Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Асташкин, Об аппроксимации подпространств симметричных пространств, порожденных независимыми функциями, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 643–652

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10257>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:09:26

Об аппроксимации подпространств симметричных пространств, порожденных независимыми функциями

С. В. Асташкин

Пусть E – подпространство симметричного пространства X , порожденное n одинаково распределенными независимыми функциями. Доказано, что при определенных условиях на X существует проектор P , $\|P\| \leq K$ (K зависит только от X), образ которого содержит E и имеет размерность, не большую, чем $Cn \ln(n+1)$ (C не зависит от n и X).

Библиография: 23 названия.

DOI: 10.4213/mzm10257

1. Введение. Пусть X – банахово пространство. Для его любого подпространства E , $\dim E = n$, и произвольного $M > 1$ определим $k = k_X(E, M)$ как наименьшее число, для которого существует ограниченный линейный оператор $U: X \rightarrow X$ такой, что $Ux = x$, если $x \in E$, $\|U\| \leq M$ и $\text{rank } U \leq k$. Кроме того, положим

$$k_X(n, M) := \sup\{k_X(E, M) : E - \text{подпространство } X, \dim E = n\}.$$

В случае $L_p = L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, функция равномерности ограниченного аппроксимационного свойства $k_p(n, M) := k_{L_p}(n, M)$ была введена в 1988 г. Фигелем, Джонсоном и Шехтманом [1]. Еще раньше, не определяя этой величины явно, Пелчинский и Розенталь в [2] доказали ее конечность для любых $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$ и $M > 1$. Более того, работа [2] содержит аргумент (принадлежащий Квапеню), из которого фактически следует, что величина $k_p(n, 1 + \epsilon)$ имеет порядок, не превышающий $(n/\epsilon)^{Cn}$ для некоторого $C > 0$.

В [1] был получен ряд оценок величины $k_1(E, M)$ в случае, когда E – подпространство, порожденное некоторой системой независимых функций. Так, если E – линейная оболочка n стандартных гауссовских или радемахеровских случайных величин, то

$$k_1(E, M) \geq \exp(\delta M^{-2}n),$$

где $\delta > 0$ – некоторая константа. В то же время, для подпространства, порожденного n симметричными p -устойчивыми величинами [3; § 6.4], имеем

$$k_1(E, M) \geq \exp(\delta M^{-2}n^{2/q});$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания.

здесь $1 < p < 2$, $1/p + 1/q = 1$. В частности, из этих оценок тотчас же следует, что для каждого фиксированного M функция равномерности $k_1(n, M)$ удовлетворяет экспоненциальной нижней оценке по n . В то же время, согласно гипотезе, высказанной в работе [4], для каждого $1 < p < \infty$ найдется такое $M = M(p)$, что $k_p(n, M)$ имеет верхнюю полиномиальную оценку по n . В ее подтверждение Джонсон и Шехтман показали, что для линейной оболочки E произвольных n независимых функций справедливо неравенство

$$k_p(E, M) \leq Cn \ln(n+1),$$

где $C > 0$ – некоторая константа, не зависящая от $1 < p < \infty$ и $n \in \mathbb{N}$ [4]. Основная цель этой заметки состоит в доказательстве аналогичной оценки величины $k_X(E, M)$ для широкого класса симметричных пространств в том случае, когда функции, порождающие E , одинаково распределены. В частности, такая оценка будет доказана для пространства Зигмунда $L \ln^\beta L$, если $\beta \geq 1$, а E – подпространство, порожденное n симметричными p -устойчивыми величинами, $1 < p < 2$, что резко контрастирует с ранее упомянутой экспоненциальной нижней оценкой величины $k_1(E, M)$. Принципиально новым (по сравнению с [4]) ингредиентом в доказательстве будет применение результатов работы [5] о дополняемости подпространств симметричных пространств, порожденных сжатиями и сдвигами.

