Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ю. Глебский, Локальные линейные операторы и много-
обходные решения однородных решеток связанных отобра-
жений, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 37–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1026>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подра-
зумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:40:18

УДК 517.98

ЛОКАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И МНОГООБХОДНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕТОК СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Л. Ю. Глебский

Доказаны теоремы о связи спектров линейных операторов вида $A + \sum g_i B_i g_i^{-1}$ и $A + B_i$, где $g_i \in G$, а G – группа, действующая линейными изометрическими операторами. Предполагается, что замкнутые операторы A, B_i обладают следующим свойством: $\|B_i A^{-1} g B_j A^{-1}\| \rightarrow 0$ при $d(e, g) \rightarrow \infty$. Здесь d – левоинвариантная метрика на G и e – единица G . Кроме того, оператор A инвариантен относительно действия группы G . Эти теоремы применяются для доказательства существования многообходных решений динамических систем на решетках.

Библиография: 5 названий.

1. (A, G) -локальные наборы линейных операторов. Пусть $\mathcal{B}$ – банахово пространство. Для краткости будем говорить “ X – замкнутый оператор” вместо “ X – замкнутый линейный оператор на $\mathcal{B}$ с плотной областью определения”. В этой статье мы будем предполагать, что:

- а) группа G действует на $\mathcal{B}$ линейными изометрическими операторами;
- б) A – замкнутый G -инвариантный оператор на $\mathcal{B}$, т.е. $A = g A g^{-1}$ для всех $g \in G$;
- в) $d(\cdot, \cdot)$ – левоинвариантная метрика на G , т.е. $d(hg_1, hg_2) = d(g_1, g_2)$ для любых $g_1, g_2, h \in G$.

Обозначим через $\rho(X) \subset \mathbb{C}$ – резольвентное множество оператора X , через $D(X) \subset \mathcal{B}$ – область определения X ; через $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ – множество ограниченных всюду определенных линейных операторов на $\mathcal{B}$; $A_\lambda = A - \lambda E$, где E – единичный оператор на $\mathcal{B}$; $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ и $d(\bar{g}) = \inf_{j \neq k} d(g_j, g_k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Конечный набор замкнутых линейных операторов $\{X_k, k = 1, 2, \dots, n < \infty\}$ (возможно $X_j = X_k$ для $j \neq k$) называется (A, G) -*локальным*, если $D(X_k) \supset D(A)$ и для любого $\lambda \in \rho(A)$, любых $j \neq k$ выполняется $\|X_k A_\lambda^{-1} g X_j A_\lambda^{-1}\| \rightarrow 0$ при $d(e, g) \rightarrow \infty$, где $e, g \in G$ и e – единица G . (Напомним, что A предполагается G -инвариантным.)

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-00790 и № 98-01-00795.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – замкнутый G -инвариантный оператор на $\mathcal{B}$ и $\{B_k, k = 1, \dots, n\}$ есть (A, G) -локальный набор операторов. Тогда для любого $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_{k=1}^n \rho(A + B_k)$ существует $C > 0$ такое, что

$$\lambda \in \rho\left(A + \sum_{k=1}^n g_k B_k g_k^{-1}\right)$$

при $d(\bar{g}) > C$. Кроме того,

$$\left\| \left(A_\lambda + \sum_{k=1}^n g_k B_k g_k^{-1} \right)^{-1} - \left(A_\lambda^{-1} + \sum_{k=1}^n g_k ((A_\lambda + B_k)^{-1} - A_\lambda^{-1}) g_k^{-1} \right) \right\| \rightarrow 0$$

при $d(\bar{g}) \rightarrow \infty$.

