Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. М. Вуколова, Оценки смешанных норм производных и смешанных модулей гладкости функций, имеющих монотонные коэффициенты Фурье, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 841–854

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10256>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 16:01:45

Оценки смешанных норм производных и смешанных модулей гладкости функций, имеющих монотонные коэффициенты Фурье

Т. М. Вуколова

В работе доказываются оценки снизу и сверху смешанных норм производных и смешанных модулей гладкости функций, имеющих монотонные коэффициенты Фурье.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10256

1. Обозначения и формулировка основных результатов. Введем следующие обозначения:

- $L_{p_1 p_2}$, $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$, – множество измеримых функций двух переменных $f(x_1, x_2)$, 2π -периодических по каждой переменной и таких, что

$$\|f\|_{p_1 p_2} = \left(\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{1/p_2} < \infty;$$

- $L_{p_1 p_2}^0$ – множество функций $f \in L_{p_1 p_2}$ таких, что $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_1 = 0$ для почти всех x_2 и $\int_0^{2\pi} f(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для почти всех x_1 ;
- $s_{m_1, \infty}(f)$, $s_{\infty, m_2}(f)$, $s_{m_1, m_2}(f)$, $m_i = 0, 1, 2, \dots$, – частичные суммы ряда Фурье функции $f(x_1, x_2)$;
- $f^{(r_1, r_2)}$ – производная в смысле Вейля функции $f(x_1, x_2)$ порядка r_1 , $r_1 \geq 0$, по переменной x_1 и порядка r_2 , $r_2 \geq 0$, по переменной x_2 [1; с. 240].

Для функции $f \in L_{p_1 p_2}$ определим разности положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 следующим образом:

$$\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(f) = \sum_{\nu_1=0}^{\infty} (-1)^{\nu_1} \binom{\alpha_1}{\nu_1} f(x_1 + (\alpha_1 - \nu_1)h_1, x_2),$$

$$\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f) = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} (-1)^{\nu_2} \binom{\alpha_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + (\alpha_2 - \nu_2)h_2),$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-00043).

где

$$\binom{\alpha}{\nu} = \begin{cases} 1, & \nu = 0, \\ \alpha, & \nu = 1, \\ \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-\nu+1)}{\nu!}, & \nu \geq 2. \end{cases}$$

Обозначим через $\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2)_{p_1 p_2}$ смешанный модуль гладкости положительных порядков α_1 и α_2 соответственно по переменным x_1 и x_2 , т. е.

$$\omega_{\alpha_1, \alpha_2}(f, \delta_1, \delta_2) = \sup_{|h_i| < \delta_i, i=1,2} \|\Delta_{h_1}^{\alpha_1}(\Delta_{h_2}^{\alpha_2}(f))\|_{p_1 p_2}.$$

Будем писать, что $f \in M_{p_1 p_2}$, если выполнены следующие условия:

- 1) $f \in L_{p_1 p_2}^0$, где $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$;
- 2) функция $f(x_1, x_2)$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1, n_2} \psi_1(n_1 x_1) \psi_2(n_2 x_2), \quad (1.1)$$

где $\psi_i(t)$ – это либо $\cos t$, либо $\sin t$;

- 3) коэффициенты a_{n_1, n_2} удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} a_{n_1, n_2} &\rightarrow 0 && \text{при } n_1 \rightarrow \infty \text{ и любом } n_2, \\ a_{n_1, n_2} &\rightarrow 0 && \text{при } n_2 \rightarrow \infty \text{ и любом } n_1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\Delta_{11} a_{n_1, n_2} = a_{n_1, n_2} - a_{n_1, n_2+1} - a_{n_1+1, n_2} + a_{n_1+1, n_2+1} \geq 0. \quad (1.3)$$

Заметим, что условие (1.2) следует из того, что $f \in L_{p_1 p_2}^0$.

Отметим, что из условий (1.2) и (1.3) следует, что

$$a_{n_1, m_1} \geq a_{n_2, m_1} \quad \text{и} \quad a_{n_1, m_1} \geq a_{n_1, m_2} \quad \text{при } n_1 < n_2 \quad \text{и} \quad m_1 < m_2, \quad (1.4)$$

$$a_{n_1, n_2} \geq 0 \quad \text{для любых } n_1 \text{ и } n_2. \quad (1.5)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in M_{p_1 p_2}$, $1 < p_i < \infty$, $\alpha_i > 0$, $r_i \geq 0$, $i = 1, 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\begin{aligned} 1) \quad C_1 \|f^{(r_1, r_2)}\|_{p_1 p_2} &\leq \left\{ \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} (a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2})^{p_1} n_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} n_2^{p_2-2} \right\}^{1/p_2} \\ &\equiv A \leq C_2 \|f^{(r_1, r_2)}\|_{p_1 p_2}, \\ 2) \quad C_3 \omega_{\alpha_1, \alpha_2} \left(f, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \right)_{p_1 p_2} &\leq n_1^{-\alpha_1} n_2^{-\alpha_2} \left(\sum_{\nu_2=1}^{n_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} a_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{(\alpha_2+1)p_2-2} \right)^{1/p_2} \\ &\quad + n_1^{-\alpha_1} \left(\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} a_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} \\ &\quad + n_2^{-\alpha_2} \left(\sum_{\nu_2=1}^{n_2} \left(\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty} a_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{(\alpha_2+1)p_2-2} \right)^{1/p_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty} a_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} \\
& \equiv A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \leq C_4 \omega_{\alpha_1, \alpha_2} \left(f, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \right)_{p_1 p_2},
\end{aligned}$$

где $n_i \in \mathbb{N}$ и положительные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 зависят лишь от α_i, r_i и $p_i, i = 1, 2$.

