Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Пахомова, Критерий непрерывности отношений
типа Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа,
Матем. заметки, 2014, том 96, выпуск 1, 126–137

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 03:06:12

Критерий непрерывности отношений типа Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа

А. С. Пахомова

Доказан критерий непрерывности отношения Штейнера, суботношения Штейнера и отношения Штейнера–Громова в пространстве всех компактных метрических пространств с метрикой Громова–Хаусдорфа. Кроме того доказано, что перечисленные функции являются полунепрерывными сверху.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10253

1. Введение и основные определения. В семнадцатом веке Ферма сформулировал задачу: для заданной тройки точек на плоскости найти такую точку, суммарное расстояние от которой до данных трех было бы наименьшим. Естественным обобщением этой задачи для случая произвольного количества точек занимался в 1750 г. Симпсон, а позже – Штейнер в 1837 и Вебер в 1909. Более общая задача поиска кратчайшего дерева для данного граничного множества была предложена Гауссом в 1830 г. [1]. Позднее этой проблемой занимались Ярник и Кесслер [2]. Эта задача, известная сегодня как проблема Штейнера, одна из наиболее популярных геометрических задач.

Задача о минимальных заполнениях конечных метрических пространств возникла в теории геометрических вариационных задач. Минимальные заполнения гладких многообразий изучались Громовым [3] и многими другими авторами в контексте геометрических неравенств. В классической постановке Громова требуется для данного замкнутого многообразия с метрикой найти затягивающее его многообразие-пленку наименьшего возможного объема в предположении, что добавление пленки не уменьшает расстояния на исходном многообразии. Эта пленка и называется минимальным заполнением в смысле Громова. Иванов и Тужилин [4] предложили в случае конечных метрических пространств рассматривать в качестве пленок-заполнений взвешенные графы с внутренней метрикой, порожденной неотрицательной весовой функцией. В результате получилась нетривиальная и содержательная задача, а новый объект – минимальные заполнения конечных метрических пространств, оказался тесно связан с геометрией кратчайших деревьев и отношением Штейнера. Приведем теперь формальные определения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00664а), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1410.2012.1), гранта Правительства РФ по постановлению N 220, договор № 11.G34.31.0053.

Пусть V – произвольное конечное множество. *Графом G на множестве V* называется пара (V, E) , где E – некоторое конечное семейство неупорядоченных пар различных элементов множества V . Элементы множества V называются *вершинами графа G* , а элементы множества E – *ребрами графа G* . Если задан граф G , то множество его вершин будем обозначать $V(G)$, а множество его ребер – $E(G)$. Если $e = \{a, b\}$, где $e \in E(G)$, $a \in V(G)$, $b \in V(G)$, то вершины a и b называются *концами* ребра e .

Будем говорить, что существует *маршрут*, соединяющий вершины $a \in V(G)$ (*начало маршрута*) и $b \in V(G)$ (*конец маршрута*), если существует такое число n и такая последовательность ребер $\{e_i\}_{i=1}^n$, что $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$, где $a = v_1$ и $b = v_{n+1}$. Если начало и конец маршрута совпадают, то он называется *циклическим*. Циклический маршрут, все ребра которого различны, будем называть *циклом*. Граф называется *связным*, если для любой пары различных вершин из $V(G)$ существует маршрут, их соединяющий. Связный граф без циклов называется *деревом*.

Граф G называют *взвешенным*, если на его ребрах задана неотрицательная функция $\omega: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, называемая *весовой функцией*. Число $\omega(e)$, где $e \in E(G)$, называется *весом ребра e* . Сумма весов всех ребер взвешенного графа G называется *весом графа G* и обозначается через $\omega(G)$. Далее мы будем предполагать, что множество вершин графа принадлежит некоторому объемлющему метрическому пространству $\mathbb{X}$ с метрикой ρ . Тогда эта метрика порождает на ребрах графа весовую функцию естественным образом: вес ребра – это расстояние по метрике ρ между вершинами, которые соединяет данное ребро. В дальнейшем будем обозначать эту весовую функцию, как и метрику, буквой ρ .

Для конечного подмножества M метрического пространства $\mathbb{X}$ определим

$$\begin{aligned} \text{mst}(M) &= \min_G \{\rho(G) \mid G - \text{дерево}, M = V(G)\}, \\ \text{smt}(M) &= \inf_G \{\rho(G) \mid G - \text{дерево}, M \subset V(G) \subset \mathbb{X}\}. \end{aligned}$$

Дерево G на M называется *минимальным остовным деревом*, если $\rho(G) = \text{mst}(M)$.