Прежде чем доказывать теорему, сформулируем одно следствие. Пусть A и B_k удовлетворяют условию теоремы 1. Обозначим через S , $S \subset \mathbb{C}$, ограниченное открытое множество, граница которого ∂S есть замкнутая Жорданова кривая такая, что $\partial S \subset \rho(A) \cap \bigcap_{k=1}^n \rho(A + B_k)$. Определены следующие проекторы:

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial S} A_\lambda^{-1} d\lambda, \quad P_k = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial S} (A_\lambda + B_k)^{-1} d\lambda. \quad (1)$$

В силу компактности ∂S и теоремы 1 для достаточно больших $d(\bar{g})$ также определен проектор

$$\Pi = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial S} \left(A_\lambda + \sum_{k=1}^n g_k B_k g_k^{-1} \right)^{-1} d\lambda. \quad (2)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для проекторов P_k, Π , определенных формулами (1), (2), существуют следующие пределы:

$$\|(P_k - P_0)g(P_j - P_0)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } d(e, g) \rightarrow \infty \quad \text{для всех } k \neq j, \quad (3)$$

$$\left\| \Pi - \left(P_0 + \sum_{k=1}^n g_k (P_k - P_0) g_k^{-1} \right) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } d(\bar{g}) \rightarrow \infty. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Доказательство теоремы основано на следующем тождестве:

$$\begin{aligned} & \left(A_\lambda + \sum_{k=1}^n g_k B_k g_k^{-1} \right) \left(A_\lambda^{-1} + \sum_{k=1}^n g_k ((A_\lambda + B_k)^{-1} - A_\lambda^{-1}) g_k^{-1} \right) \\ &= E + \sum_{j \neq k} g_j B_j g_j^{-1} g_k ((A_\lambda + B_k)^{-1} - A_\lambda^{-1}) g_k^{-1} = E + \delta; \end{aligned}$$

здесь использовано равенство $A_\lambda + g_k B_k g_k^{-1} = g_k (A_\lambda + B_k) g_k^{-1}$. Преобразовав δ :

$$\delta = - \sum_{j \neq k} g_j B_j A_\lambda^{-1} g_j^{-1} g_k B_k A_\lambda^{-1} A_\lambda (A_\lambda + B_k)^{-1} g_k^{-1},$$

получаем, что $\|\delta\| \rightarrow 0$ при $d(\bar{g}) \rightarrow \infty$ по определению (A, G) -локального набора операторов. Таким образом, оператор $A_\lambda + B(\bar{g}) = A_\lambda + \sum_{k=1}^n g_k B_k g_k^{-1}$ имеет правый обратный, если $d(\bar{g})$ достаточно велико. Аналогичные вычисления показывают, что $E + B(\bar{g})A_\lambda^{-1}$ (а значит, и $A_\lambda + B(\bar{g})$) имеет левый обратный для достаточно больших $d(\bar{g})$:

$$\left(E + \sum_{k=1}^n g_k ((E + B_k A_\lambda^{-1})^{-1} - E) g_k^{-1}\right) \left(E + \sum_{k=1}^n g_k B_k A_\lambda^{-1} g_k^{-1}\right) = E + \delta',$$

где $\|\delta'\| \rightarrow 0$ при $d(\bar{g}) \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\left(A_\lambda + \sum_{k=1}^n g_k B_k g_k^{-1}\right)^{-1} = \left(A_\lambda^{-1} + \sum_{k=1}^n g_k ((A_\lambda + B_k)^{-1} - A_\lambda^{-1}) g_k^{-1}\right) (E + \delta)^{-1}, \quad (5)$$

что доказывает теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Для доказательства предельного соотношения (4) достаточно проинтегрировать выражение (5) по кривой ∂S . Для доказательства (3) возьмем $S' \subset S$ такое, что $(S - S') \in \rho(A + B_k) \cap \rho(A + B_j)$, $\partial S'$ есть замкнутая спрямляемая кривая и $\partial S' \cap \partial S = \emptyset$. Тогда

$$\begin{aligned} & (P_k - P_0)g(P_j - P_0) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\partial S} \oint_{\partial S'} ((A_\lambda + B_k)^{-1} - A_\lambda^{-1}) g((A_\mu + B_j)^{-1} - A_\mu^{-1}) d\lambda d\mu \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\partial S} \oint_{\partial S'} (A_\lambda + B_k)^{-1} B_k \frac{(A_\lambda^{-1} - A_\mu^{-1})}{\mu - \lambda} g B_j (A_\mu + B_j)^{-1} d\lambda d\mu \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $d(e, g) \rightarrow \infty$.