Заметим, что из дополняемости подпространства симметричного пространства, порожденного (бесконечной) последовательностью одинаково распределенных независимых функций, вытекает его изоморфность пространству l_2 [6; теорема 4.2]. Так как во многих важных случаях последнее не выполнено (например, если $1 \leq r < p < 2$, та же самая последовательность p -устойчивых величин эквивалентна в L_r стандартному базису l_p , а не l_2), рассматриваемая здесь задача далеко не тривиальна.

2. Определения и предварительные сведения. В дальнейшем мы придерживаемся следующих общепринятых обозначений. Через $[x_k]_{k=1}^n$ будет обозначаться замкнутая линейная оболочка векторов x_k , $k = 1, 2, \dots, n$, в банаховом пространстве X . Как обычно, $\text{supp } f$ – носитель функции f , т.е. множество всех t из ее области определения, для которых $f(t) \neq 0$, а χ_E – характеристическая функция множества E . И наконец, выражение $F \asymp G$ означает, что $cF \leq G \leq CF$ для некоторых констант $c > 0$ и $C > 0$, не зависящих от всех или части аргументов выражений F и G .

(а). *Симметричные пространства.* Банахово пространство X , состоящее из вещественнозначных функций, измеримых по Лебегу на интервале $[0, \alpha)$, $0 < \alpha \leq \infty$, называется *симметричным* (или *перестановочно-инвариантным*), если из того, что $y \in X$ и $x^*(t) \leq y^*(t)$ ($t \in [0, \alpha)$), следует

$$x \in X \quad \text{и} \quad \|x\|_X \leq \|y\|_X.$$

Здесь и далее m – мера Лебега, а $x^*(t)$ – невозрастающая непрерывная справа *перестановка* $|x(s)|$, т.е.

$$x^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 : m(\{s \in [0, \alpha) : |x(s)| > \tau\}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Если X – симметричное пространство (СП) на интервале $[0, \alpha)$, то *ассоциированное* пространство X' состоит из всех измеримых функций y , для которых

$$\|y\|_{X'} := \sup \left\{ \int_0^\alpha |x(t)y(t)| dt : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \right\} < \infty.$$

Если X^* – пространство, сопряженное к X , то $X' \subset X^*$ и $X' = X^*$, если и только если X сепарабельно. Естественное вложение X в его второе двойственное X'' является изометрической сюръекцией тогда и только тогда, когда X *максимально*, т.е. из того, что $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq X$, $f_n \rightarrow f$ п.в. на $[0, \alpha)$ и $\sup_n \|f_n\|_X < \infty$, следует

$$f \in X \quad \text{и} \quad \|f\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_X.$$

Далее, следуя [7], будем считать, что все рассматриваемые СП сепарабельны или максимальны. Кроме того, будет предполагаться выполненным условие нормировки $\|\chi_{[0,1]}\|_X = 1$.

Важными примерами СП являются L_p -пространства ($1 \leq p \leq \infty$), а также их обобщение – пространства Орлича. Пусть Φ – функция Орлича на $[0, \infty)$, т.е. Φ – непрерывная выпуклая возрастающая функция на $[0, \infty)$,

$$\Phi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \Phi(u) = \infty.$$

Пространство Орлича L_Φ состоит из всех функций f , измеримых на $[0, \alpha)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_\Phi} = \inf \left\{ \rho > 0 : \int_0^\alpha \Phi(|f(t)|/\rho) dt \leq 1 \right\}.$$

Пусть ψ – возрастающая вогнутая функция, определенная на $[0, \alpha)$, $\psi(0) = 0$. *Пространство Марцинкевича* $M(\psi)$ (соответственно *пространство Лоренца* $\Lambda(\psi)$) состоит из всех измеримых на $[0, \alpha)$ функций f , для которых конечна норма

$$\|f\|_{M(\psi)} = \sup_{0 < s < \alpha} \frac{1}{\psi(s)} \cdot \int_0^s f^*(t) dt \quad \left(\text{соответственно} \quad \|f\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^\alpha f^*(t) d\psi(t) \right).$$

Нам понадобится также понятие СП случайных величин (СВ), определенных на произвольном вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$. А именно, если X – СП на $[0, 1]$, то соответствующее пространство $X(\Omega)$ состоит из таких СВ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$f^* \in X \quad \text{и} \quad \|f\|_{X(\Omega)} := \|f^*\|_X.$$

Здесь, как и ранее,

$$f^*(t) = \inf \{ \tau \geq 0 : \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \tau\} \leq t \}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Подробнее о СП см. монографии [7] и [8].

