Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Кравцева, Бесконечномерные уравнения Шрёдингера с полиномиальными потенциалами и представление их решений в виде интегралов Фейнмана, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 5, 788–791

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10254>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:55:31

Бесконечномерные уравнения Шрёдингера с полиномиальными потенциалами и представление их решений в виде интегралов Фейнмана

А. К. Кравцева

1. Введение. В статье получены условия существования интегралов Фейнмана в смысле аналитического продолжения и найдены их представления в виде гауссовских интегралов. Описан класс эволюционных уравнений, обладающих решениями, представимыми с помощью интегралов Фейнмана. Ранее представления решений эволюционных уравнений в виде интегралов Фейнмана были получены в работах Альбеверио, Бутко, Неклюдова, Смолянова, Токарева, Трумена, Шавгулидзе, Шамарова [1]–[8] и многих других. В статье развивается подход работ Смолянова, Шавгулидзе [5]–[7], в которых фейнмановский интеграл определялся через аналитическое продолжение по параметру. В данной работе используется продолжение в пространстве операторов, благодаря чему удается заметно расширить класс эволюционных уравнений, которые имеют решения, описываемые интегралами Фейнмана.

2. Интегралы Фейнмана. Обозначим через H вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, порождающим норму $\|\cdot\|$. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ – ортонормированный базис пространства H ; T – самосопряженный положительно-определенный ядерный оператор с собственными векторами $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ и соответствующими собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$; P_n – ортогональный проектор, действующий из H в H_n , где $H_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Через $X^{\mathbb{C}}$ обозначим комплексификацию произвольного гильбертова пространства X , через $B(X)$ – пространство линейных ограниченных операторов на данном пространстве. Пусть ν_A – семейство гауссовских мер с нулевыми средними и корреляционными операторами $A^{-1}T(A^*)^{-1}$, параметризованное обратимыми операторами $A \in B(H)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $g: B(H^{\mathbb{C}}) \times \mathbb{C} \times H \rightarrow \mathbb{C}$ называется *интегрируемой по мере Фейнмана*, если в некоторой непустой области $V \subset B(H) \times B(H) \times \mathbb{R}$ функция

$$G(A, B, \lambda) = \int_H g(B, \lambda, x) \nu_A(dx)$$

определена, т.е. данный интеграл существует, и обладает аналитическим продолжением $\tilde{G}(A, B, \lambda)$ в некоторую область $W \subset B(H^{\mathbb{C}}) \times B(H^{\mathbb{C}}) \times \mathbb{C}$. Величину $\tilde{G}(A, B, \lambda)$ при комплексных A, B, λ называют *интегралом Фейнмана* от функции g и обозначают через

$$\int_H g(B, \lambda, x) \exp \left\{ -\frac{(T^{-1}Ax, Ax)}{2} \right\} dx.$$

Пусть $q_{2l}: H \times \dots \times H \rightarrow \mathbb{R}$ – $2l$ -линейная непрерывная симметричная форма, причем $l \geq 2$ и $q_{2l}(x, \dots, x) > 0$ для любого x из H , не равного нулю. Пусть, далее, $p(x) = (q_{2l}(x, \dots, x))^{1/(2l)}$. Предполагаем, что $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ для всех x, y , лежащих в H , и существует число $c > 0$ такое, что неравенство

$$|q_{2l}(x_1, \dots, x_{2l})| \leq cp(x_1) \cdots p(x_{2l})$$

выполнено для всех $x_1, \dots, x_{2l} \in H$.

DOI: 10.4213/mzm10254

© А. К. КРАВЦЕВА, 2013

Введем пространство $F(H)$, состоящее из функций $f: H \rightarrow \mathbb{C}$, для каждой из которых существуют аналитическое продолжение $\tilde{f}: H^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ и константы $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $2l \geq \varepsilon > 0$ такие, что

$$|\tilde{f}(z)| \leq C_1 \exp\{C_2 |p(z)|^{2l-\varepsilon}\}$$

для всех z , лежащих в $H^{\mathbb{C}}$. Следующая теорема дает достаточное условие для существования функционального интеграла.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A, C \in B(H^{\mathbb{C}})$ – обратимые операторы. Пусть существуют $B \in B(H^{\mathbb{C}})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, такие, что $AC^{-1} = \lambda I + TB$, где I – единичный оператор в H , $|\lambda| > \|T\| \|B\|$. Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора A таков, что существует аналитическая кривая $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $\varphi(t) \notin \sigma(A)$ для любого $t \in [0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(1)| > \|A\|$, и пусть $f \in F(H)$. Тогда существует интеграл Фейнмана

$$\int_H \tilde{f}(Cx) \exp\{-(p(Cx))^{2l}\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}Ax, Ax)\right\} dx. \quad (1)$$