Для оператора X положим $\dim X = \dim \operatorname{Im} X$ (размерность оператора по определению есть размерность его образа). Верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\Pi, P_i \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, $i = 1, \dots, n$, — проекторы, $\Delta = \Pi - \sum_{i=1}^n P_i$. Предположим, что для всех $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, выполняется $(n-1)\|P_j P_i\| + n\|P_i \Delta\| < 1$. Тогда $\dim \Pi = \sum_{i=1}^n \dim P_i$.

Из предложения 1, теоремы 1 и следствия 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $D(B) \supset D(A)$ и для всех $\lambda \in \rho(A)$ существует предел $\|BA_\lambda^{-1}gBA_\lambda^{-1}\| \rightarrow 0$ при $d(e, g) \rightarrow \infty$. Предположим, что $\lambda_0 \in \rho(A)$ — изолированная спектральная точка кратности l оператора $A + B$. Тогда λ_0 имеет окрестность $S \ni \lambda_0$ такую, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $C > 0$ такое, что S содержит в точности $l \cdot n$ точек спектра оператора

$$A + \sum_{k=1}^n g_k B g_k^{-1}, \quad g_k \in G, \quad d(\bar{g}) > C;$$

спектральные точки считаются с кратностью.

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$-\Delta\xi + \sum_i U(x + h_i)\xi = \lambda\xi$$

в $L_2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$, где $x \in \mathbb{R}^k$, $\Delta = \sum \partial_{x_k}^2$ и $h_i \in \mathbb{R}^k$. Пусть группа $G = (\mathbb{R}^k, +)$ с $d(g_1, g_2) = |g_1 - g_2|$. Тогда верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $U(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$ и $U(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то набор $\{B_k = U, k = 1, \dots, n\}$ (Δ, G) -локален в $L_2(\mathbb{R}^k, \mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $K: L_2 \rightarrow L_2$ определен соотношением

$$(K\xi)(x) = \int_y \hat{K}(x, y)\xi(y) dy, \quad \text{где } \hat{K}(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}.$$

Пусть $K = U\Delta_\lambda^{-1}g_hU\Delta_\lambda^{-1}$ или

$$\hat{K}_h(x, y) = \int_z U(x)\Gamma(x - z)U(z + h)\Gamma(z + h - y) dz,$$

где Γ – функция Грина оператора Δ_λ . Вычисления показывают, что

$$\sup_y \int_x |\hat{K}_h(x, y)| dx \leq C_1, \quad \sup_x \int_y |\hat{K}_h(x, y)| dy \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow \infty.$$

Используя оценку

$$\|K\|_2 \leq \left(\sup_x \int_y |\hat{K}(x, y)| dy \cdot \sup_y \int_x |\hat{K}(x, y)| dx \right)^{1/2},$$

получим (Δ, G) -локальность набора $\{B_k = U, k = 1, \dots, n\}$. Этот набор остается (Δ, G) -локальным, если G – группа движений $\mathbb{R}^k$ (сохраняющая Δ).

2. Бесконечные (A, G) -локальные наборы. В этом пункте мы дадим вариант определения бесконечных (A, G) -локальных наборов линейных операторов. На банахово пространство $\mathcal{B}$, группу G и оператор A наложены те же условия, что и выше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Бесконечный набор замкнутых операторов $\{B_j, j = 1, 2, \dots\}$, $D(B_j) \supset D(A)$, называется (A, G) -локальным, если для любого $\lambda \in \rho(A)$ операторы $T_k = B_k A_\lambda^{-1}$ обладают следующими свойствами:

- 1) существуют $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что для любых $x \in \mathcal{B}$, $\bar{g} = \langle g_1, g_2, \dots \rangle$, $g_i \in G$ и $d(\bar{g}) > C_1$ справедливо неравенство

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|g_k T_k g_k^{-1} x\| \leq C_2 \|x\|;$$

- 2) существуют последовательность операторов $T_{k,l}$ и числовая последовательность $C_l \in \mathbb{R}^+$ такие, что при $d(\bar{g}) > C_1$ выполняется

$$\frac{\sum_{k \in \mathbb{N}} \|g_k (T_{k,l} - T_k) g_k^{-1} x\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty$$

равномерно по $\bar{g}$ и $x \in \mathcal{B}$, $x \neq 0$, и $T_{k,l} g T_{j,l} = 0$ при $d(e, g) > C_l$.

