, \dots)$ выполняется равенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}} |f_{n,k}(x)| = \infty.$$

Основной результат работы представлен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть задана пара банаховых пространств X, Y , подпространство $Z \subset X$ и последовательность линейных операторов $B_n: X \rightarrow Y$ такая, что

$$\|B_n | X \rightarrow Y\| = \sup_{z \in Z, \|z\|_X \leq 1} \|B_n z | Y\| = \alpha_n < \infty, \quad (1)$$

$$\sup_n \alpha_n = \infty, \quad (2)$$

$$\forall x \in Z \quad \sup_n \|B_n x | Y\| < \infty. \quad (3)$$

Тогда существует подпространство $X_0 \subset X$ бесконечной размерности такое, что для любого отличного от нуля вектора $x \in X_0$ выполняется равенство

$$\sup_n \|B_n x \mid Y\| = \infty. \quad (4)$$

Для доказательства теоремы нам потребуются дополнительные построения, которые мы оформим в виде лемм.

ЛЕММА 1. Пусть задана пара банаховых пространств X, Y , подпространство $Z \subset X$ и последовательность линейных операторов $B_n: X \rightarrow Y$ такая, что выполнены условия (1)–(3).

Пусть задана последовательность чисел $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ с $0 < \varepsilon_k < 1/10$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k \alpha_k = \infty. \quad (5)$$

Тогда существует последовательность пар $\{B_{n_k}, x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, где B_{n_k} – оператор из последовательности операторов B_n , а x_{n_k} – вектор из Z такой, что выполнены соотношения

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|x_{n_k} \mid X\| = 1, \quad (6)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|B_{n_k} x_{n_k} \mid Y\| \geq \alpha_{n_k} (1 - \varepsilon_{n_k}), \quad (7)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \inf_{x \in L_k} \|x_{n_{k+1}} - x \mid L_k\| \geq 1 - 2\varepsilon_{n_{k+1}}. \quad (8)$$

Здесь $L_k = \text{Lin}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$ – линейная оболочка векторов $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем элемент $x_n \in Z$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\|x_n \mid X\| = 1, \quad \|B_n x_n \mid Y\| \geq \alpha_n (1 - \varepsilon_n), \quad (9)$$

и из построенной последовательности $\{x_n\}_1^\infty$ выберем подпоследовательность $\{x_{n_i}\}_1^\infty$ следующим образом. Положим $x_{n_1} = x_1$; пусть семейство линейно независимых векторов $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ построено. Покажем, как построить $x_{n_{k+1}}$. Поскольку для каждого $x \in Z$ выполняется неравенство (3), а L_k – замкнутое подпространство, то из классической теоремы Банаха–Штейнгауза следует неравенство

$$\beta_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|B_n \mid L_k \rightarrow Y\| < \infty. \quad (10)$$

Выберем натуральное число n_{k+1} такое, что $n_{k+1} > \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$2 \frac{\beta_k}{\alpha_{n_{k+1}}} < \varepsilon_{n_{k+1}}. \quad (11)$$

Поскольку выполнены условия (2), (5) и (10), такой выбор всегда возможен. Далее, по номеру n_{k+1} из последовательности $\{x_n\}_1^\infty$ выберем вектор $x_{n_{k+1}}$ и оператор $B_{n_{k+1}}$.

Покажем, что построенная последовательность удовлетворяет (6)–(8). Выполнение (6), (7) следует из (9). Доказательство (8) можно получить следующим образом. Если для $x \in L_k$ выполняется неравенство $\|x \mid L_k\| \geq 2$, то

$$\|x_{n_{k+1}} - x \mid X\| \geq \|x \mid L_k\| - \|x_{n_{k+1}} \mid X\| \geq 2 - 1 = 1, \quad (12)$$

если же выполняется неравенство $\|x \mid L_k\| < 2$, то имеет место оценка

$$\begin{aligned} \alpha_{n_{k+1}} \|x_{n_{k+1}} - x \mid X\| &\geq \|B_{n_{k+1}}(x_{n_{k+1}} - x) \mid Y\| \\ &\geq \|B_{n_{k+1}}(x_{n_{k+1}}) \mid Y\| - \|B_{n_{k+1}}x \mid Y\| \\ &\geq \alpha_{n_{k+1}}(1 - \varepsilon_{n_{k+1}}) - \beta_k \|x \mid X\| \\ &\geq \alpha_{n_{k+1}}(1 - \varepsilon_{n_{k+1}}) - 2\beta_k, \end{aligned}$$

или

$$\|x_{n_{k+1}} - x \mid X\| \geq 1 - \varepsilon_{n_{k+1}} - 2 \frac{\beta_k}{\alpha_{n_{k+1}}},$$

что вместе с (11) и (12) как раз и доказывает (8).