Дерево G на конечном подмножестве $V(G) \subset \mathbb{X}$, содержащем M , называется *минимальным деревом Штейнера, соединяющим M* , если $\rho(G) = \text{smt}(M)$. Вершины этого дерева, принадлежащие множеству M , мы будем называть *граничными*, а само множество M – *границей* дерева G (или *граничным множеством*). Остальные вершины дерева G будем называть *внутренними* (или *добавленными*). Заметим, что в отличие от минимального остовного дерева, минимальное дерево Штейнера существует, вообще говоря, не для всякой границы. Одной из возможных причин этого может служить неполнота объемлющего метрического пространства. Полнота пространства $\mathbb{X}$, однако, не является достаточным условием существования минимального дерева Штейнера для произвольного его конечного подмножества $M \subset \mathbb{X}$. Первый пример полного метрического (и даже банахова) пространства, в котором для некоторого набора точек не существует кратчайшего дерева Штейнера, был построен в 1974 в работе [5]. Подобные примеры строились позднее и в других работах, например, в [6]–[9].

Будем говорить, что связный граф G *соединяет* множество M , если $M \subset V(G)$. Пусть теперь $\mathfrak{M} = (M, d)$ – конечное метрическое пространство, и пусть G – взвешенный граф, соединяющий M , с весовой функцией ω . Функция ω задает на M

псевдометрику d_ω следующим образом: *расстоянием* между вершинами графа G , назовем наименьший из весов маршрутов, их соединяющих. *Весом маршрута* будем называть сумму весов ребер, входящих в маршрут. Если для любых точек p и q из M выполняется $d(p, q) \leq d_\omega(p, q)$, то взвешенный граф G называется *заполнением* пространства $\mathfrak{M}$. При этом M назовем *границным множеством* заполнения. Заполнение, вес которого равен $\inf(\mathfrak{M}) = \inf \omega(G)$, где точная нижняя грань берется по всем заполнениям пространства $\mathfrak{M}$, назовем *минимальным заполнением*. Число $\inf(\mathfrak{M})$ назовем *весом* минимального заполнения. В [4] доказывается, что минимальное заполнение существует для любого конечного метрического пространства.

Определим следующие величины, характеризующие метрическое пространство.

Отношением Штейнера метрического пространства $(\mathbb{X}, \rho)$ назовем

$$\text{sr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M|M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\text{smt}(M)}{\text{mst}(M)} \mid 1 < \#M < \infty \right\},$$

где $\#M$ обозначает количество элементов в множестве M .

Аналогичным образом определим *отношение Штейнера–Громова*:

$$\text{sgr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M|M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\text{mf}(M)}{\text{mst}(M)} \mid 1 < \#M < \infty \right\}.$$

Суботношением Штейнера будем называть величину

$$\text{ssr}(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M|M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\text{mf}(M)}{\text{smt}(M)} \mid 1 < \#M < \infty \right\}.$$

Введенные величины будем называть *отношениями типа Штейнера* или *общими отношениями типа Штейнера*, чтобы подчеркнуть различие с их n -точечными аналогами, которые определяются ниже.

Пусть $n \geq 2$ – фиксированное натуральное число. Определим n -точечное *отношение Штейнера*

$$\text{sr}_n(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M|M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\text{smt}(M)}{\text{mst}(M)} \mid 1 < \#M \leq n \right\},$$

n -точечное *суботношение Штейнера*

$$\text{ssr}_n(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M|M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\text{mf}(M)}{\text{smt}(M)} \mid 1 < \#M \leq n \right\},$$

и n -точечное *отношение Штейнера–Громова*

$$\text{sgr}_n(\mathbb{X}, \rho) = \inf_{\{M|M \subset \mathbb{X}\}} \left\{ \frac{\text{mf}(M)}{\text{mst}(M)} \mid 1 < \#M \leq n \right\}.$$

Эти три величины будем называть n -точечными *отношениями типа Штейнера*.

Существует большое количество работ, посвященных как проблеме Штейнера в классической постановке, так и всевозможным ее обобщениям, например, на нормированные пространства, римановы многообразия, метрические пространства более общего вида. Подробнее об этом можно узнать в книге [10]. Очередной всплеск

интереса к проблеме Штейнера связан с гипотезой Гилберта–Поллака [11] об отношении Штейнера евклидовой плоскости. Однако многочисленные попытки доказать ее так и не привели к успеху, оставив данный вопрос открытым для исследования.