Предположим, что $\rho(A) \neq \emptyset$, $\lambda \in \rho(A)$ и $\{B_k\}$ – бесконечный набор (A, G) -локальных операторов. Очевидно, что ряд $\sum g_k B_k A_\lambda^{-1} g_k^{-1}$ имеет сильный предел при достаточно больших $d(\bar{g})$ и, стало быть, определен оператор

$$A + \sum g_k B_k g_k^{-1} = A + \left(\sum g_k B_k A_\lambda^{-1} g_k^{-1} \right) A_\lambda.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{B_k, k = 1, 2, \dots\}$ есть (A, G) -локальный набор операторов, $\lambda \in \rho(A) \cap \bigcap_{k=1}^\infty \rho(A + B_k)$ и $\|(A_\lambda + B_k)^{-1}\| < M$ для всех k и некоторого $M > 0$. Тогда

1) ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} g_k ((A_\lambda + B_k)^{-1} - A_\lambda^{-1}) g_k^{-1}$$

имеет сильный предел при достаточно больших $d(\bar{g})$;

2) оператор

$$A_\lambda + \sum_{k=1}^n g_k B_k g_k^{-1}$$

обратим для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ при достаточно большом $d(\bar{g})$ и выполняется

$$\left\| \left(A_\lambda + \sum_{k=1}^n g_k B_k g_k^{-1} \right)^{-1} - \left(A_\lambda^{-1} + \sum_{k=1}^n g_k ((A_\lambda + B_k)^{-1} - A_\lambda^{-1}) g_k^{-1} \right) \right\| \rightarrow 0$$

при $d(\bar{g}) \rightarrow \infty$ равномерно по $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сходимость ряда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \|g_k ((A_\lambda + B_k)^{-1} - A_\lambda^{-1}) g_k^{-1} x\| &= \sum_{k=1}^n \|g_k (A_\lambda + B_k)^{-1} g_k^{-1} g_k B_k A_\lambda^{-1} g_k^{-1} x\| \\ &\leq M \sum_{k=1}^n \|g_k T_k g_k^{-1} x\| \leq M C_1, \end{aligned}$$

где T_k и C_1 взяты из определения 2.

Нам достаточно показать обратимость

$$S(n) = E + \sum_{k=1}^n g_k B_k A_\lambda^{-1} g_k^{-1} = E + \sum_{k=1}^n g_k T_k g_k^{-1}.$$

Пусть $S_l(n) = E + \sum_{k=1}^n g_k T_{k,l} g_k^{-1}$. Простым умножением убеждаемся, что

$$S_l^{-1}(n) = E + \sum_{k=1}^n g_k ((E + T_{k,l})^{-1} - E) g_k^{-1}.$$

Последовательности операторов $S(n)$, $S_l(n)$ и $S_l^{-1}(n)$ имеют сильные пределы при фиксированном l и $n \rightarrow \infty$. Обозначим их через S_0 , $S_{l,0}$ и $K_{l,0}$ соответственно. Стало быть, $S_{l,0}^{-1}$ существует и $S_{l,0}^{-1} = K_{l,0}$. Кроме того, по определению 2 можно найти последовательность $\varepsilon_l > 0$, сходящуюся к 0, такую, что

$$\|S_0 - S_{l,0}\| < \varepsilon_l \quad \text{и} \quad \|S_{l,0}^{-1}\| < (M + \varepsilon_l)(C_1 + \varepsilon_l).$$

Таким образом, оператор S_0^{-1} существует, если $\varepsilon_l(M + \varepsilon_l)(C_1 + \varepsilon_l) < 1$. Аналогично доказывается утверждение 2) теоремы.

3. Многообходные локализованные решения. Имея ввиду приложения к решеткам связанных отображений, предположим, что $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1^*$, где $\mathcal{B}_1$ – банахово пространство, а $\mathcal{B}_1^*$ – банахово пространство линейных ограниченных функционалов на $\mathcal{B}_1$. Кроме того, будем предполагать, что

- а) группа G действует на $\mathcal{B}_1$ линейными изометрическими операторами;
- б) $\mathcal{A}$ – замкнутый G -инвариантный оператор на $\mathcal{B}_1$;
- в) $d(\cdot, \cdot)$ – левоинвариантная метрика на G , т.е. $d(hg_1, hg_2) = d(g_1, g_2)$ для любых $g_1, g_2, h \in G$.

