Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Рацеев, Взаимосвязь алгебр Пуассона и алгебр Ли на языке тождеств, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 567–577

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:09:01

Взаимосвязь алгебр Пуассона и алгебр Ли на языке тождеств

С. М. Рацеев

В работе исследуются многообразия алгебр Пуассона, идеалы тождеств которых содержат тождество $\{x, y\} \cdot \{z, t\} = 0$, исследуется взаимосвязь таких многообразий с многообразиями алгебр Ли. Приводится многообразие алгебр Пуассона почти показательного роста. Также приведен пример многообразия алгебр Пуассона с дробной экспонентой.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10252

Введение. Алгебра $A = A(+, \cdot, \{\cdot, \cdot\}, K)$ над произвольным полем K называется *алгеброй Пуассона*, если $A(+, \cdot, K)$ – ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+, \{\cdot, \cdot\}, K)$ – алгебра Ли с операцией умножения $\{\cdot, \cdot\}$, которая называется *скобкой Пуассона*, и выполняется правило Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad a, b, c \in A.$$

Пусть $L(X)$ – свободная алгебра Ли с умножением $[\cdot, \cdot]$, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ – счетное множество свободных образующих. В алгебре $L(X)$ зафиксируем упорядоченный базис $v_1, v_2, \dots$, где $v_i < v_j$ при $i < j$. Рассмотрим ассоциативную коммутативную алгебру полиномов $K[v_1, v_2, \dots]$. В этой алгебре определим скобки Пуассона для порождающих элементов v_i как умножение в алгебре $L(X)$: $\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$. Распространим скобки Пуассона на любые элементы из $K[v_1, v_2, \dots]$, используя линейность и правило

$$\{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g, h\} + \{f, h\} \cdot g, \quad f, g, h \in K[v_1, v_2, \dots].$$

Тогда полученная алгебра будет свободной алгеброй Пуассона $F(X)$, причем базис алгебры $F(X)$ будут составлять все элементы вида

$$v_{i_1}^{\alpha_1} \cdots v_{i_k}^{\alpha_k},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$, $i_1 < \dots < i_k$.

Договоримся опускать скобки Пуассона при их левонормированной расстановке, т.е.

$$\{\{\{x_1, x_2\}, x_3\}, \dots, x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00209-а).

Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$, а через P_n^L – пространство полилинейных элементов степени n в свободной алгебре Ли $L(X)$. Из сказанного выше следует такое несложное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Базис пространства P_n состоит из всех элементов вида*

$$x_{k_1} \cdots x_{k_r} \cdot \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cdots \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}, \quad (0.1)$$

для каждого из которых выполнены следующие условия:

- (i) $r \geq 0, k_1 < \dots < k_r$;
- (ii) каждая из переменных $x_1, \dots, x_n$ встречается в (0.1) ровно один раз;
- (iii) каждый множитель $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}, \dots, \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}$ из (0.1), являющийся скобкой Пуассона, левонормирован, имеет длину ≥ 2 и в каждой такой скобке Пуассона элемент с максимальным индексом находится на первом месте:

$$i_1 > i_2, \quad \dots, \quad i_1 > i_s, \quad \dots, \quad j_1 > j_2, \quad \dots, \quad j_1 > j_t;$$

- (iv) множители в (0.1) упорядочены по длине: $s \leq \dots \leq t$;
- (v) если два соседних множителя в (0.1), являющиеся скобками Пуассона, имеют одинаковую длину

$$\cdots \{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\} \{x_{q_1}, \dots, x_{q_s}\} \cdots,$$

то $p_1 < q_1$.

Обозначим через $L_{\geq 2}(X)$ подалгебру в свободной алгебре Ли $L(X)$, являющуюся линейной оболочкой мономов степени ≥ 2 .

Обозначим через Γ_n подпространство в P_n , являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cdots \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \quad \dots, \quad t \geq 2.$$

Пусть V – некоторое многообразие алгебр Пуассона, $\text{Id}(V)$ – идеал тождеств многообразия V . Обозначим

$$P_n(V) = \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(V)}, \quad \Gamma_n(V) = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap \text{Id}(V)},$$

$$c_n(V) = \dim P_n(V).$$

Соответственно, если V_L – некоторое многообразие алгебр Ли, то

$$P_n^L(V_L) = \frac{P_n^L}{P_n^L \cap \text{Id}(V_L)}, \quad c_n^L(V_L) = \dim P_n^L(V_L).$$

1. Примеры алгебр Пуассона.