Лемма доказана.

Построенную в лемме 1 последовательность $\{B_{n_k}, x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть *R-системой*.

Отметим, что построенная последовательность $\{x_{n_k}\}_1^{\infty}$ является почти перпендикулярной.

ЛЕММА 2. *Зафиксируем последовательность положительных чисел $\{a_k\}_1^{\infty}$, удовлетворяющую соотношениям*

$$a_1 = 10^{-1}, \quad a_{k+1} \leq 10^{-1}a_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть выполнены предположения леммы 1 и для последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, при всех $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяющей дополнительному соотношению $\varepsilon_k \leq a_k$, построена R-система $\{B_k, x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть числовая последовательность $\{\beta_k\}_1^{\infty}$ определена формулой (10). Пусть задан набор чисел $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ такой, что для всех $j = 1, 2, \dots, j_0 - 1, j_0 + 1, \dots$ выполняются неравенства $|\xi_j| \leq 1$, и $|\xi_{j_0}| \in [1/2, 1]$.

По набору векторов $\{x_k\}_1^{\infty}$ из R-системы $\{B_k, x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательностям $\{a_k\}_1^{\infty}$, $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ построим вектор

$$z_{\xi} = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j x_j a_j. \quad (13)$$

Тогда будет справедливо соотношение

$$\|B_{j_0} z_{\xi} \mid Y\| > \frac{a_{j_0} \alpha_{j_0}}{4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j x_j a_j \mid X \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j| a_j \|x_j \mid X\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$$

следует, что z_{ξ} определен корректно.

Перейдем к оценке $\|B_{j_0} z_\xi \mid Y\| = d_{j_0}$.

Из предположений леммы получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} d_{j_0} &= \|B_{j_0} z_\xi \mid Y\| = \left\| B_{j_0} \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j x_j a_j \mid Y \right\| \\ &\geq \|B_{j_0} \xi_{j_0} x_{j_0} a_{j_0} \mid Y\| - \left\| B_{j_0} \sum_{j=1}^{j_0-1} \xi_j x_j a_j \mid Y \right\| - \left\| B_{j_0} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \xi_j x_j a_j \mid Y \right\| \\ &\geq \frac{a_{j_0}}{2} \alpha_{j_0} (1 - \varepsilon_{j_0}) - \beta_{j_0-1} \left\| \sum_{j=1}^{j_0-1} \xi_j x_j a_j \mid X \right\| - \alpha_{j_0} \left\| \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \xi_j x_j a_j \mid X \right\| \\ &\geq a_{j_0} \alpha_{j_0} \frac{1 - \varepsilon_{j_0}}{2} - \beta_{j_0-1} \sum_{j=1}^{j_0-1} a_j - \alpha_{j_0} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} a_j > a_{j_0} \alpha_{j_0} \frac{1 - \varepsilon_{j_0}}{2} - \frac{1}{9} \beta_{j_0-1} - \frac{1}{9} a_{j_0} \alpha_{j_0}. \end{aligned}$$

Поэтому из (11) и из ограничений на $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$ и $\{a_k\}_1^\infty$ следует неравенство

$$d_{j_0} > a_{j_0} \alpha_{j_0} \left(\frac{1 - \varepsilon_{j_0}}{2} - \frac{1}{9} \right) - \frac{\varepsilon_{j_0} \alpha_{j_0}}{18} > \frac{a_{j_0} \alpha_{j_0}}{4}.$$

Лемма доказана.

Теперь можно перейти к доказательству теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Положим $a_k = 10^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$, и выберем последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ с $0 < \varepsilon_k < 10^{-2k}$. Без ограничения общности можно считать, что условие (5) выполнено, так как в противном случае нужно перейти к подпоследовательности последовательности $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$.

Далее, применим лемму 1 для последовательности операторов $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ и получим R -систему $\{B_{n_k}, x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, которую, чтобы не перегружать обозначения, мы снова обозначим через $\{B_n, x_n\}_{n=1}^\infty$.

Теперь построим новую последовательность элементов пространства X , которая будет играть решающую роль в доказательстве теоремы.

Занумеруем все простые числа в порядке возрастания и обозначим i -е простое число через p_i .