В этом случае на $\mathcal{B}$ определено сопряженное действие G : для $x \in \mathcal{B}$ $gx = (g^{-1})^*x$, где элемент группы G и его действие на $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}$ обозначено одной и той же буквой. При этом оператор $A = \mathcal{A}^*$ будет G -инвариантным.

На $\mathcal{B}$ определена w^* -топология и пространство $\mathcal{B}$ полно относительно этой топологии (см. [1]).

Пусть $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ есть G -инвариантная ($gF(x) = F(gx)$) дважды непрерывно дифференцируемая функция. В следующем определении бесконечные суммы понимаются как w^* -пределы соответствующих частных сумм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Набор $\{x_k \in \mathcal{B}\}, k = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, называется (F, G) -*локальным*, если

- 1) $\|F(\sum_{k=1}^m g_k x_k) - \sum_{k=1}^m g_k F(x_k)\| \rightarrow 0$ при $d(\bar{g}) \rightarrow \infty$ равномерно по $m \leq n$;
- 2) $\|DF(\sum_{k=1}^m g_k x_k) - \sum_{k=1}^m g_k DF(x_k)g_k^{-1}\| \rightarrow 0$ при $d(\bar{g}) \rightarrow \infty$ равномерно по $m \leq n$ (так как F G -инвариантна, верно равенство $DF(gx) = gDF(x)g^{-1}$);
- 3) $\|D^2F(\xi + \sum_{k=1}^m g_k x_k)\|$ равномерно ограничено при $\|\xi\| < \varepsilon, d(\bar{g}) > C, m \leq n$.

Если $m = \infty$, предполагается, что все ряды данного определения имеют w^* -предел при достаточно большом $d(\bar{g})$.

Пример такого набора описан ниже в лемме 2.

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = 0. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ – C^2 -гладкая G -инвариантная функция и $F(x) = Ax + \tilde{F}(x)$, где $A = \mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_1)$ является G -инвариантным. Предположим, что $x_k \in \mathcal{B}, k = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, – корни уравнения (6) такие, что

- 1) набор элементов $\{x_k \in \mathcal{B}\}$ является $(\tilde{F}, G)$ -локальным;
- 2) операторы $D\tilde{F}(x_k) = B_k^*$ и набор операторов $\{B_k\}$ является $(\mathcal{A}, G)$ -локальным в $\mathcal{B}_1$;
- 3) операторы $A^{-1}, (A + D\tilde{F}(x_k))^{-1}$ существуют и ограничены равномерно по k (если действие группы G дифференцируемо, то такая ситуация может возникнуть только для дискретной группы G).

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется $C > 0$ такое, что для каждого $y = \sum_{k=1}^m g_k x_k, d(\bar{g}) > C, m \leq n$, уравнение (6) имеет один и только один корень $x_{\bar{g}} \in \{x \in \mathcal{B}, \|x - y\| \leq \varepsilon\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если мы покажем существование и равномерную ограниченность по $\bar{g}, d(\bar{g}) > C$, оператора $(A + \sum g_k D\tilde{F}(x_k)g_k^{-1})^{-1}$, то сможем применить теорему о неявной функции к уравнению

$$\begin{aligned} 0 = F(y + \xi) = & \left(A + \sum g_k D\tilde{F}(x_k)g_k^{-1} \right) \xi + \left(D\tilde{F}\left(\sum g_k x_k \right) - \sum g_k D\tilde{F}(x_k)g_k^{-1} \right) \xi \\ & + \left(F\left(\sum g_k x_k \right) - \sum g_k \tilde{F}(x_k) \right) + O(\|\xi\|^2), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\|O(\|\xi\|^2)\| < K\|\xi\|^2$. Ввиду $(\tilde{F}, G)$ -локальности вторая и третья скобки в уравнении (7) малы равномерно по $\bar{g}$, $d(\bar{g}) > C$. Нам осталось доказать существование и равномерную ограниченность по $\bar{g}$, $d(\bar{g}) > C$, оператора $(A + \sum g_k D\tilde{F}(x_k)g_k^{-1})^{-1}$. Нам потребуется