(b). *Дополняемость подпространств СП, порожденных сжатиями и сдвигами.* Напомним определение класса СП $\mathcal{N}_0$, введенного в работе [5]. Пусть X – СП на $[0, 1]$. Для произвольной $a \in X$ положим

$$a_{n,k}(t) := a(2^n t - k + 1) \chi_{\Delta_{n,k}}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n,$$

где $\Delta_{n,k} = [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$. Через $Q_{a,n}$ обозначим линейную оболочку функций

$$a_{n,k}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. СП X на $[0, 1]$ принадлежит классу $\mathcal{N}_0$, если для каждой $a \in X$, $a = a^*$, существует последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ в X , удовлетворяющих условиям

$$P_n(X) = Q_{a,n} \quad \text{и} \quad \sup_{n=0,1,\dots} \|P_n\|_{X \rightarrow X} < \infty.$$

Согласно [5; теорема 4], если X – СП на $[0, 1]$, то $X \in \mathcal{N}_0$ тогда и только тогда, когда оператор тензорного произведения $x \otimes y(s, t) = x(s)y(t)$ ограничен из $X \times X$ в СП $X([0, 1] \times [0, 1])$. Это описание класса $\mathcal{N}_0$ вместе с известными результатами об ограниченности оператора тензорного произведения в СП [9]–[15] дают достаточно много информации о том, какие СП ему принадлежат. В частности, пространство Орлича L_Φ принадлежит $\mathcal{N}_0$, если и только если функция $\Phi(u)$ полумультимпликативна при больших $u > 0$, т.е., если для некоторых $C > 0$ и $u_0 > 0$ выполнено

$$\Phi(uv) \leq C\Phi(u)\Phi(v), \quad u, v \geq u_0.$$

Аналогичное условие:

$$\psi(st) \leq C\psi(s)\psi(t), \quad 0 \leq s, t \leq 1,$$

необходимо и достаточно для того, чтобы пространство Лоренца $\Lambda(\psi) \in \mathcal{N}_0$. Пространство Марцинкевича $M(\psi) \in \mathcal{N}_0$ тогда и только тогда, когда $\psi' \otimes \psi' \in M(\psi)(I \times I)$ [5; теорема 1].

Заметим, что предположение $a = a^*$ в определении класса $\mathcal{N}_0$ не существенно. Действительно, используя устойчивость нормы проектора на подпространство, порожденное последовательностью векторов, относительно их малых возмущений (см., например, [3; теорема 1.3.9]), нетрудно показать, что условие $X \in \mathcal{N}_0$ гарантирует существование последовательности проекторов $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ на X , удовлетворяющих условиям

$$P_n(X) = Q_{a,n} \quad \text{и} \quad \sup_{n=0,1,\dots} \|P_n\|_{X \rightarrow X} < \infty,$$

для произвольного $a \in X$ (см. доказательство леммы 5 в [16]). Кроме того, из доказательства теоремы 2 (i) в [5] следует, что эта последовательность может быть выбрана так, что $\|P_n\|_{X \rightarrow X} \leq B_X$, $n = 0, 1, \dots$, где B_X зависит только от X .

(c). *Свойство Круглова.* Пусть f – измеримая функция на $[0, 1]$. Через $\pi(f)$ обозначим СВ $\sum_{i=1}^N f_i$, где f_i – независимые копии f (т.е. имеют то же распределение, что и f), а N – СВ, независимая относительно последовательности $\{f_i\}$, имеющая распределение Пуассона с параметром 1, т.е.

$$\mathbb{P}\{N = k\} = \frac{1}{e \cdot k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Следующее свойство имеет своим источником работу Круглова [17] и интенсивно изучалось Браверманом [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что СП X на $[0, 1]$ имеет *свойство Круглова*, $X \in \mathbb{K}$, если из того, что $f \in X$, следует $\pi(f) \in X$.