ПРИМЕР 1. Пусть $H_{2m} = K[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m]$ – ассоциативное коммутативное кольцо многочленов. Если в H_{2m} ввести умножение $\{\cdot, \cdot\}$ следующим образом:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right), \quad f, g \in H_{2m},$$

то получим алгебру Пуассона.

ПРИМЕР 2. Пусть A_L – некоторая алгебра Ли над полем K с левым умножением $[\cdot, \cdot]$. Пусть $v_1, v_2, \dots$ – линейный базис пространства A_L над K . Рассмотрим коммутативное кольцо полиномов $K[v_1, v_2, \dots]$. Скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ для элементов v_i определим как умножение в A_L : $\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$. Распространим скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ на все $K[v_1, v_2, \dots]$, используя линейность и правило Лейбница. Построенная таким образом алгебра Пуассона называется *симметрической алгеброй* и обозначается $PS(A_L)$.

ПРИМЕР 3. Пусть A – некоторая ассоциативная алгебра с единицей над полем нулевой характеристики и умножением $\wedge$, в которой выполнено тождество

$$[x_1, x_2, x_3] = 0$$

(см. [1]). Определим в A операции $\cdot$ и $\{\cdot, \cdot\}$ следующим образом:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \quad \{a, b\} = a \wedge b - b \wedge a, \quad a, b \in A.$$

Полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{\cdot, \cdot\})$ будет алгеброй Пуассона, которую обозначим через $P(A)$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим следующее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [2]. Пусть A_L – некоторая алгебра Ли с левым умножением $[\cdot, \cdot]$ над произвольным полем K . Рассмотрим векторное пространство

$$A = A_L \oplus K,$$

в котором для любых $a, b \in A_L$, $\alpha, \beta \in K$, определим операции $\cdot$ и $\{\cdot, \cdot\}$ следующим образом:

$$(a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha \beta, \quad \{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b]. \quad (1.1)$$

Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{\cdot, \cdot\}, K)$ будет алгеброй Пуассона, причем будут выполнены следующие условия:

(i) $\text{Id}(A_L) = \text{Id}(A) \cap L_{\geq 2}(X)$ и в алгебре A выполнено тождество

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0;$$

(ii) $\Gamma_n(A) = P_n^L(A) = P_n^L(A_L)$ для любого $n \geq 2$, где равенства приведены с точностью до изоморфизма векторных пространств;

(iii) для любого n выполнено равенство

$$c_n(A) = 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \dim P_k^L(A_L),$$

где C_n^k – число сочетаний из n по k .

ПРИМЕР 5. Пусть A – произвольная ассоциативная алгебра (с единицей или без нее) с умножением $\wedge$ над произвольным полем K . Рассмотрим алгебру Ли $[A]$ с операцией коммутирования $[x, y] = x \wedge y - y \wedge x$, $x, y \in A$. Из алгебры $[A]$ можно построить алгебру Пуассона $[A] \oplus K$ с операциями (1.1).

Описанные выше примеры позволяют строить алгебры Пуассона с важными свойствами. До конца данного пункта будем предполагать, что $\text{char } K = 0$.

Пусть Λ – бесконечномерная алгебра Грассмана с единицей и умножением $\wedge$. Введем в алгебре Λ операции $\cdot$ и $\{\cdot, \cdot\}$ следующим образом:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \quad \{a, b\} = a \wedge b - b \wedge a, \quad a, b \in \Lambda.$$

Полученная алгебра $(\Lambda, +, \cdot, \{\cdot, \cdot\})$ будет алгеброй Пуассона, которую обозначим через G . В работе [1] показано, что многообразие $\text{var}(G)$, порожденное алгеброй G , является почти полиномиальным, причем идеал тождеств алгебры G порождается тождеством $\{x_1, x_2, x_3\} = 0$.

Пусть A_L^2 – двумерная метабелева алгебра Ли с базисом a, b и таблицей умножения $[a, b] = a$. Обозначим через A^2 алгебру Пуассона $A_L^2 \oplus K$ с операциями (1.1).