При этом найдутся оператор $S \in B(H)$ и константа $\omega > 1$ такие, что данный интеграл равен гауссовскому интегралу

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \det(I + (1/\lambda)TB)} \\ & \int_H \tilde{f}\left(CA^{-1}x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx\right) \\ & \times \exp\left\{-\left(p\left(CA^{-1}x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} Sx\right)\right)^{2l}\right\} \\ & \times \exp\left\{\omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} (T^{-1}AC^{-1}Sx, x) - \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\|x\|^4}{(p(Sx))^4} (T^{-1}AC^{-1}Sx, AC^{-1}Sx)\right\} \\ & \times J(x) \nu_I(dx), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} J(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \det & \left(I - \omega \frac{\|P_n x\|^2}{(p(S_n x))^2} P_n AC^{-1} S_n - P_n AC^{-1} S_n x \otimes \frac{2\omega}{(p(S_n x))^2} P_n x \right. \\ & \left. + P_n AC^{-1} S_n x \otimes \frac{2\omega \|P_n x\|^2}{(p(S_n x))^{2l+2}} q_{2l}(S_n x, \dots, S_n x, S_n) \right) \quad \forall x \neq 0, \end{aligned}$$

$$S_n = SP_n.$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Будем рассматривать вещественные операторы $A, B, C \in B(H)$ и положительное число λ такие, что A обратим, $\lambda > \|T\| \|B\|$, $C = (\lambda I + TB)^{-1}A$.

В интеграле (1) сделаем замену гауссовской меры; в результате получим

$$\int_H f(CA^{-1}y) \exp\{-(p(CA^{-1}y))^{2l}\} \exp\left\{-\frac{1}{2}(T^{-1}y, y)\right\} dy. \quad (3)$$

По свойству данной меры интеграл (3) равен

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \lambda_1 \dots \lambda_n}} \int_{H_n} f(CA^{-1}y) \exp\left\{-(p(CA^{-1}y))^{2l} - \frac{1}{2}(T^{-1}y, y)\right\} dy.$$

К конечнократному интегралу применим преобразование

$$y = x - \omega \frac{\|x\|^2}{(p(Sx))^2} P_n AC^{-1} Sx, \quad \text{где } Se_i = \gamma_i e_i, \quad \gamma_i \searrow 0,$$

снова перейдем к пределу при $n \rightarrow +\infty$ и получим равенство интегралов (1) и (2). При большом $\omega > 1$ старший член

$$\exp\left\{-\omega^{2l}\left\{\frac{\|x\|^{4l}}{(p(Sx))^{2l}}\right\}\right\}$$

в экспоненте $\exp\{-p(CA^{-1}x - \omega\{\|x\|^2/(p(Sx))^2\}Sx)\}^{2l}$ позволит доказать сходимость и аналитичность последнего интеграла при комплексных A, B, λ . Теперь существование интеграла Фейнмана следует из равенства этого интеграла исходному при вещественных параметрах. Теорема доказана.

3. Представление решений. Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, q) = \frac{1}{2} \Delta_{A^{-1}T_1(A^*)^{-1}} u(t, q) + v(Cq)u(t, q), \quad (4)$$

$$u(0, q) = u_0(Cq), \quad (5)$$

где T_1 – ядерный симметричный положительно-определенный оператор, заданный в гильбертовом пространстве H_1 , оснащенном скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_1$, порождающим норму $\|\cdot\|_1$, $u: [0, \infty) \times H_1 \rightarrow \mathbb{C}$ – искомая функция, $A, C \in B(H_1^{\mathbb{C}})$,

$$\Delta_{A^{-1}T_1(A^*)^{-1}} = \sum_{i,j=1}^{\infty} (A^{-1}T_1(A^*)^{-1}l_i, l_j) \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j},$$

$l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ – ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора T_1 . Пусть $v_k: H_1 \times \dots \times H_1 \rightarrow \mathbb{R}$ – линейное по каждой из k переменных непрерывное симметричное отображение, $k = 1, \dots, 2l$, $l \geq 2$, $v_{2l}(q, \dots, q) > 0$ при $q \neq 0$. При этом

$$r(q_1 + q_2) \leq r(q_1) + r(q_2) \quad \forall q_1, q_2 \in H_1, \quad \text{где } r(q) = (v_{2l}(q, \dots, q))^{1/(2l)}.$$

Предположим также, что для некоторых $c_k > 0$ выполнены неравенства

$$|v_k(q_1, \dots, q_k)| \leq c_k r(q_1) \cdots r(q_k), \quad k = 1, \dots, 2l.$$