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$e_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{p_n^i} x_{p_n^i}. \quad (14)$$

Отметим, что из бесконечности множества простых чисел следует, что последовательность $\{e_n\}$ бесконечна. Из соотношений (6) и явного вида $\{a_k\}_1^\infty$ получим, что ряд, стоящий в правой части (14), сходится в X абсолютно и поэтому элементы $\{e_n\}_1^\infty$ определены корректно. Более того, справедливо важное неравенство

$$\|e_n \mid X\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_{p_n^i} x_{p_n^i} \mid X \right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_{p_n^i} \leq \frac{10}{9} a_{p_n}. \quad (15)$$

Перейдем теперь к конструированию подпространства X_0 . Пусть дана числовая последовательность $\{\lambda_j\}_1^\infty$, для которой

$$\sup_j |\lambda_j| = c < \infty. \quad (16)$$

Положим

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j.$$

Из (15), (16) получим неравенство

$$\begin{aligned} \|z \mid X\| &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j \mid X \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \|e_j \mid X\| \\ &\leq \sup_j |\lambda_j| \sum_{j=1}^{\infty} \|e_j \mid X\| \leq \frac{10}{9} \sup_j |\lambda_j| \sum_{j=1}^{\infty} a_{p_j} = \frac{10}{9} c \sum_{j=1}^{\infty} a_{p_j}, \end{aligned}$$

из которого следует, что элемент z определен корректно.

Покажем, что выполняется соотношение

$$\sup_n \|B_n z \mid Y\| = \infty. \quad (17)$$

Для этого выберем сначала индекс n_0 так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\lambda_{n_0}| \geq \frac{1}{2} \sup_j |\lambda_j|.$$

Тогда имеет место следующее равенство:

$$\|B_n z \mid Y\| = c \left\| B_n \left(\frac{1}{c} \lambda_{n_0} e_{n_0} + \sum_{j \neq n_0} \frac{1}{c} \lambda_j e_j \right) \right\|,$$

а вектор

$$\frac{1}{c} \lambda_{n_0} e_{n_0} + \sum_{j \neq n_0} \frac{1}{c} \lambda_j e_j = \frac{1}{c} \lambda_{n_0} \sum_{i=1}^{\infty} a_{p_{n_0}^i} x_{p_{n_0}^i} + \sum_{j \neq n_0} \frac{1}{c} \lambda_j e_j$$

имеет вид (13) и поэтому согласно лемме 2 и ограничениям на $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|B_{p_{n_0}^k} z \mid Y\| &= c \left\| B_{p_{n_0}^k} \left(\frac{1}{c} \lambda_{n_0} e_{n_0} + \sum_{j \neq n_0} \frac{1}{c} \lambda_j e_j \right) \mid Y \right\| \\ &\geq c \left\| B_{p_{n_0}^k} \left(\frac{\lambda_{n_0}}{c} \sum_{i=1}^{\infty} a_{p_{n_0}^i} x_{p_{n_0}^i} + \sum_{j \neq n_0} \frac{1}{c} \lambda_j e_j \right) \mid Y \right\| > \frac{c}{4} a_{p_{n_0}^k} \alpha_{p_{n_0}^k}. \end{aligned}$$

В силу (5), явного вида $\{a_k\}_1^\infty$ и ограничений на $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c}{4} a_{p_{n_0}^k} \alpha_{p_{n_0}^k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c}{4} \varepsilon_{p_{n_0}^k} \alpha_{p_{n_0}^k} = \infty.$$

Таким образом, (17) доказано.

Отметим, что из (17) следует также, что система векторов $\{e_n\}_1^\infty$ линейно независима в усиленном смысле, т.е. из представления

$$0 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$$

с ограниченной последовательностью чисел $\{\lambda_j\}_1^\infty$ следует, что для всех j выполняется равенство $\lambda_j = 0$.

С помощью системы $\{e_n\}_1^\infty$ образуем новое пространство X_0 , состоящее из таких $z \in X$, для которых верно представление

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j, \quad (18)$$

а норма определена равенством

$$\|z\|_{X_0} = \sup_j |\lambda_j|. \quad (19)$$

Поскольку для всех ограниченных последовательностей $\{\lambda_j\}_1^\infty$ ряд в правой части (18) сходится абсолютно, а система векторов $\{e_n\}_1^\infty$ линейно независима в усиленном смысле, то линейное пространство X_0 определено корректно и $X_0 \subset X$. Равенство $\dim X_0 = \infty$ следует из линейной независимости системы векторов $\{e_n\}_1^\infty$. Если же $z \in X_0$ и $z \neq 0$, то из (19) следует, что $\sup_n \|B_n z\|_Y = \infty$.