Напомним, что для любого СП X на $[0, 1]$ справедливы непрерывные вложения $L_\infty \subseteq X \subseteq L_1$ [8; теорема 2.4.1]. СП обладает свойством Круглова при условии, что оно достаточно “удалено” от наименьшего из СП, т.е. от L_∞ . Например, если $X \supseteq L_p$ для некоторого $p < \infty$, то $X \in \mathbb{K}$. В частности, для пространства Орлича L_Φ последнее выполнено, если Φ удовлетворяет Δ_2 -условию в бесконечности, т.е. существуют $A > 0$ и $u_0 > 0$ такие, что

$$\Phi(2u) \leq A\Phi(u) \quad \text{для всех } u \geq u_0.$$

Однако свойством Круглова могут обладать и СП, не содержащие L_p ни при каком $p < \infty$. Так, например, экспоненциальное пространство Орлича L_{N_γ} , построенное по функции Орлича N_γ , эквивалентной в бесконечности функции e^{t^γ} (оно также часто называется пространством Зигмунда и обозначается через $\text{Exp } L^\gamma$), имеет свойство Круглова, если $0 < \gamma \leq 1$.

Важность класса $\mathbb{K}$ обусловлена, прежде всего, тем, что нормы сумм независимых в среднем равных нулю функций в СП $X \in \mathbb{K}$ эквивалентны нормам сумм их попарно дизъюнктивных копий в некотором СП на полуоси $[0, \infty)$. А именно, следуя [18] (см. также [7; 2.f]), для любого СП X на $[0, 1]$ определим множество Z_X , состоящее из всех таких измеримых $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\|f\|_{Z_X} := \|f^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|f^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2[1,\infty)} < \infty.$$

Нетрудно показать, что квазинорма $\|\cdot\|_{Z_X}$ эквивалентна некоторой симметричной норме, и поэтому Z_X является СП на $[0, \infty)$ [19; § 4.1]. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность функций, определенных на $[0, 1]$, то через $\{\bar{f}_k\}_{k=1}^\infty$ далее будет обозначаться последовательность их попарно дизъюнктивных копий, определенных на $[0, \infty)$, например,

$$\bar{f}_k(t) = f_k(t - k + 1)\chi_{[k-1,k)}(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, если $X \in \mathbb{K}$, то ввиду [4; теорема 1] и [19; теорема 25] с константами, зависящими лишь от X , для произвольной последовательности независимых функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, $\int_0^1 f_k(s) ds = 0$, имеет место эквивалентность

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty f_k \right\|_X \asymp \left\| \sum_{k=1}^\infty \bar{f}_k \right\|_{Z_X}. \quad (1)$$

Подробнее о свойствах СП со свойством Круглова см. монографию [6] и обзор [19].

3. Основные результаты и их доказательства.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Y – такое СП на $[0, \infty)$, что $\|f\|_Y = \|f\|_X$, если $\text{supp } f \subset [0, 1]$, где X – СП на $[0, 1]$, $X \in N_0$. Если $\{f_i\}_{i=1}^n \subset Y$ – произвольная последовательность попарно дизъюнктивных одинаково распределенных функций такая, что

$$m(\text{supp } f_i) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

то для каждого $\epsilon > 0$ найдется проектор $P: Y \rightarrow Y$, для которого

$$Pf_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \|P\| \leq B_X + 1 + \epsilon, \quad \dim P(Y) \leq Cn \ln(n+1),$$

где $C = C(\epsilon)$ не зависит от X и $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, предположим, что $\|f_i\|_Y = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\|f_i \chi_{\{|f_i| \leq \epsilon/n\}}\|_Y \leq \frac{\epsilon}{n} \|\chi_{[0,1]}\|_X = \frac{\epsilon}{n},$$