Отметим, что утверждение 1) этой теоремы при $r_1 = r_2 = 0$ является аналогом одномерной хорошо известной теоремы Харди–Литтлвуда [2; т. 2, с. 129], утверждение 2) является аналогом одномерного результата работы [3].

2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1 (см. [1; с. 241]). Пусть $f \in L_{p_1 p_2}^0, 1 < p_i < \infty, i = 1, 2$. Пусть $\bar{f}_{x_i}(x_1, x_2)$ – функция, сопряженная с функцией $f(x_1, x_2)$ по переменной $x_i, i = 1, 2$. Тогда

$$\bar{f}_{x_i} \in L_{p_1 p_2}^0 \quad \text{и} \quad \|\bar{f}_{x_i}\|_{p_1 p_2} \leq C_{p_1 p_2} \|f\|_{p_1 p_2},$$

где постоянная $C_{p_1 p_2}$ зависит лишь от p_1 и p_2 .

ЛЕММА 2. Пусть функция $\varphi(x_1, x_2) \in L_{p_1 p_2}^0$ и имеет ряд Фурье

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} b_{n_1, n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2,$$

где $b_{n_1, n_2} = a_{n_1, n_2} r_1^{n_1} r_2^{n_2}, r_i \geq 0, p_i \in (1, \infty), i = 1, 2$, числа a_{n_1, n_2} удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3). Пусть

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad \varphi_2(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \varphi_1(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Тогда

$$b_{n_1, n_2} \leq C_5 n_1 n_2 \varphi_2 \left(\frac{\pi}{n_1 + 1}, \frac{\pi}{n_2 + 1} \right), \quad \text{где } n_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2,$$

постоянная C_5 зависит лишь от r_1 и r_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\
F_1(x_1) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(x_1, t_2) dt_2 - B, \quad F_2(x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(t_1, x_2) dt_1 - B, \\
F(x_1, x_2) &= \varphi_2(x_1, x_2) - F_1(x_1) - F_2(x_2) - B.
\end{aligned}$$

Справедливы следующие свойства функций F_1, F_2 и F :

- 1) $\int_0^{2\pi} F_1(x_1) dx_1 = 0;$
- 2) $\int_0^{2\pi} F_2(x_2) dx_2 = 0;$

- 3) $\int_0^{2\pi} F(x_1, x_2) dx_1 = 0$ для почти всех x_2 ;
- 4) $\int_0^{2\pi} F(x_1, x_2) dx_2 = 0$ для почти всех x_1 ;
- 5) $F(0, 0) = B$;
- 6) $F\left(\frac{\pi}{k_1 + 1}, 0\right) = -F_1\left(\frac{\pi}{k_1 + 1}\right), \quad k_1 \in \mathbb{N}$;
- 7) $F\left(0, \frac{\pi}{k_2 + 1}\right) = -F_2\left(\frac{\pi}{k_2 + 1}\right), \quad k_2 \in \mathbb{N}$;
- 8) $F\left(\frac{\pi}{k_1 + 1}, \frac{\pi}{k_2 + 1}\right) = \varphi_2\left(\frac{\pi}{k_1 + 1}, \frac{\pi}{k_2 + 1}\right) - F_1\left(\frac{\pi}{k_1 + 1}\right) - F_2\left(\frac{\pi}{k_2 + 1}\right) - B,$
 $k_i \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2.$

Из этих свойств следует, что

$$\varphi_2\left(\frac{\pi}{k_1 + 1}, \frac{\pi}{k_2 + 1}\right) = F\left(\frac{\pi}{k_1 + 1}, \frac{\pi}{k_2 + 1}\right) - F\left(\frac{\pi}{k_1 + 1}, 0\right) - F\left(0, \frac{\pi}{k_2 + 1}\right) + F(0, 0). \quad (2.1)$$

Функция $F(x_1, x_2)$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2}}{n_1^2 n_2^2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2. \quad (2.2)$$

Так как $b_{n_1, n_2} = a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2}$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x_1, x_2) \in L_{p_1 p_2}^0$, то, применяя неравенство Гёльдера, получим, что

$$b_{n_1, n_2} \leq C_6 \|\varphi\|_{p_1 p_2}. \quad (2.3)$$

Для любых фиксированных x_1 и x_2 рассмотрим ряд

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2}}{n_1^2 n_2^2} |\cos n_1 x_1| |\cos n_2 x_2|. \quad (2.4)$$

Оценим частичную сумму

$$S_{N_1 N_2}(x_1, x_2) = \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{n_1=1}^{N_1} \frac{a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2}}{n_1^2 n_2^2} |\cos n_1 x_1| |\cos n_2 x_2|$$

ряда (2.4) для любых фиксированных x_1 и x_2 , учитывая неравенство (2.3):

$$S_{N_1 N_2}(x_1, x_2) \leq \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{n_1=1}^{N_1} \frac{a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2}}{n_1^2 n_2^2} \leq C_6 \|\varphi\|_{p_1 p_2} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{n_1=1}^{N_1} \frac{1}{n_1^2 n_2^2} \leq C_7 \|\varphi\|_{p_1 p_2} < \infty.$$