Рассмотрим теперь пространство всех метрических пространств с метрикой Громова–Хаусдорфа. Для ее определения введем сначала понятие расстояния между множествами одного пространства.

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство с метрикой $\rho(a, b)$. Назовем ε -окрестностью точки a множество $U_\varepsilon(a)$, состоящее из точек b таких, что $\rho(a, b) < \varepsilon$. Объединение всех ε -окрестностей точек множества $A \subset X$ назовем ε -окрестностью множества и обозначим через $U_\varepsilon(A)$.

Пусть A и B – замкнутые подмножества X . Определим между ними расстояние по Хаусдорфу следующим образом:

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon \mid A \subset U_\varepsilon(B) \text{ и } B \subset U_\varepsilon(A)\}.$$

Условие замкнутости требуется для того, чтобы введенное расстояние удовлетворяло аксиомам метрики. Если не требовать ограниченности множеств, то $d_H(A, B)$ может принимать бесконечное значение.

Пусть X и Y – два метрических пространства. Реализацией этих пространств назовем такую тройку метрических пространств (X', Y', Z') , что X' и Y' – подпространства Z' , причем X' изометрично X , а Y' изометрично Y . Расстоянием по Громову–Хаусдорфу между X и Y назовем

$$d_{GH} = \inf\{r \in \mathbb{R} \mid \exists(X', Y', Z') : d_H(X', Y') \leq r\}.$$

Эта функция задает конечную метрику на пространстве всех компактных метрических пространств. (Доказательство этого факта приведено, например, в [12; теорема 7.3.30]). Пространство всех компактных метрических пространств с метрикой Громова–Хаусдорфа будем называть пространством Громова–Хаусдорфа.

В настоящей статье изучается непрерывность и полунепрерывность отношений типа Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа. Цель настоящей работы – доказать теорему о полунепрерывности и критерий непрерывности для отношений. Напомним, что числовая функция $f(x)$, определенная на некотором множестве метрического пространства (X, ρ) , называется полунепрерывной сверху в точке x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \quad \forall x \quad \rho(x, x_0) < \delta \implies f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть (X_0, ρ) – компактное метрическое пространство, рассматриваемое в пространстве всех компактных метрических пространств с метрикой Громова–Хаусдорфа. Пусть функция r обозначает одно из трех отношений типа Штейнера: sr , sgt или ssr , а функция r_n – одно из трех n -точечных отношений типа Штейнера. Тогда

- 1) функция r является полунепрерывной сверху в любой точке X_0 ;
- 2) функция r является непрерывной в точке X_0 , если и только если

$$r(X_0) = \frac{1}{2};$$

- 3) для любого фиксированного $n \geq 2$ функция r_n является полунепрерывной сверху в любой точке X_0 ;

4) функция r_n является непрерывной в точке $\mathbb{X}_0$, если и только если

$$r_n(\mathbb{X}_0) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

2. Необходимые утверждения. В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, которое является достаточным условием минимальности заполнения. Оно было доказано Ивановым и Тужилиным (см. [4]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{G} = (G, \omega)$ – заполнение конечного метрического пространства $\mathfrak{M} = (M, d)$, и G является деревом. Предположим, что для любых p и q из M выполняется равенство $d(p, q) = d_\omega(p, q)$. Тогда $\mathfrak{G}$ – минимальное заполнение для $\mathfrak{M}$.

Кроме того, нам потребуются нижние оценки для отношений, введенных в предыдущем разделе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть функция r обозначает одно из трех отношений типа Штейнера: sr , sgt или ssr . Для произвольного метрического пространства $\mathbb{X}$ справедливы следующие оценки:

$$r_n(\mathbb{X}) \geq \frac{n}{2(n-1)}, \quad r(\mathbb{X}) \geq \frac{1}{2}.$$

Более того, эти оценки являются точными.

В случае отношения Штейнера этот результат был доказан в работе Цислика (см. [13; следствия 4.1.2, 4.1.3]). Справедливость результата для двух других отношений была доказана в работе автора [14].

3. Доказательство утверждений о полунепрерывности. Доказательство проведем для каждого отношения в отдельности.