Пусть также UT_2 – алгебра верхнетреугольных матриц с умножением $\wedge$ над произвольным полем K . Рассмотрим алгебру Пуассона $U_2 = [UT_2] \oplus K$ с операциями (1.1), где

$$[x, y] = x \wedge y - y \wedge x, \quad x, y \in UT_2.$$

Нетрудно видеть, что $\text{var}(A^2) = \text{var}(U_2)$. В работе [3] показано, что рост многообразия $\text{var}(A^2)$ является почти полиномиальным, а идеал тождеств алгебры A^2 порождается тождествами

$$\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0.$$

Также из работы [3] следует, что многообразие $\text{var}(A^2)$ является наименьшим многообразием алгебр Пуассона, в котором не выполняется ни одно тождество вида

$$\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = 0.$$

Более того, в той же работе показано, что многообразие алгебр Пуассона V имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда $G \notin V$ и $A^2 \notin V$. Из данного критерия следует, что существует только два многообразия алгебр Пуассона почти полиномиального роста: $\text{var}(G)$ и $\text{var}(A^2)$.

2. Алгебры Пуассона с тождеством $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$. Обозначим через $\text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\})$ идеал тождеств в свободной алгебре Пуассона $F(X)$, порожденный элементом $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть V_L – некоторое многообразие алгебр Ли над произвольным полем K , определенное системой тождеств

$$\{f_i = 0 \mid i \in I, f_i \in L_{\geq 2}(X)\}.$$

Пусть также имеется совокупность элементов

$$g_j \in \text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}), \quad j \in J, \quad |J| > 0.$$

Пусть V – многообразие алгебр Пуассона, определенное тождествами

$$\{f_i = 0, g_j = 0 \mid i \in I, j \in J\}.$$

Тогда будут верны следующие условия:

- (i) $\text{Id}(V_L) = \text{Id}(V) \cap L_{\geq 2}(X)$;
- (ii) $P_n^L(V) = P_n^L(V_L)$;
- (iii) $c_n(V) \geq 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot \dim P_k^L(V_L)$;
- (iv) если $|I| = 0$, то для любого $n \geq 2$

$$c_n(V) \geq 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot (k-1)! \geq [(n-1)! \cdot e],$$

где $e = 2.71 \dots$, $[\cdot]$ – целая часть числа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $f \in \text{Id}(V_L)$. Тогда f является следствием системы тождеств $f_i = 0$, $i \in I$. Поэтому $f \in \text{Id}(V) \cap L_{\geq 2}(X)$ и $\text{Id}(V_L) \subseteq \text{Id}(V) \cap L_{\geq 2}(X)$. Покажем включение в обратную сторону.

Пусть W – многообразие алгебр Пуассона, определенное тождествами $f_i = 0$, $i \in I$, и $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$. Так как $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}$ порождает $\text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\})$ и $|J| > 0$, то $W \subseteq V$, $\text{Id}(V) \subseteq \text{Id}(W)$.

Далее, пусть $L(X, V_L)$ – относительно свободная алгебра многообразия V_L счетного ранга. Из теоремы Биркгофа следует, что многообразие V_L порождается алгеброй $L(X, V_L)$, поэтому $\text{Id}(V_L) = \text{Id}(L(X, V_L))$. Рассмотрим алгебру Пуассона $A = L(X, V_L) \oplus K$ с операциями (1.1). Из предложения 2 следует, что $A \in W$, поэтому $\text{Id}(W) \subseteq \text{Id}(A)$. Также из предложения 2 следует такое равенство:

$$\text{Id}(V_L) = \text{Id}(L(X, V_L)) = \text{Id}(A) \cap L_{\geq 2}(X).$$

Так как $\text{Id}(V) \subseteq \text{Id}(W)$ и $\text{Id}(W) \subseteq \text{Id}(A)$, то

$$\text{Id}(V) \cap L_{\geq 2}(X) \subseteq \text{Id}(W) \cap L_{\geq 2}(X) \subseteq \text{Id}(A) \cap L_{\geq 2}(X) = \text{Id}(V_L).$$

- (ii) Из пункта (i) следует, что $\text{Id}(V) \cap P_n^L = \text{Id}(V_L) \cap P_n^L$ для любого $n \geq 2$. Поэтому

$$P_n^L(V_L) = \frac{P_n^L}{\text{Id}(V_L) \cap P_n^L} = \frac{P_n^L}{\text{Id}(V) \cap P_n^L} = P_n^L(V).$$

- (iii) следует из пункта (ii) и предложения 4 работы [2].