Откуда следует, что для любых фиксированных x_1 и x_2 ряд (2.4) сходится (по Принсгейму). Но тогда для любых фиксированных x_1 и x_2 сходится (по Принсгейму) и ряд (2.2). Итак, для любых фиксированных x_1 и x_2 имеем

$$F(x_1, x_2) = \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2}}{n_1^2 n_2^2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2.$$

Но тогда, применяя равенство (2.1), получим, что

$$\varphi_2\left(\frac{\pi}{k_1+1}, \frac{\pi}{k_2+1}\right) = 4 \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \frac{a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2}}{n_1^2 n_2^2} \sin^2 \frac{\pi n_1}{2(k_1+1)} \sin^2 \frac{\pi n_2}{2(k_2+1)}.$$

Так как

$$\sin \frac{\pi n_i}{2(k_i+1)} = -\sin \frac{\pi(n_i + 2(k_i+1))}{2(k_i+1)} = \sin \frac{\pi(n_i + 4(k_i+1))}{2(k_i+1)} = -\dots,$$

то

$$\begin{aligned} & \varphi_2\left(\frac{\pi}{k_1+1}, \frac{\pi}{k_2+1}\right) \\ &= 4 \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{2k_1+1} \sum_{m_2=1}^{2k_2+1} a_{m_1+2l_1(k_1+1), m_2+2l_2(k_2+1)} (m_1 + 2l_1(k_1+1))^{r_1-2} \\ & \quad \times (m_2 + 2l_2(k_2+1))^{r_2-2} \sin^2 \frac{\pi(m_1 + 2l_1(k_1+1))}{2(k_1+1)} \sin^2 \frac{\pi(m_2 + 2l_2(k_2+1))}{2(k_2+1)} \\ & \geq 4 \sum_{m_1=[(k_1+1)/2]+1}^{k_1+1} \sum_{m_2=[(k_2+1)/2]+1}^{k_2+1} a_{m_1, m_2} m_1^{r_1-2} m_2^{r_2-2} \sin^2 \frac{\pi m_1}{2(k_1+1)} \sin^2 \frac{\pi m_2}{2(k_2+1)}. \end{aligned}$$

Так как для $[(k_i+1)/2] + 1 \leq m_i \leq k_i + 1$, $i = 1, 2$, имеем

$$\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi([(k_i+1)/2] + 1)}{2(k_i+1)} \leq \frac{\pi m_i}{2(k_i+1)} \leq \frac{\pi(k_i+1)}{2(k_i+1)} = \frac{\pi}{2},$$

то $\sin^2(\pi m_i/(2(k_i+1))) \geq 1/2$, $i = 1, 2$, и

$$\varphi_2\left(\frac{\pi}{k_1+1}, \frac{\pi}{k_2+1}\right) \geq \sum_{m_1=[(k_1+1)/2]+1}^{k_1} \sum_{m_2=[(k_2+1)/2]+1}^{k_2} a_{m_1, m_2} m_1^{r_1-2} m_2^{r_2-2}.$$

Так как числа a_{m_1, m_2} удовлетворяют условиям (1.4) и (1.5), то

$$\begin{aligned} \varphi_2\left(\frac{\pi}{k_1+1}, \frac{\pi}{k_2+1}\right) & \geq a_{k_1, k_2} \sum_{m_1=[(k_1+1)/2]+1}^{k_1} \sum_{m_2=[(k_2+1)/2]+1}^{k_2} m_1^{r_1-2} m_2^{r_2-2} \\ & \geq C_8 a_{k_1, k_2} k_1^{r_1-1} k_2^{r_2-1} = C_8 b_{k_1, k_2} (k_1 k_2)^{-1}, \end{aligned}$$

где постоянная C_8 зависит лишь от r_1 и r_2 . Откуда и следует утверждение леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть $f \in L_{p_1 p_2}$, $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$. Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\pi \left(\int_0^\pi \left[x_1^{-1} x_2^{-1} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} |f(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 \right]^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{1/p_2} \\ & \leq C(p_1, p_2) \left(\int_0^\pi \left(\int_0^\pi |f(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \right)^{1/p_2}, \end{aligned}$$

где постоянная $C(p_1, p_2)$ зависит лишь от p_1 и p_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 3 почти дословно повторяет доказательство леммы 2 работы [4] и поэтому опускается.

ЛЕММА 4. Пусть последовательность чисел $\{a_{n_1, n_2}\}$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3); пусть $b_{n_1, n_2} = a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2}$, где $r_i \geq 0$, $i = 1, 2$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{n_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_1=1}^{\nu_1} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| n_1 n_2 \leq C_9 \sum_{n_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_1=1}^{\nu_1} a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2}, \\ \text{б)} \quad & \sum_{n_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_1=\nu_1}^{\infty} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| n_2 \leq C_{10} \left\{ \nu_1^{r_1} \sum_{n_2=1}^{\nu_2} a_{\nu_1, n_2} n_2^{r_2} + \sum_{n_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty} a_{n_1, n_2} n_1^{r_1-1} n_2^{r_2} \right\}, \\ \text{в)} \quad & \sum_{n_2=\nu_2}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\nu_1} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| n_1 \leq C_{11} \left\{ \nu_2^{r_2} \sum_{n_1=1}^{\nu_1} a_{n_1, \nu_2} n_1^{r_1} + \sum_{n_2=\nu_2+1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\nu_1} a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2-1} \right\}, \\ \text{г)} \quad & \sum_{n_2=\nu_2}^{\infty} \sum_{n_1=\nu_1}^{\infty} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| \\ & \leq C_{12} \left\{ a_{\nu_1, \nu_2} \nu_1^{r_1} \nu_2^{r_2} + \nu_1^{r_1} \sum_{n_2=\nu_2+1}^{\infty} a_{\nu_1, n_2} n_2^{r_2-1} + \nu_2^{r_2} \sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty} a_{n_1, \nu_2} n_1^{r_1-1} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n_2=\nu_2+1}^{\infty} \sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty} a_{n_1, n_2} n_1^{r_1-1} n_2^{r_2-1} \right\}, \\ \text{д)} \quad & \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| \leq C_{13} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1, n_2} n_1^{r_1-1} n_2^{r_2-1}, \end{aligned}$$