Положим

$$v(q) = \sum_{i=1}^{2l} v_i(q, \dots, q).$$

Пусть $t > 0$, $E = \{x \in C([0, t], H_1) : x(t) = 0\}$. Обозначим через $\Phi(H_1)$ пространство функций $u_0: H_1 \rightarrow \mathbb{C}$, для каждой из которых имеются аналитическое продолжение $\tilde{u}_0: H_1^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ и константы $c > 0$, $1/(4\|T_1\|) > \varepsilon > 0$ такие, что

$$|\tilde{u}_0(z)| \leq c \exp\{\varepsilon \|z\|_1^2\} \quad \forall z \in H_1^{\mathbb{C}}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть A, C – обратимые операторы из $B(H_1^{\mathbb{C}})$. Существуют $\lambda \in \mathbb{C}$, $B \in B(H_1^{\mathbb{C}})$ такие, что $AC^{-1} = \lambda I_1 + T_1 B$, где I_1 – единичный оператор в H_1 , $|\lambda| > \|T_1\|_1 \|B\|_1$. Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора A таков, что найдется аналитическая кривая $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $\varphi(t) \notin \sigma(A)$ для любого $t \in [0, 1]$, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(1)| > \|A\|_1$, и пусть $u_0 \in \Phi(H_1)$. Тогда задача Коши имеет решение, которое представляется в виде интеграла Фейнмана в смысле аналитического продолжения,

$$\begin{aligned} u(t, q) = \int_E \exp\left\{\int_0^t v(C(q + x(\tau))) d\tau\right\} u_0(C(x(0) + q)) \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^t (T_1^{-1} A x'(\tau), A x'(\tau))_1 d\tau\right\} dx. \end{aligned} \quad (6)$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Предположим, что A и C – произвольные вещественные обратимые операторы из $B(H_1)$. Тогда гауссовский интеграл (6) является решением уравнения (4), удовлетворяющим начальному условию (5) [9]. При этом мера порождается квадратичной формой $b(x) = \int_0^t (T_1^{-1}Ax'(\tau), Ax'(\tau))_1 d\tau$, определенной на пространстве E_0 , состоящем из функций $x \in E$ таких, что

- для любого $\tau \in [0, t]$ $x(\tau) \in A^{-1}T_1^{1/2}H_1$;
- п.в. на $[0, t]$ существует $x'(\tau) \in A^{-1}T_1^{1/2}H_1$;
- выполнено

$$\int_0^t (T_1^{-1}Ax'(\tau), Ax'(\tau))_1 d\tau < \infty.$$

Зафиксируем произвольное $0 < \delta < 1/2$. Рассмотрим элемент $\xi \in E$ и представим его в виде $\xi(\tau) = h(\tau) + e(\tau)\xi(0)$, где $e(\tau) = (t - \tau)/t$. Поскольку $h(0) = h(t) = 0$,

$$h(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n \tau}{t}\right), \quad \text{где } b_n \in H_1, \quad \tau \in [0, t].$$

Функции h , удовлетворяющие условию $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\delta} \|b_n\|_1^2 < \infty$, образуют гильбертово пространство H_δ со скалярным произведением $(h_1, h_2)_\delta = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\delta} (b_n^1, b_n^2)_1$ для

$$h_i(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^i \sin\left(\frac{\pi n \tau}{t}\right), \quad i = 1, 2, \quad \tau \in [0, t].$$

Интеграл $\int_0^t (T_1^{-1}h'(\tau), h'(\tau))_1 d\tau$ равен

$$\frac{\pi^2}{2t} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2(1-\delta)} n^{2\delta} (T_1^{-1}b_n, b_n)_1.$$

Следовательно, он представляет собой квадратичную форму, порождающую гауссовскую меру в H_δ с ядерным корреляционным оператором. Из теоремы 1 вытекает существование функционального интеграла (6), если в качестве пространства H взять $H_\delta \oplus H_1$. Равенство (4) продолжается по аналитичности на комплексные A, B, C, λ такие, что $AC^{-1} = \lambda I_1 + T_1 B$. При этом остается выполненным начальное условие (5). Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность Е. Т. Шавгулидзе за постановку задачи, руководство работой и помощь в подготовке статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Альбеверио, О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Докл. РАН*, **361**:6 (1998), 727–730.
 [2] Я. А. Бутко, *Матем. заметки*, **83**:3 (2008), 333–349. [3] А. Ю. Неклюдов, *Матем. заметки*, **83**:4 (2008), 581–589. [4] О. Г. Smolyanov, A. G. Tokarev, A. Truman, *J. Math. Phys.*, **43**:10 (2002), 5161–5171. [5] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Континуальные интегралы*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1990. [6] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Докл. РАН*, **390**:3 (2003), 321–324. [7] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Докл. РАН*, **408**:1 (2006), 28–33. [8] Н. Н. Шамаров, *Матем. заметки*, **75**:2 (2004), 311–316. [9] Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах*, Наука, М., 1983.

А. К. Кравцева

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: k-anna-k@mail.ru

Поступило

25.04.2013