3.1. Отношение Штейнера. Начнем с рассмотрения функции, сопоставляющей метрическому пространству его n -точечное отношение Штейнера. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $\mathbb{X}$ с условием: $d_{GH}(\mathbb{X}, \mathbb{X}_0) < \delta$ выполнено: $\text{sr}_n(\mathbb{X}) - \text{sr}_n(\mathbb{X}_0) < \varepsilon$.

Напомним, что по определению

$$d_{GH}(\mathbb{X}_0, \mathbb{X}) = \inf_{(\mathbb{X}'_0, \mathbb{X}', \mathbb{Z}')} d_H(\mathbb{X}'_0, \mathbb{X}'),$$

где точная нижняя грань берется по всем реализациям пространств $(\mathbb{X}_0, \mathbb{X})$. Из определения точной нижней грани следует, что для любого $h > 0$ (в частности для $h = \delta$) существует такая реализация $(\mathbb{X}'_0, \mathbb{X}', \mathbb{Z}')$ пространств $(\mathbb{X}_0, \mathbb{X})$, что

$$d_H(\mathbb{X}'_0, \mathbb{X}') < d_{GH}(\mathbb{X}, \mathbb{X}_0) + h < 2\delta.$$

В дальнейшем для упрощения обозначений будем опускать штрихи. Метрику в $\mathbb{Z}$, и как следствие в $\mathbb{X}$ и $\mathbb{X}_0$, будем обозначать буквой ρ .

Зафиксируем ε . Из определения отношения Штейнера следует, что в $\mathbb{X}_0$ существует такое множество A , состоящее из $m \leq n$ различных вершин, для которого

$$\frac{\text{smt}(A)}{\text{mst}(A)} < \text{sr}_n(\mathbb{X}_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что и в случае рассмотрения общего отношения Штейнера можно найти такое множество A , состоящее из конечного числа точек. Поэтому дальнейшие рассуждения справедливы и для n -точечного и для общего отношения Штейнера.

Так как $\mathbb{X}_0$ лежит в 2δ -окрестности $\mathbb{X}$, для любой $a_i \in A$ найдется такая $b_l \in \mathbb{X}$, что $\rho(a_i, b_l) < 2\delta$. Пусть

$$R = \min_{i \neq j} \{\rho(a_i, a_j)\}.$$

Пусть δ_1 настолько мало, что $2\delta_1 < R/2$. Тогда если $\delta < \delta_1$, то все b_l различны, т.е. в $\mathbb{X}$ существует такое множество $B = \{b_i \in \mathbb{X} \mid i = 1, \dots, m\}$, что $\rho(a_i, b_i) < 2\delta$.

Оценим расстояния между точками множества B :

$$\rho(b_i, b_j) \leq \rho(b_i, a_i) + \rho(a_i, a_j) + \rho(a_j, b_j) < \rho(a_i, a_j) + 4\delta.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \rho(a_i, a_j) &\leq \rho(a_i, b_i) + \rho(b_i, b_j) + \rho(b_j, a_j) < \rho(b_i, b_j) + 4\delta, \\ \rho(b_i, b_j) &> \rho(a_i, a_j) - 4\delta. \end{aligned}$$

Пусть E_B – множество ребер минимального остовного дерева для множества B . Построим множество E_A , состоящее из пар (a_i, a_j) , причем (a_i, a_j) входит в E_A , если и только если (b_i, b_j) входит в E_B . В этом случае E_A – множество ребер некоторого дерева, множество вершин которого совпадает с A . Оценим длину минимального остовного дерева, построенного для множества B :

$$\text{mst}(B) = \sum_{(b_i, b_j) \in E_B} \rho(b_i, b_j) > \sum_{(a_i, a_j) \in E_A} (\rho(a_i, a_j) - 4\delta) \geq \text{mst}(A) - 4\delta(m-1).$$

Здесь мы воспользовались тем, что у дерева с m вершинами $m-1$ ребро.

Теперь оценим длину минимального дерева Штейнера для B . Пусть $A' = \{a_i \in \mathbb{X}_0 \mid i = 1, \dots, m+k\}$ – множество вершин некоторого дерева T , длина которого не превышает $\text{smt}(A) + 4\delta$, причем это дерево содержит все вершины множества A и $k \geq 0$ дополнительных вершин. Существование такого дерева для любого δ следует из определения $\text{smt}(A)$. Так как $\mathbb{X}_0$ лежит в 2δ -окрестности $\mathbb{X}$, для любой $a_i \in A'$ найдется такая $b_l \in \mathbb{X}$, что $\rho(a_i, b_l) < 2\delta$. Вообще говоря, какие-то из точек b_i и b_j , где $i, j > m$, могут совпасть. Можно наложить дополнительные ограничения на δ и добиться того, чтобы все b_i были различны, но мы этого делать не будем.