где постоянные C_9 – C_{13} зависят лишь от r_1 и r_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 4 проводится простыми выкладками и поэтому опускается.

ЛЕММА 5 (см. [4; лемма 4]). Пусть последовательность чисел $\{b_{n_1, n_2}\}$ удовлетворяет условиям (1.2) и

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| < \infty.$$

Тогда ряд

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} b_{n_1, n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2$$

сходится по Принсгейму всюду на $(0, 2\pi)^2$.

ЛЕММА 6 (см. [5]). Пусть последовательность чисел $\{b_n\}$ такова, что $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\Delta_1 b_n = b_{n+1} - b_n \geq 0$ для любого натурального n ; пусть числа α , λ и p таковы, что $\alpha < -1$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, $p \in (0, \infty)$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left[\sum_{\nu=1}^n b_{\nu} \nu^{\lambda} \right]^p \leq C_{14} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} (b_n n^{\lambda+1})^p,$$

где постоянная C_{14} зависит лишь от α , λ и p .

ЛЕММА 7. Пусть последовательность чисел $\{b_n\}$ такова, что $b_n \rightarrow 0$; при $n \rightarrow \infty$ и $\Delta_1 b_n \geq 0$ для любого натурального n ; пусть числа α , λ и p таковы, что $\alpha > -1$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$, $p \in (0, \infty)$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left[\sum_{\nu=n}^{\infty} b_{\nu} \nu^{\lambda} \right]^p \leq C_{15} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} (b_n n^{\lambda+1})^p,$$

где постоянная C_{15} зависит лишь от α , λ и p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 7 аналогично доказательству леммы 6 и поэтому опускается.

ЛЕММА 8 (см. [6]). Пусть $f \in L_{p_1 p_2}^0$, $1 < p_i < \infty$, $\alpha_i > 0$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} C_{16} \omega_{\alpha_1, \alpha_2} \left(f, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \right)_{p_1 p_2} &\leq n_1^{-\alpha_1} n_2^{-\alpha_2} \|S_{n_1, n_2}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(f)\|_{p_1 p_2} + n_1^{-\alpha_1} \|S_{n_1, \infty}^{(\alpha_1, 0)}(f - S_{\infty, n_2}(f))\|_{p_1 p_2} \\ &\quad + n_2^{-\alpha_2} \|S_{\infty, n_2}^{(0, \alpha_2)}(f - S_{n_1, \infty}(f))\|_{p_1 p_2} + \|f - S_{n_1, \infty}(f) - S_{\infty, n_2}(f) + S_{n_1, n_2}(f)\|_{p_1 p_2} \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \leq C_{17} \omega_{\alpha_1, \alpha_2} \left(f, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \right)_{p_1 p_2}, \end{aligned}$$

где положительные постоянные C_{16} и C_{17} зависят лишь от α_1 , α_2 , p_1 и p_2 .

3. Доказательство утверждения 1) теоремы. Пусть функция $\varphi(x_1, x_2)$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2. \quad (3.1)$$

Тогда, применяя определение $f^{(r_1, r_2)}$, $r_i \geq 0$, $i = 1, 2$, и лемму 1, получим для $1 < p_i < \infty$ следующие утверждения:

если $f^{(r_1, r_2)} \in L_{p_1 p_2}^0$, то $\varphi \in L_{p_1 p_2}^0$ и

$$\|\varphi\|_{p_1 p_2} \leq C_{18} \|f^{(r_1, r_2)}\|_{p_1 p_2}, \quad (3.2)$$

если $\varphi \in L_{p_1 p_2}^0$, то $f^{(r_1, r_2)} \in L_{p_1 p_2}^0$ и

$$\|f^{(r_1, r_2)}\|_{p_1 p_2} \leq C_{19} \|\varphi\|_{p_1 p_2}. \quad (3.3)$$

Учитывая неравенства (3.2) и (3.3), для доказательства утверждения 1 теоремы достаточно доказать неравенства

$$C_{20} \|\varphi\|_{p_1 p_2} \leq A \leq C_{21} \|\varphi\|_{p_1 p_2}, \quad (3.4)$$

где положительные постоянные C_{20} и C_{21} зависят лишь от p_i и r_i , $i = 1, 2$.