(iv) Так как $\dim P_n^L = (n-1)!$, то из пункта (iii) следует, что для любого натурального n выполнено неравенство

$$c_n(V) \geq 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot (k-1)!$$

Заметим, что из равенства

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

следует такое равенство для любого натурального n :

$$n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = [n! \cdot e].$$

Исходя из этого, имеем

$$\begin{aligned}
 c_n(V) &\geq 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot (k-1)! = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k \cdot (n-k)!} \\
 &\geq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{n \cdot (n-k)!} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \\
 &\stackrel{t=n-k}{=} 1 + \sum_{t=0}^{n-2} \frac{(n-1)!}{t!} = (n-1)! \cdot \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{t!} = [(n-1)! \cdot e], \quad n \geq 2.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого поля K верно следующее равенство:

$$\text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap L(X) = \{0\}.$$

Если многообразие V имеет экспоненциальный рост, то введем в рассмотрение нижнюю и верхнюю экспоненты:

$$\underline{\text{Exp}}(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(V)}, \quad \overline{\text{Exp}}(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

Если имеет место равенство $\underline{\text{Exp}}(V) = \overline{\text{Exp}}(V)$, то будем обозначать эту величину через $\text{Exp}(V)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть V_L – некоторое многообразие алгебр Ли над произвольным полем K , определенное системой тождеств

$$\{f_i = 0 \mid i \in I, f_i \in L_{\geq 2}(X)\}.$$

Пусть также V – многообразие алгебр Пуассона, определенное тождествами

$$f_i = 0, \quad i \in I, \quad \text{и} \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0.$$

Тогда будут верны следующие утверждения:

- 1) $\Gamma_n(V) = P_n^L(V) = P_n^L(V_L)$ для любого $n \geq 2$, где равенства приведены с точностью до изоморфизма векторных пространств;
- 2) пусть элементы

$$u_s^n(x_1, \dots, x_n), \quad s = 1, \dots, c_n^L(V_L), \quad (2.1)$$

образуют базис пространства $P_n^L(V_L)$, $n \geq 2$; тогда полилинейные элементы

$$x_1 \cdots x_n, \quad x_{i_1} \cdots x_{i_{n-k}} u_s^k(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}), \quad (2.2)$$

$k = 2, \dots, n$, $s = 1, \dots, c_k^L(V_L)$, $i_1 < \dots < i_{n-k}$, $j_1 < \dots < j_k$, образуют базис пространства $P_n(V)$;

- 3) для любого n выполнено равенство

$$c_n(V) = 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \dim P_k^L(V_L);$$

- 4) если существует $\text{Exp}(V_L)$, то $\text{Exp}(V) = \text{Exp}(V_L) + 1$; более того, если найдутся такие действительные числа $d \geq 0$, α и β , что для всех достаточно больших n выполнено двойное неравенство

$$n^\alpha d^n \leq c_n^L(V_L) \leq n^\beta d^n,$$

то найдутся такие γ и δ , что для всех достаточно больших n будет выполнено такое двойное неравенство:

$$n^\gamma (d+1)^n \leq c_n(V) \leq n^\delta (d+1)^n;$$

- 5) если поле K бесконечно и некоторая алгебра Ли A_L порождает многообразие V_L , то алгебра $A = A_L \oplus K$ с операциями (1.1) будет порождать многообразие V ;
 6) если поле K бесконечно, $|I| < +\infty$ и многообразие V_L является шпехтовым, то многообразие V также будет являться шпехтовым;
 7) пусть поле K бесконечно и W – некоторое собственное подмногообразие в V ; тогда идеал тождеств $\text{Id}(W) \cap L_{\geq 2}(X)$ определяет некоторое собственное подмногообразие в V_L ;
 8) многообразие V_L нильпотентно тогда и только тогда, когда рост многообразия V ограничен полиномом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Равенство $P_n^L(V_L) = P_n^L(V)$ следует из теоремы 1. Заметим, что для любого n выполнено равенство

$$\Gamma_n = P_n^L \oplus \text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Gamma_n(V) &= \frac{\Gamma_n}{\text{Id}(V) \cap \Gamma_n} = \frac{P_n^L \oplus \text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n}{\text{Id}(V) \cap (P_n^L \oplus \text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n)} \\ &= \frac{P_n^L \oplus \text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n}{(\text{Id}(V) \cap P_n^L) \oplus (\text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \cap \Gamma_n)} \cong \frac{P_n^L}{\text{Id}(V) \cap P_n^L} = P_n^L(V). \end{aligned}$$