ТЕОРЕМА 4 [1]. *Замкнутый плотно определенный оператор T на $\mathcal{B}_1$ обратим (имеет ограниченный обратный) тогда и только тогда, когда T^* обратим. При этом $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ и $\|T^{-1}\| = \|(T^*)^{-1}\|$.*

Так как $A = \mathcal{A}^*$ и $DF(x_k) = B_k^*$, условие 3) теоремы 3 эквивалентно тому, что операторы $\mathcal{A}^{-1}$, $(\mathcal{A} + B_k)^{-1}$ существуют и ограничены. Далее, в силу $(\mathcal{A}, G)$ -локальности набора $\{B_k\}$ получим существование и равномерную ограниченность по $d(\bar{g})$ оператора

$$\left(\mathcal{A}_{\lambda^*} + \sum_k g_k B_k g_k^{-1}\right)^{-1}.$$

Переходя к сопряженным операторам, получим требуемое утверждение.

4. Решетки связанных отображений. Рассмотрим приложение теоремы 3 к однородным решеткам связанных отображений (см. [2], [3]). Пусть $\ell_\infty = \{u_\alpha \in \mathbb{R}^p, \alpha \in \mathbb{Z}^d, \sup_\alpha |u_\alpha| < \infty\}$ с $\|u\|_\infty = \sup_\alpha |u_\alpha|$, где $|u_\alpha| = (u_\alpha, u_\alpha)^{1/2}$ для стандартного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^p$. Для $\beta \in \mathbb{Z}^d$ определим оператор сдвига S_β на ℓ_∞ :

$$(S_\beta u)_\alpha = u_{\alpha+\beta}.$$

Пусть $\mathbb{Z}^d \supset I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ – конечное множество. Для $u \in \ell_\infty$ обозначим

$$\{\cdot\}_I: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}^{pr}, \quad \{u\}_I = (u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см. [3]). Функция $F: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ называется *однородной решеткой связанных отображений*, если

$$(F(u))_\alpha = f(\{S_\alpha u\}_I)$$

для некоторых I и $f: \mathbb{R}^{pr} \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Справедливо следующее утверждение, связывающее гладкость F и f .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Функция $F: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ является C^k -гладкой по Фреше тогда и только тогда, когда функция $f: \mathbb{R}^{pr} \rightarrow \mathbb{R}^p$ C^k -гладкая.*

Сейчас мы можем сформулировать теорему о существовании многообходных решений уравнений типа (6), когда F – однородная решетка связанных отображений.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $F: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ есть C^2 -гладкая однородная решетка связанных отображений. Пусть $v \in \ell_\infty$ – корень уравнения (6). Предположим, что $|v_\alpha| \rightarrow 0$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и операторы $DF(0)$, $DF(v)$ имеют ограниченные обратные. Тогда*

- 1) ряд $\sum_{k=1}^\infty S_{\beta_k} v$ имеет w^* -предел, если $\beta_j \neq \beta_k$ при $j \neq k$;
- 2) для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется $C > 0$ такое, что для каждого $u = \sum_{k=1}^n S_{\beta_k} v$, $n \leq \infty$, $|\beta_j - \beta_k| > C$ при $j \neq k$, уравнение (6) имеет единственный корень $x_{\bar{g}}$ в ε -окрестности u .

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы назовем решение $x_{\overline{p}}$ *многообходным*. Из условий теоремы следует, что $F(0) = 0$.

Прежде чем доказывать теорему, рассмотрим подробнее случай, когда $d=1$ и $(F(u))_j = u_{j+1} - g(u_j)$. В этом случае решения уравнения (6) – траектории отображения g . Сейчас мы сформулируем условия на отображение g , эквивалентные условию теоремы 5. Справедливость этой эквивалентности следует из предложений 4–6, приведенных ниже.

Обозначим через $0_\infty, 0_p$ нулевые векторы в $\ell_\infty, \mathbb{R}^p$ соответственно. Так как $F(0_\infty) = 0_\infty$, то $g(0_p) = 0_p$, т.е. 0_p – неподвижная точка отображения g . Если $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ – диффеоморфизм, то условия теоремы 5 эквивалентны тому, что 0_p – седло диффеоморфизма g , а его устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально по траектории v_j .