1. Сначала докажем оценку сверху в неравенствах (3.4). Пусть $\varphi(x_1, x_2) \in L_{p_1 p_2}^0$ и имеет ряд Фурье (3.1). Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2, & \varphi_2(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \varphi_1(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \\ \psi_2(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} |\varphi_1(t_1, t_2)| dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Применяя лемму 2, получим, что для любых $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, справедливо неравенство

$$a_{k_1, k_2} \leq C_{22} \psi_2 \left(\frac{\pi}{k_1 + 1}, \frac{\pi}{k_2 + 1} \right) k_1^{1-r_1} k_2^{1-r_2}. \quad (3.5)$$

Теперь рассмотрим A^{p_2} . Применяя неравенство (3.5), получим

$$\begin{aligned} A^{p_2} &\leq C_{22}^{p_2} \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2^{2p_2-2} \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \psi_2^{p_1} \left(\frac{\pi}{n_1+1}, \frac{\pi}{n_2+1} \right) n_1^{2p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \\ &\leq C_{23} \sum_{n_2=1}^{\infty} \int_{\pi/(n_2+1)}^{\pi/n_2} x_2^{-2p_2} dx_2 \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \int_{\pi/(n_1+1)}^{\pi/n_1} x_1^{-2p_1} dx_1 \psi_2^{p_1} \left(\frac{\pi}{n_1+1}, \frac{\pi}{n_2+1} \right) \right)^{p_2/p_1} \\ &\leq C_{23} \sum_{n_2=1}^{\infty} \int_{\pi/(n_2+1)}^{\pi/n_2} x_2^{-2p_2} \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \int_{\pi/(n_1+1)}^{\pi/n_1} x_1^{-2p_1} \psi_2^{p_1}(x_1, x_2) dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \\ &= C_{23} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} (x_1^{-2} x_2^{-2} \psi_2(x_1, x_2))^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \\ &\leq C_{23} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \left[x_1^{-1} x_2^{-1} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} |\varphi_1(t_1, t_2)| t_1^{-1} t_2^{-1} dt_1 dt_2 \right]^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3, имеем

$$\begin{aligned} A^{p_2} &\leq C_{24} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} x_1^{-1} x_2^{-1} |\varphi_1(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \\ &\leq C_{24} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(x_1^{-1} x_2^{-1} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} |\varphi(t_1, t_2)| dt_1 dt_2 \right)^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2. \end{aligned}$$

Опять применяя лемму 3, получим

$$A^{p_2} \leq C_{25} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\pi} |\varphi(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} dx_2 \leq C_{26} \|\varphi\|_{p_1 p_2}^{p_2}.$$

Тем самым доказана оценка сверху в неравенствах (3.4).

2. Теперь докажем оценку снизу в неравенствах (3.4). Пусть функция $\varphi(x_1, x_2)$ имеет ряд Фурье (3.1) и для нее $A < \infty$. Обозначим $b_{n_1, n_2} = a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2}$. Тогда $b_{n_1, n_2} \rightarrow 0$ при $n_1 \rightarrow \infty$ и любом n_2 и при $n_2 \rightarrow \infty$ и любом n_1 .

Применяя лемму 4д), получим

$$\Phi \equiv \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| \leq C_{27} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1, n_2} n_1^{r_1-1} n_2^{r_2-1}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\Phi \leq C_{28} \left(\sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} (a_{n_1, n_2} n_1^{r_1} n_2^{r_2})^{p_1} n_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} n_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} = C_{28} A < \infty.$$

Теперь, применяя лемму 5, получим, что ряд (3.1) сходится к $\varphi(x_1, x_2)$ (по Принсгейму) всюду на $(0, 2\pi)^2$.

Применяя преобразование Абеля, получим, что почти всюду

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \Delta_{11} b_{n_1, n_2} B_{n_1}(x_1) B_{n_2}(x_2),$$

где

$$B_{n_i}(x_i) = \cos x_i + \cos 2x_i + \dots + \cos n_i x_i.$$

Тогда имеем

$$I = \|\varphi\|_{p_1 p_2}^{p_2} = 2^{1+p_2/p_1} \left(\int_0^\pi \left[\int_0^\pi |\varphi(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2 \right) \leq C_{29} (J_1 + J_2 + J_3 + J_4),$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \int_{\pi/(\nu_2+1)}^{\pi/\nu_2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \int_{\pi/(\nu_1+1)}^{\pi/\nu_1} \left(\sum_{n_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_1=1}^{\nu_1} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| |B_{n_1}(x_1)| |B_{n_2}(x_2)| \right)^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2, \\ J_2 &= \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \int_{\pi/(\nu_2+1)}^{\pi/\nu_2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \int_{\pi/(\nu_1+1)}^{\pi/\nu_1} \left(\sum_{n_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| |B_{n_1}(x_1)| |B_{n_2}(x_2)| \right)^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2, \\ J_3 &= \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \int_{\pi/(\nu_2+1)}^{\pi/\nu_2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \int_{\pi/(\nu_1+1)}^{\pi/\nu_1} \left(\sum_{n_2=\nu_2+1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\nu_1} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| |B_{n_1}(x_1)| |B_{n_2}(x_2)| \right)^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2, \\ J_4 &= \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \int_{\pi/(\nu_2+1)}^{\pi/\nu_2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \int_{\pi/(\nu_1+1)}^{\pi/\nu_1} \left(\sum_{n_2=\nu_2+1}^{\infty} \sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| |B_{n_1}(x_1)| |B_{n_2}(x_2)| \right)^{p_1} dx_1 \right]^{p_2/p_1} dx_2. \end{aligned}$$