и, таким образом, заменяя f_i результатом нормировки функции $f_i \chi_{\{|f_i| > \epsilon/n\}}$ при достаточно малом $\epsilon > 0$, опять ввиду устойчивости нормы проектора относительно малых возмущений [3; теорема 1.3.9] можем предположить, что

$$\left\{ |f_i| \leq \frac{\epsilon}{n} \right\} = \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть

$$g_i := f_i \chi_{\{|f_i| > n\}}, \quad h_i = f_i - g_i, \quad G := \bigcup_{i=1}^n \text{supp } g_i.$$

Так как

$$1 \geq \|g_i\|_Y = \|g_i\|_X \geq \|g_i\|_1 \geq n \cdot m\{|f_i| > n\},$$

то $m(G) \leq 1$. Следовательно, на функциях с носителем из множества G $\|\cdot\|_Y$ совпадает с $\|\cdot\|_X$. Кроме того, так как по условию $X \in \mathcal{N}_0$, существует проектор $Q: Y \rightarrow Y$, образ которого совпадает с линейной оболочкой $[g_i]_{i=1}^n$, такой, что

$$\|Q\| \leq B_X \quad \text{и} \quad Qf = 0,$$

если $G \cap \text{supp } f = \emptyset$.

Далее, следуя доказательству теоремы 10 из [4], представим каждую h_i в виде суммы $m \approx 2 \ln(n/\epsilon) / \ln(1 + \epsilon)$ дизъюнктивных функций, модули которых – “почти” характеристические функции некоторых множеств. А именно, пусть m – наименьшее целое число, для которого $n(1 + \epsilon)^{-m} \leq \epsilon/n$, и для всех $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$

$$A_{i,k} := \{n(1 + \epsilon)^{-k} < |f_i| \leq n(1 + \epsilon)^{-k+1}\}.$$

Напомним [8; § 2.3], что линейная оболочка $[\chi_{B_i}]_{i=1}^n$ произвольной последовательности характеристических функций попарно дизъюнктивных множеств B_i дополняема в каждом СП. Проектором служит обычный оператор усреднения

$$Uf(t) := \sum_{i=1}^n \frac{1}{m(B_i)} \int_{B_i} f(s) ds \cdot \chi_{B_i}(t),$$

причем $\|U\| = 1$. Если теперь z_i – такие функции, что $\text{supp } z_i \subset B_i$ и $|z_i(s)|/|z_i(t)| \leq 1 + \epsilon$ для всех s и t из B_i , $i = 1, \dots, n$, то оператор

$$W'f(t) := \sum_{i=1}^n \left(\int_{B_i} |z_i(s)| ds \right)^{-1} \int_{B_i} f(s) ds \cdot |z_i(t)|$$

– проектор на подпространство $[z_i]_{i=1}^n$ и $|W'f(t)| \leq (1 + \epsilon)|Uf(t)|$, откуда

$$\|W'\| \leq 1 + \epsilon.$$

Тогда оператор $Wf := \delta W'(\delta f)$, где $\delta := \text{sign}(\sum_{i=1}^n z_i)$, является проектором на подпространство $[z_i]_{i=1}^n$,

$$\|W\| \leq 1 + \epsilon \quad \text{и} \quad Wf = 0,$$

если $\text{supp } f \cap (\bigcup_{i=1}^n B_i) = \emptyset$.

Таким образом, существует проектор R из Y , образ которого – линейная оболочка $[f_i \chi_{A_{i,k}}]_{i=1, k=1}^{n,m}$, такой, что

$$\|R\| \leq 1 + \epsilon \quad \text{и} \quad Rf = 0,$$

если $\text{supp } f \cap \text{supp } h_i = \emptyset$ для всех $i = 1, \dots, n$. В итоге $P := Q + R$ – проектор из Y на подпространство

$$F := [(f_i \chi_{\{|f_i| > n\}})_{i=1}^n \cup (f_i \chi_{A_{i,k}})_{i=1, k=1}^{n,m}]$$