Рассмотрим множество $E_{A'}$, состоящее из ребер дерева T . Построим множество $E_{B'}$, состоящее из пар (b_i, b_j) , причем (b_i, b_j) входит в $E_{B'}$, если и только если (a_i, a_j) входит в $E_{A'}$. Тогда

$$\text{smt}(B) \leq \sum_{(b_i, b_j) \in E_{B'}} \rho(b_i, b_j) \leq \sum_{(a_i, a_j) \in E_{A'}} (\rho(a_i, a_j) + 4\delta) \leq \text{smt}(A) + 4\delta(m+k).$$

Здесь мы воспользовались тем, что T содержит $m+k-1$ ребро, а также соотношением

$$\sum_{(a_i, a_j) \in E_{A'}} \rho(a_i, a_j) \leq \text{smt}(A) + 4\delta.$$

Учитывая оценки для $\text{mst}(B)$, получим, что

$$\frac{\text{smt}(B)}{\text{mst}(B)} \leq \frac{\text{smt}(A) + 4\delta(m+k)}{\text{smt}(A) - 4\delta(m-1)}.$$

При стремлении δ к нулю правая часть неравенства стремится к $\text{smt}(A)/\text{mst}(A)$, поэтому существует такое значение δ_2 , для которого выполняется

$$\frac{\text{smt}(B)}{\text{mst}(B)} \leq \frac{\text{smt}(A)}{\text{mst}(A)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, если выбрать $\delta < \min(\delta_1, \delta_2)$, то выполняется

$$\frac{\text{smt}(B)}{\text{mst}(B)} < \text{sr}_n(\mathbb{X}_0) + \varepsilon.$$

Отсюда получим, что

$$\text{sr}_n(\mathbb{X}) \leq \frac{\text{smt}(B)}{\text{mst}(B)} < \text{sr}_n(\mathbb{X}_0) + \varepsilon,$$

что и означает полунепрерывность функции сверху.

3.2. Отношение Штейнера–Громова. Из определения следует, что в $\mathbb{X}_0$ существует такое множество A'' , состоящее из $m' \leq n$ различных вершин, для которого

$$\frac{\text{mf}(A'')}{\text{mst}(A'')} < \text{sgr}_n(\mathbb{X}_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вообще говоря, множество A'' не совпадает с множеством A из предыдущего пункта и $m' \neq m$. Однако для упрощения обозначений и вследствие того, что оценки, полученные в предыдущем случае, легко переносятся на случай отношения Штейнера–Громова, мы будем обозначать множество A'' буквой A , а близкое к нему множество в $\mathbb{X}$ буквой B .

Оценим теперь вес минимального заполнения для B . Рассмотрим граф G , являющийся минимальным заполнением для A . Рассмотрим новый граф, содержащий все ребра графа G , и содержащий ребра (a_i, b_i) с весом $\rho(a_i, b_i)$. Полученный граф является заполнением для B . Отсюда

$$\text{mf}(B) \leq \text{mf}(A) + \sum_{i=1}^m \rho(a_i, b_i) \leq \text{mf}(A) + 2\delta m.$$

Рассматривая оценки для отношения $\text{mf}(B)/\text{mst}(B)$ и устремляя δ к нулю, аналогичным образом получим справедливость утверждения для отношения Штейнера–Громова, как n -точечного, так и общего.

3.3. Суботношение Штейнера. Для проведения тех же рассуждений в случае суботношения Штейнера не хватает оценок снизу для $\text{smt}(B)$. Покажем, как их получить. По определению $\text{smt}(B)$ в пространстве $\mathbb{X}$ найдется такое множество $B' = B \cup \{b_i \mid i = m+1, \dots, m+q\}$, что длина минимального остовного дерева для этого множества не превосходит $\text{smt}(B) + 4\delta$ для любого $\delta > 0$. Отметим, что q – это число внутренних вершин дерева, которое не превосходит $m-2$ (см. [13; наблюдение 3.1.1]). E_B – множество ребер минимального остовного дерева для множества B' . В пространстве $\mathbb{X}_0$ найдем такие точки a_j ($j = m+1, \dots, m+q$), что $\rho(a_i, b_i) < 2\delta$. Возможно, что какие-то a_j при этом совпадут. Объединим все a_i ($i = 1, \dots, m+q$) в множество A' . Построим множество E_A , состоящее из пар (a_i, a_j) , причем (a_i, a_j) входит в E_A , если и только если (b_i, b_j) входит в E_B . В этом случае E_A – множество