Далее будем пользоваться при оценке конечных сумм неравенствами $|B_{n_i}(x_i)| \leq C_{30} n_i$, а при оценке бесконечных сумм – неравенствами $|B_{n_i}(x_i)| \leq C_{30}/x_i$, $0 < x_i < \pi$, где постоянная C_{30} не зависит ни от n_i , ни от x_i , $x_i \in (0, \pi)$, $i = 1, 2$. Пользуясь этими оценками, имеем

$$J_1 \leq C_{31} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \nu_2^{-2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \nu_1^{-2} \left(\sum_{n_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_1=1}^{\nu_1} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| n_1 n_2 \right)^{p_1} \right]^{p_2/p_1}.$$

Применяя лемму 4а), а затем лемму 6, получаем

$$J_1 \leq C_{32} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \nu_2^{-2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \nu_1^{-2} \left(\sum_{n_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_1=1}^{\nu_1} a_{n_1, n_2} r_1^{r_1} n_2^{r_2} \right)^{p_1} \right]^{p_2/p_1}$$

$$\leq C_{33} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \nu_2^{-2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \nu_1^{(r_1+1)p_1-2} \left(\sum_{n_2=1}^{\nu_2} a_{\nu_1, n_2} n_2^{r_2} \right)^{p_1} \right]^{p_2/p_1}.$$

Применяя неравенство Минковского, а затем лемму 6, имеем

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C_{33} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \nu_2^{-2} \left[\sum_{n_2=1}^{\nu_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \nu_1^{(r_1+1)p_1-2} a_{\nu_1, n_2}^{p_1} \right)^{1/p_1} n_2^{r_2} \right]^{p_2} \\ &\leq C_{34} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \nu_2^{(r_2+1)p_2-2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \nu_1^{(r_1+1)p_1-2} a_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \right)^{p_2/p_1} = C_{34} A^{p_2}. \end{aligned}$$

Теперь оценим J_2 :

$$J_2 \leq C_{35} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \nu_2^{-2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \nu_1^{p_1-2} \left(\sum_{n_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_1=\nu_2+1}^{\infty} |\Delta_{11} b_{n_1, n_2}| n_2 \right)^{p_1} \right]^{p_2/p_1}.$$

Применяя лемму 4б), имеем

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C_{36} \left\{ \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \nu_2^{-2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \nu_1^{(r_1+1)p_1-2} \left(\sum_{n_2=1}^{\nu_2} a_{\nu_1, n_2} n_2^{r_2} \right)^{p_1} \right]^{p_2/p_1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \nu_2^{-2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \left(\sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\nu_2} a_{n_1, n_2} n_2^{r_2} n_1^{r_1-1} \right)^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right]^{p_2/p_1} \right\} \\ &= C_{36} (J_{21} + J_{22}). \end{aligned}$$

Применяя лемму 7, получим

$$J_{22} \leq C_{37} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \nu_2^{-2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \nu_1^{(r_1+1)p_1-2} \left(\sum_{n_2=1}^{\nu_2} a_{\nu_1, n_2} n_2^{r_2} \right)^{p_1} \right]^{p_2/p_1} = C_{37} J_{21}.$$

Применяя неравенство Минковского, а затем лемму 6, имеем

$$\begin{aligned} J_{21} &\leq \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \nu_2^{-2} \left[\sum_{n_2=1}^{\nu_2} \nu_2^{r_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \nu_1^{(r_1+1)p_1-2} a_{\nu_1, n_2}^{p_1} \right)^{1/p_1} \right]^{p_2} \\ &\leq C_{38} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} n_2^{(r_2+1)p_2-2} \left[\sum_{\nu_1=1}^{\infty} \nu_1^{(r_1+1)p_1-2} a_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \right]^{p_2/p_1} = C_{38} A^{p_2}. \end{aligned}$$

Объединяя оценки для J_{21} и J_{22} , имеем $J_2 \leq C_{39} A^{p_2}$.

Аналогично оцениваются J_3 и J_4 .

Итак, показано, что $I \leq C_{40} A^{p_2}$. Следовательно, $\|\varphi\|_{p_1 p_2} \leq C_{41} A$. Таким образом, доказана оценка снизу в неравенствах (3.3).

Утверждение 1) теоремы доказано полностью.

4. Доказательство утверждения 2) теоремы. Применяя утверждение 1) теоремы, получим справедливость неравенств

$$C_{42} A_1 \leq I_1 \leq C_{43} A_1, \quad (4.1)$$

где положительные постоянные C_{42} и C_{43} зависят лишь от α_1 , α_2 , p_1 и p_2 .

Теперь выясним взаимосвязь между A_2 и I_2 . Рассмотрим функцию $h_1(x_1, x_2)$, имеющую ряд Фурье

$$\sum_{\nu_2=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{n_1} a_{\nu_1, \nu_2}^* \cos \nu_1 x_1 \cos \nu_2 x_2, \quad (4.2)$$

где

$$a_{\nu_1, \nu_2}^* = \begin{cases} a_{\nu_1, \nu_2}, & \text{если } 1 \leq \nu_1 \leq n_1, \nu_2 \geq n_2 + 1, \\ a_{\nu_1, n_2}, & \text{если } 1 \leq \nu_1 \leq n_1, 1 \leq \nu_2 \leq n_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Так как последовательность $\{a_{\nu_1, \nu_2}^*\}$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3), то ряд (4.2) сходится по Принсгейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, к функции $h_1(x_1, x_2)$ [7].