размерности не более чем $n(m+1) \approx C(\epsilon)n \ln(n+1)$ такой, что $\|P\| \leq B_X + 1 + \epsilon$. Так как $F \supseteq [f_i]_{i=1}^n$, теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – СП на $[0, 1]$, $X \in \mathcal{N}_0 \cap \mathbb{K}$ и $X' \in \mathbb{K}$. Тогда существует такое M_X , что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для произвольного подпространства E пространства X , порожденного n независимыми одинаково распределенными функциями, найдется проектор $P: X \rightarrow X$, для которого $\|P\| \leq M_X$, $Px = x$ ($x \in E$) и $\dim P(X) \leq Cn \ln(n+1)$, где константа C не зависит от X и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – подпространство X , порожденное независимыми функциями f_i , $i = 1, \dots, n$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\int_0^1 f_i(s) ds = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ (это следует из того, что E содержится в линейной оболочке независимых функций $f_i - \int_0^1 f_i(s) ds$, $i = 1, 2, \dots, n$, в среднем равных нулю, и функции $\chi_{[0,1]}$).

Обозначим через Σ σ -алгебру, порожденную функциями f_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Хорошо известно, что оператор условного математического ожидания M_Σ относительно Σ ограничен с нормой 1 в пространстве L_p для каждого $1 \leq p \leq \infty$ [7; теорема 2.а.4]. Так как X сепарабельно или максимально, отсюда следует, что M_Σ ограничен в X и $\|M_\Sigma\|_{X \rightarrow X} = 1$ [8; теоремы 2.4.9 и 2.4.10]. Одновременно M_Σ является проектором, $M_\Sigma(X) = X_\Sigma$, где X_Σ – подпространство X , состоящее из Σ -измеримых функций. Ввиду того, что $X_\Sigma \supseteq E$, приведенные рассуждения показывают, что достаточно найти проектор $P: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$, для которого

$$\|P\| \leq K, \quad Px = x, \quad x \in E, \quad \dim P(X_\Sigma) \leq Cn \ln(n+1),$$

где константа C не зависит от X и n .

Пространство X_Σ можно изометрически и дополняемо вложить в СП $X([0, 1]^\infty)$ функций, измеримых на вероятностном пространстве $\prod_{k=1}^\infty ([0, 1], m_k)$ (m_k – обычная мера Лебега), таким образом, что для любого $i = 1, \dots, n$ образ f_i будет зависеть лишь от координаты t_i элемента $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots) \in [0, 1]^\infty$, иначе говоря, будет иметь

вид $h_i(t_i)$. Действительно, в очередной раз учитывая устойчивость нормы проектора относительно малых возмущений [3; теорема 1.3.9], можем предположить, что функции распределения

$$F_i(x) = m\{s \in [0, 1] : f_i(s) < x\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

непрерывны и строго возрастают на $\mathbb{R}$. Тогда независимые функции $F_i(f_i)$ равномерно распределены на $[0, 1]$, и, как легко проверить, отображение

$$g(f_1, f_2, \dots, f_n) \mapsto g(F_1^{-1}(t_1), F_2^{-1}(t_2), \dots, F_n^{-1}(t_n))$$

является изометрией из пространства X_Σ на дополняемое подпространство пространства $X([0, 1]^\infty)$ (норма проектора равна 1). При этом f_i соответствуют функциям $F_i^{-1}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (далее мы будем их отождествлять).

Пусть $\bar{f}_i$ – естественные дизъюнктные копии функций f_i , т.е.

$$\bar{f}_i(s) := f_i(s - i + 1), \quad s > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ввиду соотношения (1) оператор $T: Z_X \rightarrow X([0, 1]^\infty)$, где

$$Tf(\bar{t}) := \sum_{k=1}^{\infty} f(k - 1 + t_k),$$

является изоморфным вложением, и кроме того, $T\bar{f}_i = f_i$, $i = 1, \dots, n$. Отметим также, что из условий $X \in \mathbb{K}$ и $X' \in \mathbb{K}$, а также теоремы 2.1 из работы [20] следует дополняемость подпространства $T(Z_X)$ в пространстве $X([0, 1]^\infty)$.