Теорема полностью доказана.

Проиллюстрируем основную теорему двумя примерами.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в пространстве $C[0, 1]$ задана равномерно ограниченная полная ортонормированная система функций $\{e_n\}_{n=1}^\infty$. Для каждой $x \in C[0, 1]$ определим операторы Фурье

$$F_n x(t) = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда существует подпространство X_0 пространства $C[0, 1]$, $\dim X_0 = \infty$, такое, что для каждого $x \in X_0$, $x \neq 0$, выполняется равенство

$$\sup_n \|F_n x(\cdot)\|_{C[0, 1]} = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим пространство Z равенством

$$Z = \left\{ x \in C[0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n x - x\|_{C[0, 1]} = 0 \right\}.$$

Прямо из определения следует, что для $X = C[0, 1]$, $Y = C[0, 1]$ и Z выполнены условия (1) и (3), а согласно теореме Олевского (см., например, [1; с. 404]) справедливо соотношение

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\|F_n|_{C[0, 1]} \rightarrow C[0, 1]\|}{\ln n} = c > 0,$$

т.е. выполнено и условие (2). Поэтому согласно теореме 1 существует подпространство бесконечной размерности в $C[0, 1]$ такое, что для каждого отличного от нуля вектора из этого подпространства ряд Фурье неограниченно расходится.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть задано банахово пространство X , состоящее из 2π -периодических функций. Пусть $C^\infty[0, 2\pi]$ плотно в X и для операторов вида

$$D_n x(t) = n \left(x \left(t + \frac{1}{n} \right) - x(t) \right)$$

справедливо соотношение

$$\sup_{x \in C^\infty[0, 2\pi], \|x\|_X \leq 1} \|D_n x\|_{C[0, 2\pi]} = \alpha_n \rightarrow \infty.$$

Тогда существует бесконечномерное подпространство в пространстве X такое, что для каждой отличной от тождественного нуля функции найдется точка из $(0, 2\pi)$, в которой нет ограниченной производной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно в качестве Y взять $C[0, 2\pi]$, а в качестве Z взять $C^\infty[0, 2\pi]$ и применить теорему 1.

Теорема 3 доказана.

К последнему факту примыкает классическая задача из геометрической теории банаховых пространств гладких функций.

ЗАДАЧА В. Пусть задано некоторое банахово пространство гладких функций X . Существует ли бесконечномерное замкнутое подпространство $Y \subset X$ такое, что у каждой отличной от тождественного нуля функции $y \in Y$ гладкость не лучше, чем у самой негладкой функции из X .

Задачей В занимались многие математики [2]–[9]. Окончательное решение задачи В для пространства $C[0, 1]$ приведено в [6], для пространств Липшица $\text{Lip}(\omega)$ соответствующий окончательный результат, включая теорему исправимости, приведен в [7]. Полное решение задачи В для пространств функций H_X^ω , удовлетворяющих интегральному условию Гёльдера, дано в [8].

Конечно, окончательные результаты для конкретных пространств из [6]–[9] гораздо более сильные, чем в теореме 3, зато теорема 3 получается простым следствием общего результата.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
- [2] V. P. Fonf, V. I. Gurariy, M. I. Kadets, “An infinite dimensional subspace $C[0, 1]$ consisting of nowhere differentiable functions”, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **52**:11–12 (1999), 13–16.
- [3] П. П. Петрушев, С. Л. Троянски, “О теореме Банаха–Мазура об универсальности $C[0, 1]$ ”, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **37**:3 (1984), 283–285.
- [4] В. И. Гуарий, “Линейное пространство состоящее из всюду недифференцируемых функций”, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **44**:5 (1991), 13–16.
- [5] I. Rodríguez-Piazza, “Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**:12 (1995), 3649–3654.

- [6] Е. И. Бережной, “Подпространство $C[0, 1]$, состоящее из функций, не имеющих конечных односторонних производных ни в одной точке”, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 348–354.
- [7] Е. И. Бережной, “Подпространство пространства Гельдера, состоящее из самых негладких функций”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 329–339.
- [8] Е. И. Бережной, “О подпространствах пространств Гёльдера, состоящих из функций минимальной гладкости”, *Докл. РАН*, **399**:4 (2004), 446–449.
- [9] Е. И. Бережной, “О подпространствах $C[0, 1]$, состоящих из негладких функций”, *Матем. заметки*, **81**:4 (2007), 490–495.

Е. И. Бережной

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: ber@uniyar.ac.ru

Поступило

08.02.2013

Исправленный вариант

07.10.2013