Рассмотрим еще функцию

$$h_2(x_1, x_2) = \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \sum_{\nu_1=1}^{n_1} a_{\nu_1, \nu_2}^* \cos \nu_1 x_1 \cos \nu_2 x_2.$$

Тогда

$$S_{n_1 \infty}(f - S_{\infty n_2}(f)) = h_1 - h_2. \quad (4.4)$$

Сначала оценим I_2 . Применяя равенство (4.4), имеем

$$I_2 = n_1^{-\alpha_1} \|(h_1 - h_2)^{(\alpha_1, 0)}\|_{p_1 p_2} \leq n_1^{-\alpha_1} (\|h_1^{(\alpha_1, 0)}\|_{p_1 p_2} + \|h_2^{(\alpha_1, 0)}\|_{p_1 p_2}).$$

Так как функции h_1 и h_2 удовлетворяют условиям утверждения 1) теоремы, то справедливо неравенство

$$I_2 \leq C_{44} n_1^{-\alpha_1} \left(\left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} (a_{\nu_1, \nu_2}^*)^{p_1} \nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} + \left(\sum_{\nu_2=1}^{n_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} (a_{\nu_1, \nu_2}^*)^{p_1} \nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} \right).$$

Откуда, применяя обозначения (4.3), получим

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C_{45} n_1^{-\alpha_1} \left\{ \left(\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} a_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} + n_2^{1-1/p_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} a_{\nu_1, n_2}^{p_1} \nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2} \right)^{1/p_1} \right\} \\ &\leq C_{46} \left\{ A_2 + n_1^{-\alpha_1} n_2^{-\alpha_2} \left(\sum_{\nu_2=1}^{n_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} a_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{(\alpha_2+1)p_2-2} \right)^{1/p_2} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано неравенство

$$I_2 \leq C_{47}(A_2 + A_1). \quad (4.5)$$

Теперь оценим A_2 . Ясно, что

$$A_2 \leq n_1^{-\alpha_1} \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} (a_{\nu_1, \nu_2}^*)^{p_1} \nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2}.$$

Применяя утверждение 1) теоремы, а затем равенство (4.4), получим

$$A_2 \leq n_1^{-\alpha_1} \|h_1^{(\alpha_1, 0)}\|_{p_1 p_2} \leq I_2 + n_1^{-\alpha_1} \|h_2^{(\alpha_1, 0)}\|_{p_1 p_2}.$$

Опять применяя утверждение 1) теоремы и обозначения (4.3), имеем

$$\begin{aligned} A_2 &\leq I_2 + C_{48} n_1^{-\alpha_1} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} a_{\nu_1, n_2}^{p_1} \nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2} \right)^{1/p_1} n_2^{1-1/p_2} \\ &\leq I_2 + C_{49} n_1^{-\alpha_1} n_2^{-\alpha_2} \left(\sum_{\nu_2=1}^{n_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} a_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{(\alpha_1+1)p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{(\alpha_2+1)p_2-2} \right)^{1/p_2} \\ &= I_2 + C_{49} A_1. \end{aligned}$$

Применяя соотношение (4.1), получим, что

$$A_2 \leq C_{50} (I_1 + I_2). \quad (4.6)$$

Аналогично рассуждая, получим, что

$$I_3 \leq C_{51} (A_1 + A_2), \quad (4.7)$$

$$A_3 \leq C_{52} (I_1 + I_3). \quad (4.8)$$

Из вышеизложенного следует, что константы C_{49} , C_{50} , C_{51} , и C_{52} зависят лишь от α_1 , α_2 , p_1 и p_2 .

Теперь оценим I_4 . Рассмотрим функции $\varphi(x_1, x_2)$, $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$, $\varphi_3(x_1, x_2)$, имеющие соответственно ряды Фурье

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{\infty} b_{\nu_1, \nu_2} \cos \nu_1 x_1 \cos \nu_2 x_2, & \quad \sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} \sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty} b_{\nu_1, \nu_2} \cos \nu_1 x_1 \cos \nu_2 x_2, \\ \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \sum_{\nu_1=1}^{\infty} b_{\nu_1, \nu_2} \cos \nu_1 x_1 \cos \nu_2 x_2, & \quad \sum_{\nu_2=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{n_1} b_{\nu_1, \nu_2} \cos \nu_1 x_1 \cos \nu_2 x_2, \end{aligned}$$

где

$$b_{\nu_1, \nu_2} = \begin{cases} a_{\nu_1, \nu_2}, & \nu_1 \geq n_1 + 1, \nu_2 \geq n_2 + 1, \\ a_{\nu_1, n_2+1}, & \nu_1 \geq n_1 + 1, 1 \leq \nu_2 \leq n_2, \\ a_{n_1+1, \nu_2}, & 1 \leq \nu_1 \leq n_1, \nu_2 \geq n_2 + 1, \\ a_{n_1+1, n_2+1}, & 1 \leq \nu_1 \leq n_1, 1 \leq \nu_2 \leq n_2. \end{cases} \quad (4.9)$$

Так как последовательность $\{b_{\nu_1, \nu_2}\}$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3), то эти ряды сходятся по Принсгейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, соответственно к функциям φ , φ_1 , φ_2 и φ_3 [7].