Обозначим через Z_X^0 подпространство Z_X , состоящее из функций, в среднем равных нулю на каждом промежутке $[k - 1, k)$, т.е. таких, что $\int_{k-1}^k f(s) ds = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Легко видеть, что Z_X^0 замкнуто и дополняемо в Z_X . Действительно, оператор

$$Qf = f - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{k-1}^k f(s) ds \right) \chi_{[k-1, k)}$$

является проектором из Z_X на Z_X^0 , причем, так как в любом СП на $[0, \infty)$ проектор $I - Q$ имеет норму 1 [8; § 2.3], то $\|Q\| \leq 2$.

Далее по теореме 1 найдем такой проектор $R: Z_X \rightarrow Z_X$, что

$$\begin{aligned} R\bar{f}_i &= \bar{f}_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ \|R\| &\leq B_X + 2, \quad \dim R(Z_X) \leq Cn \ln(n + 1). \end{aligned}$$

Если теперь S – проектор из $X([0, 1]^\infty)$ на $T(Z_X)$, то $V := TQRT^{-1}S$ – оператор, ограниченный в $X([0, 1]^\infty)$, ранг V не больше, чем $Cn \ln(n + 1)$, и

$$Vf_i = f_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначая через W проектор нормы 1 из $X([0, 1]^\infty)$ на пространство X_Σ , получим, что оператор $WV_{X_\Sigma}: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ также имеет ранг не больше $Cn \ln(n + 1)$, $\|WV_{X_\Sigma}\|$ зависит только от X и $WV_{X_\Sigma}f_i = f_i$, $i = 1, \dots, n$. Тем не менее, последний оператор, конечно, может не быть проектором. Для того, чтобы из него получить проектор P , удовлетворяющий всем необходимым условиям, достаточно повторить рассуждения из заключительной части доказательства теоремы 9 в работе [4] (см. также [21]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – СП на $[0, 1]$, $X \in \mathcal{N}_0 \cap \mathbb{K}$ и $X' \in \mathbb{K}$. Тогда существует M_X , зависящее только от X , такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для произвольного подпространства E пространства X , порожденного n независимыми одинаково распределенными функциями,

$$k_X(E, M_X) \leq Cn \ln(n+1),$$

где константа C не зависит от X и $n \in \mathbb{N}$.

Из доказанных результатов нетрудно получить более конкретные следствия для различных классов СП. Ограничимся рассмотрением пространств Орлича. Напомним, что функция Орлича, дополнительная к Φ , определяется равенством

$$\tilde{\Phi}(u) := \sup_{v>0} (uv - \Phi(v)), \quad u \geq 0.$$

Ввиду приведенных в предыдущем разделе условий принадлежности пространств Орлича к классам $\mathcal{N}_0$ и $\mathbb{K}$, а также равенства $L'_\Phi = L_{\tilde{\Phi}}$ ([22; гл. VI, § 14] или [23; гл. II, § 2.3]) получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть функция Орлича Φ удовлетворяет условиям

- (i) для некоторых $C > 0$ и $u_0 > 0$ выполнено: $\Phi(uv) \leq C\Phi(u)\Phi(v)$ ($u, v \geq u_0$);
- (ii) $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет Δ_2 -условию в бесконечности.

Тогда существует константа M_Φ , зависящая только от Φ , такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для произвольного подпространства E пространства Орлича L_Φ , порожденного n независимыми одинаково распределенными функциями, справедливо неравенство

$$k_{L_\Phi}(E, M_\Phi) \leq Cn \ln(n+1),$$

где константа C не зависит от Φ и $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим пространство Орлича L_{S_β} ($\beta > 0$), где S_β – функция Орлича, эквивалентная в бесконечности функции $t \ln^\beta(t+1)$ (его также называют пространством Зигмунда и обычно обозначают через $L \ln^\beta L$). Тогда S_β удовлетворяет условию (i) следствия 2, однако дополнительная функция $\tilde{S}_\beta$ эквивалентна в бесконечности функции $e^{t^{1/\beta}}$, и поэтому (ii) для нее не выполнено. Тем не менее, пространство $L'_{S_\beta} = L_{\tilde{S}_\beta} = \text{Exp } L^{1/\beta}$ обладает свойством Круглова, если $\beta \geq 1$ (см. предыдущий раздел). Поэтому ввиду следствия 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\beta \geq 1$. Существует константа M_β такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для произвольного подпространства E пространства $X = L \ln^\beta L$, порожденного n независимыми одинаково распределенными функциями, справедливо неравенство

$$k_X(E, M_\beta) \leq Cn \ln(n+1),$$

где константа C не зависит от β и $n \in \mathbb{N}$.