ребер некоторого дерева, причем A является подмножеством его вершин. Оценим длину минимального дерева Штейнера, построенного для множества B :

$$\begin{aligned} \text{smt}(B) &\geq \sum_{(b_i, b_j) \in E_B} \rho(b_i, b_j) - 4\delta \\ &> \sum_{(a_i, a_j) \in E_A} (\rho(a_i, a_j) - 4\delta) - 4\delta \geq \text{smt}(A) - 4\delta(2m - 2). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что q , число внутренних вершин, не превосходит $m - 2$.

Завершение доказательства такое же, как и в предыдущих случаях.

4. Доказательство критерия непрерывности. Заметим сначала, что достаточность сразу следует из нижних оценок для отношений типа Штейнера (см. предложение 2) и доказанной полунепрерывности сверху.

Перейдем к доказательству необходимости. Предварительно докажем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть функция r_n обозначает одно из трех n -точечных отношений типа Штейнера: sr_n , sg_n или ssr_n . Множество, состоящее из компактных метрических пространств (X, ρ) , для которых

$$r_n(X) = \frac{n}{2(n-1)},$$

всюду плотно в пространстве Громова–Хаусдорфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с рассмотрения n -точечного отношения Штейнера. Покажем, что в любой окрестности любого пространства (X_0, ρ) существует X , для которого $\text{sr}_n(X) = n/(2(n-1))$.

Выберем точку $x \in X_0$ и рассмотрим пространство X , полученное из X_0 добавлением к нему конечного числа точек a_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Доопределим расстояния между новыми точками следующим образом:

$$\rho(a_i, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b = a_i, \\ \delta, & \text{если } b = x, \\ 2\delta, & \text{если } b = a_j, i \neq j, \\ \delta + \rho(x, b), & \text{если } b \in X_0. \end{cases}$$

Заметим, что построенное пространство компактно и $d_{GH}(X_0, X) \leq \delta$. Действительно, для пространств X_0 и X рассмотрим реализацию (X_0, X, X) : пространство X_0 целиком содержится в X , а точки $a_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, n$, находятся на расстоянии δ от точки $x \in X_0$.

Вычислим теперь значение $\text{sr}_n(X)$. Рассмотрим граничное множество M_n , состоящее из a_i , $i = 1, \dots, n$. Для этого множества

$$\text{mst}(M_n) = 2\delta(n-1).$$

Минимальное дерево Штейнера для этого множества – это “звезда” с вершиной x , т.е. ребра дерева соединяют x и каждое из a_i ($i = 1, \dots, n$). Тогда

$$\text{smt}(M_n) = \delta n.$$

Таким образом,

$$\text{sr}_n(\mathbb{X}) \leq \frac{\text{smt}(M_n)}{\text{mst}(M_n)} = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Но в силу предложения 2

$$\frac{n}{2(n-1)} \leq \text{sr}_n(\mathbb{X});$$

значит имеет место равенство.

Заметим, что для пространства X также выполнено равенство

$$\text{sgr}_n(X) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Поэтому для случая n -точечного отношения Штейнера–Громова все доказано.

Покажем, как построить требуемое пространство в случае рассмотрения n -точечного суботношения Штейнера. Выберем точку $x \in \mathbb{X}_0$ и построим $\mathbb{X}$, исключив из него точку x и добавив точки a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) с условиями

$$\rho(a_i, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b = a_i, \\ 2\delta, & \text{если } b = a_j, i \neq j, \\ 2\delta + \rho(x, b), & \text{если } b \in \mathbb{X}_0. \end{cases}$$

Для построенного пространства $d_{GH}(\mathbb{X}_0, \mathbb{X}) \leq \delta$.