Рассмотрим еще функцию

$$\varphi_4(x_1, x_2) = \sum_{\nu_2=1}^{n_2} \sum_{\nu_1=1}^{n_1} b_{\nu_1, \nu_2} \cos \nu_1 x_1 \cos \nu_2 x_2.$$

Тогда имеем

$$\varphi_1 = \varphi - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4, \quad \varphi_1 = f - S_{n_1, \infty}(f) - S_{\infty, n_2}(f) + S_{n_1, n_2}(f).$$

Так как $I_4 = \|\varphi_1\|_{p_1 p_2}$, то

$$I_4 \leq \|\varphi\|_{p_1 p_2} + \|\varphi_2\|_{p_1 p_2} + \|\varphi_3\|_{p_1 p_2} + \|\varphi_4\|_{p_1 p_2}.$$

Каждая из функций φ , φ_2 , φ_3 и φ_4 удовлетворяет условиям утверждения 1) теоремы. Применяя ее, имеем

$$\begin{aligned} I_4 \leq C_{53} \Big\{ & \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=1}^{\infty} b_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} \\ & + \left(\sum_{\nu_2=1}^{n_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{\infty} b_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} \\ & + \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} b_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} \\ & + \left(\sum_{\nu_2=1}^{n_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} b_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} \Big\}. \end{aligned}$$

Откуда, применяя обозначения (4.9), получим

$$\begin{aligned} I_4 \leq C_{54} \Big\{ & \left(\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty} a_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} \\ & + n_2^{1-1/p_2} \left(\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty} a_{\nu_1, n_2+1}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{1/p_1} \\ & + n_1^{1-1/p_1} \left(\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} a_{n_1+1, \nu_2}^{p_2} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} + n_1^{1-1/p_1} n_2^{1-1/p_2} a_{n_1+1, n_2+1} \Big\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Откуда следует, что

$$I_4 \leq C_{55}(A_4 + A_3 + A_2 + A_1). \quad (4.11)$$

Теперь оценим A_4 . Ясно, что

$$A_4 \leq \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=1}^{\infty} b_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2}.$$

Применяя утверждение 1) теоремы, получим, что $A_4 \leq C_{56} \|\varphi\|_{p_1 p_2}$. Так как $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4$, то

$$A_4 \leq C_{57}(\|\varphi_1\|_{p_1 p_2} + \|\varphi_2\|_{p_1 p_2} + \|\varphi_3\|_{p_1 p_2} + \|\varphi_4\|_{p_1 p_2}).$$

Учитывая, что $\|\varphi_1\|_{p_1 p_2} = I_4$, и затем применяя утверждение 1) теоремы, имеем

$$A_4 \leq C_{58} \left\{ I_4 + \left(\sum_{\nu_2=1}^{n_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{\infty} b_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} \right\}$$

$$+ \left(\sum_{\nu_2=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} b_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} \\ + \left(\sum_{\nu_2=1}^{n_2} \left(\sum_{\nu_1=1}^{n_1} b_{\nu_1, \nu_2}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{p_2/p_1} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} \Big\}.$$

Применяя обозначения (4.9), получим

$$A_4 \leq C_{59} \left\{ I_4 + \left(\sum_{\nu_1=n_1+1}^{\infty} a_{\nu_1, n_2+1}^{p_1} \nu_1^{p_1-2} \right)^{1/p_1} n_2^{1-1/p_2} \right. \\ \left. + \left(\sum_{\nu_2=n_2+1}^{\infty} a_{n_1+1, \nu_2}^{p_2} \nu_2^{p_2-2} \right)^{1/p_2} n_1^{1-1/p_1} + a_{n_1+1, n_2+1} n_1^{1-1/p_1} n_2^{1-1/p_2} \right\} \\ \leq C_{60} \{I_4 + A_3 + A_2 + A_1\}$$

Применяя оценки (4.1), (4.6) и (4.8), имеем

$$A_4 \leq C_{61}(I_4 + I_3 + I_2 + I_1). \quad (4.12)$$

Теперь из оценок (4.1), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.11) и (4.12) следует, что

$$C_{62}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \leq I_4 + I_3 + I_2 + I_1 \leq C_{63}(A_1 + A_2 + A_3 + A_4), \quad (4.13)$$

где, как следует из вышеизложенного, положительные постоянные C_{62} и C_{63} зависят лишь от α_1 , α_2 , p_1 и p_2 .

Из справедливости неравенств (4.13), применяя лемму 8, получим справедливость утверждения 2) теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975.
- [2] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, 2, Мир, М., 1965.
- [3] М. И. Дьяченко, М. К. Потапов, Б. В. Симонов, С. Ю. Тихонов, “Модули гладкости дробных порядков функций из пространств L_p , $1 < p < \infty$ ”, *Современные проблемы математики и механики*, Тр. мех.-матем. фак-та МГУ, **6**, № 1, МГУ, М., 2011, 90–110.
- [4] М. И. Дьяченко, “О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **129**:1 (1986), 55–72.
- [5] Т. М. Вуколова, М. И. Дьяченко, “О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1995, № 3, 22–32.
- [6] Б. В. Симонов, “Взаимосвязь модулей гладкости с частичными суммами ряда Фурье и теоремы вложения классов Никольского”, *Докл. РАН*, **437**:6 (2011), 751–753.
- [7] G. H. Hardy, “On double Fourier series, and especially those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters”, *Quart. J.*, **37** (1905), 53–79.

Т. М. Вуколова

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: tmvukolova@mail.ru

Поступило

20.02.2013

Исправленный вариант

03.12.2013