- 2) Данный пункт следует из пункта 1) и предложения 4 работы [2].
 3) следует из пункта 2).
 4) следует из пункта 3) и равенства $(t+1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot t^k$.
 5) Пусть поле K бесконечно и некоторая алгебра Ли A_L порождает многообразие V_L . Рассмотрим алгебру Пуассона $A = A_L \oplus K$ с операциями (1.1). Тогда с учетом предложения 2 и теоремы 1 следует такое равенство:

$$\text{Id}(A) \cap L_{\geq 2}(X) = \text{Id}(A_L) = \text{Id}(V_L) = \text{Id}(V) \cap L_{\geq 2}(X), \quad (2.3)$$

причем $\text{Id}(V) \subseteq \text{Id}(A)$. Покажем, что $\text{Id}(A) \subseteq \text{Id}(V)$.

Обозначим через B линейную оболочку элементов (не обязательно полилинейных) свободной алгебры Пуассона $F(X)$ вида

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cdots \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \quad \dots, \quad t \geq 2.$$

При этом, в частности, $\Gamma_n = B \cap P_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда B представимо в таком виде:

$$B = L_{\geq 2}(X) \oplus B \cap \text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}). \quad (2.4)$$

Из работы [2] следует, что идеал тождеств $\text{Id}(A)$ порождается множеством тождеств $B \cap \text{Id}(A)$. Пусть $f \in B \cap \text{Id}(A)$. С учетом того, что

$$\text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}) \subseteq \text{Id}(A),$$

получаем такое равенство:

$$B \cap \text{Id}(A) = L_{\geq 2}(X) \cap \text{Id}(A) \oplus B \cap \text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}).$$

Поэтому f однозначно представим в виде $f = g + h$, где

$$g \in L_{\geq 2}(X) \cap \text{Id}(A), \quad h \in B \cap \text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}).$$

Из равенства (см. (2.3))

$$L_{\geq 2}(X) \cap \text{Id}(A) = L_{\geq 2}(X) \cap \text{Id}(V)$$

следует, что $g \in \text{Id}(V)$. Очевидно, что $h \in \text{Id}(V)$, поэтому $f = g + h \in \text{Id}(V)$. Таким образом, показано равенство $\text{Id}(A) = \text{Id}(V)$.

6) Пусть поле K бесконечно, $|I| < +\infty$ и многообразие алгебр Ли V_L является шпехтовым. Рассмотрим произвольное подмногообразие W в V . Очевидно, что множество $\text{Id}(W) \cap L_{\geq 2}(X)$ является идеалом тождеств в свободной алгебре Ли $L(X)$, причем с учетом теоремы 1 выполнено включение $\text{Id}(V_L) \subseteq \text{Id}(W) \cap L_{\geq 2}(X)$. Поэтому идеал тождеств $\text{Id}(W) \cap L_{\geq 2}(X)$ порождается конечным числом элементов $f_1, \dots, f_k \in L_{\geq 2}(X)$.

Далее, следуя обозначениям пункта 5), имеем такое равенство:

$$B \cap \text{Id}(W) = L_{\geq 2}(X) \cap \text{Id}(W) \oplus B \cap \text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}). \quad (2.5)$$

Так как $\text{Id}(W)$ порождается множеством тождеств $B \cap \text{Id}(W)$ (см. [2]), то многообразие W порождается элементами $f_1, \dots, f_k$ и $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}$.

7) Пусть поле K бесконечно и W – некоторое собственное подмногообразие в V . Тогда выполнено строгое включение $\text{Id}(V) \subset \text{Id}(W)$. Рассмотрим идеал тождеств $\text{Id}(W) \cap L_{\geq 2}(X)$ в свободной алгебре Ли $L(X)$. Покажем, что выполнено строгое включение

$$\text{Id}(V_L) \subset \text{Id}(W) \cap L_{\geq 2}(X).$$

Так как $\text{Id}(W)$ порождается множеством тождеств $B \cap \text{Id}(W)$ (см. [2]) и $\text{Id}(V) \subset \text{Id}(W)$, то найдется такой элемент $f \in B \cap \text{Id}(W)$, что $f \notin \text{Id}(V)$. Из равенства (2.5) следует, что f однозначно представим в виде $f = g + h$, где

$$g \in L_{\geq 2}(X) \cap \text{Id}(W), \quad h \in B \cap \text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}).$$

Так как $h \in \text{Id}(V)$ и $f \notin \text{Id}(V)$, то

$$g \notin L_{\geq 2}(X) \cap \text{Id}(V) = \text{Id}(V_L).$$

Следовательно, $\text{Id}(V_L) \subset \text{Id}(W) \cap L_{\geq 2}(X)$.