В частности, в последнем следствии в качестве E можно взять подпространство, порожденное n симметричными p -устойчивыми величинами, $1 < p < 2$. Мы видим, что полученное неравенство резко контрастирует с упомянутой в начале введения экспоненциальной нижней оценкой величины $k_1(E, M)$, доказанной в работе [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Figiel, W. B. Johnson, G. Schechtman, “Factorization of natural embeddings of l_p^n into L_r ”, *Studia Math.*, **89**:1 (1988), 79–103.
- [2] A. Pełczyński, H. P. Rosenthal, “Localization techniques in L^p spaces”, *Studia Math.*, **52** (1975), 263–289.
- [3] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Grad. Texts in Math., **233**, Springer, New York, 2006.
- [4] W. B. Johnson, G. Schechtman, “Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces”, *Ann. Probab.*, **17**:2 (1989), 789–808.
- [5] S. V. Astashkin, L. Maligranda, E. M. Semenov, “Multiplicator space and complemented subspaces of rearrangement invariant space”, *J. Funct. Anal.*, **202**:1 (2003), 247–276.
- [6] M. Sh. Braverman, *Independent Random Variables and Rearrangement Invariant Spaces*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **194**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [7] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces. II. Function Spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **97**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [8] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [9] T. Andô, “On products of Orlicz spaces”, *Math. Ann.*, **140**:3 (1960), 174–186.
- [10] С. В. Асташкин, “О билинейном мультипликативном функционале”, *Исследования по теории функций многих вещественных переменных*, Ярославский гос. ун-т, Ярославль, 1982, 3–15.
- [11] С. В. Асташкин, “О мультипликаторе симметричного пространства относительно тензорного произведения”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:4 (1996), 58–60.
- [12] S. V. Astashkin, “Tensor product in symmetric function spaces”, *Collect. Math.*, **48**:4-6 (1997), 375–391.
- [13] M. Milman, “Tensor products of function spaces”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82** (1976), 626–628.
- [14] M. Milman, “Embeddings of Lorentz–Marcinkiewicz spaces with mixed norms”, *Anal. Math.*, **4**:3 (1978), 215–223.
- [15] M. Milman, “A note on $L(p, q)$ spaces and Orlicz spaces with mixed norms”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **83**:4 (1981), 743–746.
- [16] С. В. Асташкин, “О подпространствах, порожденных независимыми функциями, в симметричных пространствах со свойством Круглова”, *Алгебра и анализ*, **25**:4 (2013), 1–22.
- [17] В. М. Круглов, “Замечание к теории безгранично делимых законов”, *ТВП*, **15**:2 (1970), 330–336.
- [18] W. B. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman, L. Tzafriri, *Symmetric Structures in Banach Spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., **19**, no. 217, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979.
- [19] С. В. Асташкин, Ф. А. Сукочев, “Независимые функции и геометрия банаховых пространств”, *УМН*, **65**:6 (2010), 3–86.
- [20] S. V. Astashkin, “Rademacher series and isomorphisms of rearrangement invariant spaces on the finite interval and on the semi-axis”, *J. Funct. Anal.*, **260**:1 (2011), 195–207.
- [21] J. Lindenstrauss, H. P. Rosenthal, “The $\mathcal{L}_p$ spaces”, *Israel J. Math.*, **7**:4 (1969), 325–349.
- [22] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.
- [23] М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Современные проблемы математики, Физматгиз, М., 1958.

С. В. Асташкин

Самарский государственный университет

E-mail: astashkin@ssu.samara.ru

Поступило

18.03.2013