Рассмотрим множество $M_n = \{a_i \in \mathbb{X}\}$, $i = 1, \dots, n$. Минимальным заполнением для данного множества является “звезда”, расстояние от центра которой до граничных вершин равно δ . Убедиться в этом можно, воспользовавшись достаточным условием минимальности заполнения (см. предложение 1). В этом случае $\text{mf}(M_n) = \delta n$. Покажем, что $\text{mst}(M_n) = \text{smt}(M_n) = 2\delta(n-1)$. Действительно, расстояние между любыми различными точками в пространстве $\mathbb{X}$ не меньше 2δ . Значит, если бы дерево Штейнера содержало какие-то дополнительные вершины, его вес был бы не меньше, чем $2\delta n$. Таким образом,

$$\text{ssr}_n(\mathbb{X}) \leq \frac{\text{mf}(M_n)}{\text{smt}(M_n)} = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Используя предложение 2, получим, что

$$\text{ssr}_n(\mathbb{X}) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Утверждение доказано.

Доказанное выше утверждение показывает, что если $r_n(\mathbb{X}_0) \neq n/(2(n-1))$, то в любой окрестности $\mathbb{X}_0$ найдется $\mathbb{X}$, для которого $r_n(\mathbb{X}_0) = n/(2(n-1))$. Значит, в таких $\mathbb{X}$ функция r_n претерпевает разрыв.

Рассмотрим теперь общие отношения типа Штейнера.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть функция r обозначает одно из трех отношений типа Штейнера: sr , sgr или ssr . Пусть $(\mathbb{X}_0, \rho)$ – компактное метрическое пространство, для которого

$$r_n(X_0) \neq \frac{1}{2}.$$

Тогда функция r разрывна в точке $(\mathbb{X}_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $r(\mathbb{X}_0) > 1/2$, найдется такое N , что

$$r(\mathbb{X}_0) > \frac{N}{2(N-1)} > \frac{1}{2}.$$

Из доказанного ранее утверждения 1 следует, что в любой окрестности $\mathbb{X}_0$ существует $\mathbb{X}$, для которого $r_N(\mathbb{X}) = N/(2(N-1))$. Для этого пространства

$$r(\mathbb{X}) \leq r_N(\mathbb{X}) = \frac{N}{2(N-1)} < r(\mathbb{X}_0).$$

Значит для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon = (r(\mathbb{X}_0) - r(\mathbb{X}))/2$, что выполняется условие

$$|r(\mathbb{X}) - r(\mathbb{X}_0)| > \varepsilon,$$

что и означает отсутствие непрерывности.

5. Замечание о точках непрерывности. В предыдущем разделе было показано, что множество точек непрерывности n -точечных отношений типа Штейнера всюду плотно в пространстве Громова–Хаусдорфа. Верен ли этот факт для общих отношений типа Штейнера?

Построим пример компактного пространства $\mathbb{X}$, для которого выполняются равенства $\text{sr}(\mathbb{X}) = 1/2$ и $\text{sgr}(\mathbb{X}) = 1/2$. Пространство $\mathbb{X}$ будет содержать некоторую выделенную точку x и счетное число точек a_{kn} , где $k = 1, \dots, n$, а n – произвольное натуральное число. Метрика ρ в данном пространстве определяется следующим образом. Выберем $\delta > 0$. Для любого натурального n и $k \leq n$ и для любого натурального m и $l \leq m$

$$\rho(a_{kn}, x) = \frac{\delta}{2^n}, \quad \rho(a_{kn}, a_{lm}) = \rho(a_{kn}, x) + \rho(a_{lm}, x).$$

Построенное пространство $\mathbb{X}$ является компактным.

Покажем, что два указанных отношения типа Штейнера достигают своего минимума на этом пространстве. Рассмотрим множества $M_n = \{a_{kn} \mid k = 1, \dots, n\}$. Минимальное дерево Штейнера для множества M_n – это “звезда” с центром в точке x . В этом случае

$$\frac{\text{mst}(M_n)}{\text{smt}(M_n)} = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Взяв точную нижнюю грань по всем таким множествам M_n , $n = 1, 2, \dots$, получим, что $\text{sr}(\mathbb{X}) = 1/2$. Поскольку для любого конечного множества M выполнено соотношение $\text{mf}(M) \leq \text{smt}(M)$, для отношения Штейнера–Громова данного метрического пространства справедливы оценки

$$\frac{1}{2} \leq \text{sgr}(\mathbb{X}) \leq \text{sr}(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}.$$

Это означает, что $\text{sgr}(\mathbb{X}) = \text{sr}(\mathbb{X}) = 1/2$.