Пункт 8) следует из пунктов 1), 3) и теоремы 1 работы [2]. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $L(X)$ – свободная алгебра Ли над произвольным полем K . Тогда для алгебры $L(X) \oplus K$ с операциями (1.1) верны следующие утверждения:

- (i) $\text{Id}(L(X) \oplus K) \cap L(X) = \{0\}$;
- (ii) если поле K бесконечно, то

$$\text{Id}(L(X) \oplus K) = \text{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}),$$

т.е. идеал тождеств алгебры $L(X) \oplus K$ порождается тождеством

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0.$$

Обозначим через V_1 многообразие алгебр Пуассона, определенное тождеством $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$. Из теоремы 2 вытекает, что рост многообразия V_1 является сверхэкспоненциальным и верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для многообразия V_1 над произвольным полем для любого $n \geq 2$ выполнено следующее соотношение:

$$c_n(V_1) = 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \cdot (k-1)! \geq [(n-1)! \cdot e].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть основное поле имеет нулевую характеристику и $\widetilde{AN}_2$ – многообразие алгебр Пуассона, определенное тождеством

$$\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}\} = 0.$$

Тогда многообразие $V_1 \cap \widetilde{AN}_2$ имеет почти экспоненциальный рост.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что многообразие алгебр Ли AN_2 , определенное тождеством

$$[[x_1, x_2, x_3], [x_4, x_5, x_6]] = 0,$$

имеет почти экспоненциальный рост (см. [4]). Поэтому с учетом теоремы 1 рост многообразия $V_1 \cap \widetilde{AN}_2$ сверхэкспоненциален.

Пусть W – некоторое собственное подмногообразие в $V_1 \cap \widetilde{AN}_2$. Из пункта 7 теоремы 2 следует, что идеал тождеств $\text{Id}(W) \cap L_{\geq 2}(X)$ определяет некоторое собственное подмногообразие в AN_2 , которое имеет рост не выше экспоненциального. С учетом пункта 4) теоремы 2 рост многообразия W ограничен сверху некоторой экспоненциальной функцией. Предложение доказано.

Обозначим через $\widetilde{N_s A}$ многообразие алгебр Пуассона, определенное тождеством

$$\{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\}\} = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Многообразие $V_1 \cap \widetilde{N_s A}$ над полем нулевой характеристики является шпехтовым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из пункта 6 теоремы 2 и шпехтовости многообразий алгебр Ли $N_s A$ (см. [5] или обобщение данного результата на случай алгебр Лейбница [6]), определенного тождеством

$$[[x_1, x_2], \dots, [x_{2s+1}, x_{2s+2}]] = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть V – некоторое подмногообразие в V_1 над полем нулевой характеристики. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $\text{Exp}(V) < 3$;
- (ii) рост многообразия V либо ограничен полиномом, либо найдется такое β , что для любого n будет выполнено неравенство

$$2^{n-1} \leq c_n(V) \leq n^\beta 2^n;$$

- (iii) для некоторого s выполнено условие

$$V_1 \cap \widetilde{N_2 A} \not\subseteq V \subset V_1 \cap \widetilde{N_s A}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим многообразие алгебр Ли V_L системой тождеств $\text{Id}(V) \cap L_{\geq 2}(X)$.

Пусть выполнено условие (i). Из теоремы 2 следует, что неравенство $\text{Exp}(V) < 3$ влечет такое неравенство: $\text{Exp}(V_L) < 2$. Из работы [7] следует, что в этом случае рост многообразия V_L ограничен полиномом. Поэтому с учетом теоремы 2 будет выполнено неравенство $c_n(V) \leq n^\beta 2^n$ для некоторого β и произвольного n . Если рост многообразия V не ограничен полиномом, то из теоремы 3 работы [2] следует, что $c_n(V) \geq 2^{n-1}$ для любого n . Таким образом, из (i) следует (ii).

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидна.