Пусть теперь $\mathbb{X}_0$ – произвольное компактное метрическое пространство с метрикой ρ . Выделим некоторую точку x в нем. Добавим к пространству $\mathbb{X}_0$ счетное число точек a_{kn} , где $k = 1, \dots, n$, а n – произвольное натуральное число. Расстояния между точками исходного пространства $\mathbb{X}_0$ оставим без изменений. Определим

расстояния между добавленными точками так же, как и при построении пространства $\mathbb{X}$. Выполнено

$$\rho(a_{kn}, x) = \frac{\delta}{2^n},$$

$$\rho(a_{kn}, a_{lm}) = \rho(a_{kn}, x) + \rho(a_{lm}, x), \quad \rho(a_{kn}, x_0) = \rho(a_{kn}, x) + \rho(x_0, x),$$

где x_0 – произвольная точка из $\mathbb{X}_0$.

Полученное метрическое пространство назовем $\mathbb{Y}$. Оно компактно и для него $\text{sgr}(\mathbb{Y}) = \text{sr}(\mathbb{Y}) = 1/2$. Заметим, что $d_{GH}(\mathbb{X}_0, \mathbb{Y}) \leq \delta$. Значит мы показали, что в любой окрестности любого компактного метрического пространства можно указать компактное метрическое пространство, для которого отношение Штейнера и отношение Штейнера–Громова достигают своих минимальных значений. Тем самым доказаны следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Множество точек непрерывности функции sr всюду плотно в пространстве Громова–Хаусдорфа.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Множество точек непрерывности функции sgr всюду плотно в пространстве Громова–Хаусдорфа.*

Однако приведенные в этом разделе утверждения не позволяют сделать вывод о том, насколько велико множество точек непрерывности функции ssr . Вообще говоря, автор работы не знает ни одного примера компактного метрического пространства, для которого $\text{ssr}(\mathbb{X}) = 1/2$. Возможно, таких компактных метрических пространств не существует. Это означало бы, что функция, сопоставляющая компактному метрическому пространству его суботношение Штейнера, имеет разрыв в каждой точке.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук Александру Олеговичу Иванову за помощь на этапе решения задачи и при подготовке данной статьи, а также доктору физико-математических наук Алексею Августиновичу Тужилину и всем участникам семинара “Оптимальные сети” за проявленный интерес к работе. Автор также благодарен рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C.F. Gauss, “Briefwechsel Gauss–Schumacher”, *Werke*, Bd. X, 1, Göttingen, 1917, 459–468.
- [2] V. Jarník, M. Kössler, “O minimalnich grafeth obeahujících n daních bodů”, *Čas. Mat. Fys.*, **63** (1934), 223–235.
- [3] M. Gromov, “Filling Riemannian manifolds”, *J. Differential Geom.*, **18** (1983), 1–147.
- [4] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении”, *Матем. сб.*, **203**:5 (2012), 65–118.
- [5] А. Л. Гаркави, В. А. Шматков, “О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве”, *Матем. сб.*, **95**:2 (1974), 272–293.
- [6] L. Vesely, “A characterization of reflexivity in the terms of the existence of generalized centers”, *Extracta Math.*, **8**:2-3 (1993), 125–131.
- [7] M. Baronti, E. Casini, P. L. Papini, “Equilateral sets and their central points”, *Rend. Mat. Appl.* (7), **13**:1 (1993), 133–148.

- [8] P. L. Papini, “Two new examples of sets without medians and centers”, *Top*, **13**:2 (2005), 315–320.
- [9] П. А. Бородин, “Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 514–518.
- [10] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Современная математика, ИКИ, М.–Ижевск, 2003.
- [11] E. N. Gilbert, H. O. Pollak, “Steiner minimal trees”, *SIAM J. Appl. Math.*, **16**:1 (1968), 1–29.
- [12] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Современная математика, ИКИ, М.–Ижевск, 2004.
- [13] D. Cieslik, *The Steiner Ratio*, Comb. Optim., **10**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
- [14] А. С. Пахомова, “Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера–Громова”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2014, № 1, 17–25.

А. С. Пахомова

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Лаборатория дискретной и вычислительной
геометрии им. Б. Н. Делоне
Ярославского государственного университета
им. П. Г. Демидова
E-mail: anpahkom@gmail.com

Поступило

18.01.2013

Исправленный вариант

18.11.2013