В работе [8] Мищенко доказал, что многообразие алгебр Ли V_L имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда для некоторого s выполнено условие $N_2 A \not\subseteq V_L \subset N_s A$. Поэтому равносильность условий (ii) и (iii) следует из данного факта и теоремы 2. Предложение доказано.

Хорошо известно, что в ассоциативном случае при $\text{char } K = 0$ экспонента произвольного нетривиального многообразия существует и является целым числом (Зайцев и Джамбруно [9], [10]). В случае же многообразий алгебр Ли при $\text{char } K = 0$ построен пример разрешимого многообразия (см. [11]), верхняя и нижняя экспоненты которого находятся в интервале $(3, 4)$. Приведем конструкцию алгебры Ли, порождающей данное многообразие.

Пусть A^2 – многообразие всех метабелевых алгебр Ли, т.е. многообразие, определяемое тождеством $[x_1 x_2][x_3 x_4] = 0$. Обозначим $M = F_3(A^2)$ относительно свободную алгебру этого многообразия с множеством свободных образующих $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Рассмотрим линейное преобразование d векторного пространства

$$\langle y_1, y_2, y_3 \rangle_K,$$

определенное правилом

$$d(y_1) = y_2, \quad d(y_2) = y_3, \quad d(y_3) = y_1.$$

Хорошо известно, что в этом случае d продолжается до дифференцирования алгебры M , которое обозначим той же буквой. Дифференцирование d порождает в алгебре всех дифференцирований одномерную подалгебру $\langle d \rangle$, поэтому можно построить полупрямое произведение $G_L = M \lambda \langle d \rangle$ алгебр M и $\langle d \rangle$. В работах [11], [12] показано, что экспонента многообразия $\text{var } G_L$ существует, причем выполнено следующее строгое двойное неравенство:

$$3 < \text{Exp}(\text{var } G_L) < 4.$$

Данный пример и теорема 2 иллюстрируют, что в случае многообразий алгебр Пуассона существуют алгебры с подобными свойствами:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\text{char } K = 0$ и $G = G_L \oplus K$ – алгебра Пуассона с операциями (1.1). Тогда

$$4 < \text{Exp}(\text{var } G) < 5.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. P. Mishchenko, V. M. Petrogradsky, A. Regev, “Poisson PI algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **359**:10 (2007), 4669–4694.
- [2] С. М. Рацеев, “Алгебры Пуассона полиномиального роста”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:3 (2013), 700–711.
- [3] С. М. Рацеев, “Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2012, № 5, 8–13.
- [4] И. Б. Воличенко, “Многообразие алгебр Ли с тождеством $[[x_1, x_2, x_3], [x_4, x_5, x_6]] = 0$ над полем характеристики нуль”, *Сиб. матем. журн.*, **25**:3 (1984), 40–54.
- [5] А. Н. Красильников, “Конечная базлируемость некоторых многообразий алгебр Ли”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, № 2, 34–38.
- [6] С. М. Рацеев, “Конечная базлируемость некоторых многообразий алгебр Лейбница”, *Изв. Вузов. Поволжский регион*, **33**:6 (2007), 12–16.
- [7] С. П. Мищенко, “Нижние оценки размерностей неприводимых представлений симметрических групп и показателей экспоненты многообразий алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **187**:1 (1996), 83–94.
- [8] С. П. Мищенко, “О многообразиях полиномиального роста алгебр Ли над полем характеристики нуль”, *Матем. заметки*, **40**:6 (1986), 713–721.
- [9] A. Giambruno, M. Zaicev, “On codimension growth of finitely generated associative algebras”, *Adv. Math.*, **140**:2 (1998), 145–155.
- [10] A. Giambruno, M. V. Zaicev, “Exponential codimension growth of PI algebras: an exact estimate”, *Adv. Math.*, **142**:2 (1999), 221–243.
- [11] M. V. Zaicev, S. P. Mishchenko, “An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent”, *J. Math. Sci. (New York)*, **93**:6 (1999), 977–982.
- [12] А. Б. Веревкин, М. В. Зайцев, С. П. Мищенко, “Достаточное условие совпадения нижней и верхней экспонент многообразия линейных алгебр”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2011, № 2, 86–89.

С. М. Рацеев

Ульяновский государственный университет

E-mail: RatseevSM@mail.ru

Поступило

26.12.2012

Исправленный вариант

26.06.2013