Более того, оказывается, что условия теоремы 5 можно перевести на динамический язык и в случае, когда g не имеет обратного. Тогда обратимость $DF(0_\infty)$ эквивалентна тому, что матрица $Dg(0_p)$ не имеет спектра на единичной окружности. В этом случае неподвижная точка 0_p имеет локальные многообразия: устойчивое $W^s(0_p)$ и неустойчивое $W^u(0_p)$, $\dim W^s + \dim W^u = p$ (см. [4]). Пусть v_j – траектория из теоремы 5. Тогда $v_j \in W^s(0_p)$ при $j > M_1$ и $v_j \in W^u(0_p)$ при $j < M_2$. Обозначим через T_j^u касательное к $W^u(0_p)$ пространство в точке v_j (для $j < M_2$), а через T_j^s касательное к $W^s(0_p)$ пространство в точке v_j (для $j > M_1$). Мы можем определить T_j^s и T_j^u для всех $j \in \mathbb{Z}$, используя соотношения $T_{j+1}^u = Dg(v_j)T_j^u$ и $T_j^s = (Dg(v_j))^{-1}T_{j+1}^s$; здесь $A^{-1}T = \{x : Ax \in T\}$. Обратимость $DF(v)$ эквивалентна тому, что $T_j^s \cap T_j^u = \{0\}$ и $\dim T_j^u = \dim W^u(0_p)$ хотя бы для одного j (а значит, и для всех $j \in \mathbb{Z}$).

Сейчас мы приведем ряд утверждений о линейных операторах, задаваемых равенствами

$$(L_0\xi)_j = \xi_{j+1} - A\xi_j, \quad (L\xi)_j = \xi_{j+1} - A_j\xi_j,$$

где $A = Dg(0)$, $A_j = Dg(v_j)$. Доказательства этих утверждений стандартны в теории динамических систем (см. [5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Оператор $L_0 \in \mathcal{L}(\ell_\infty)$ обратим тогда и только тогда, когда A не имеет точек спектра на единичной окружности.*

Пусть $A = A^s \oplus A^u$, где спектр A^s (A^u) лежит внутри (вне) единичного круга. Разложению $A = A^s \oplus A^u$ соответствует разложение $\mathbb{R}^p = E^s \oplus E^u$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть $A_j \rightarrow A = A^s \oplus A^u$ при $|j| \rightarrow \infty$. Тогда для любого λ_* , $\max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(A^s) \cup \text{Sp}((A^u)^{-1})\} < \lambda_* < 1$,*

- 1) *найдутся $M \in \mathbb{Z}^+$, $C > 0$ и последовательность подпространств $E_j^s \subset \mathbb{R}^p$, $j = M, M+1, \dots$, $E_j^s = \{x : A_j x \in E_{j+1}^s\}$, такие, что $\dim(E_j^s) = \dim(E^s)$ и для любой последовательности векторов $x_j \in E_j^s$, $x_{j+1} = A_j x_j$, верна оценка $|x_{j+k}| \leq C\lambda_*^k |x_j|$, где $j, k \in \mathbb{Z}^+$ и $j > M$;*
- 2) *найдутся $M \in \mathbb{Z}^-$, $C > 0$ и последовательность подпространств $E_j^u \subset \mathbb{R}^p$, $j = M, M-1, \dots$, $E_{j+1}^u = A_j E_j^u$, такие, что $\dim(E_j^u) = \dim(E^u)$ и для любой последовательности векторов $x_j \in E_j^u$, $x_{j+1} = A_j x_j$, верна оценка $|x_{j-k}| \leq C\lambda_*^k |x_j|$, где $k \in \mathbb{Z}^+$ и $j < M$, а следовательно, существуют обратные операторы для ограничения A_j на E_j^u , $(A_j|_{E_j^u})^{-1} \in \mathcal{L}(E_{j+1}^u, E_j^u)$.*

Можно определить E_j^s и E_j^u для всех $j \in \mathbb{Z}$, используя соотношения $E_{j+1}^u = A_j E_j^u$, $E_{j-1}^s = \{x \in \mathbb{R}^p : A_{j-1}x \in E_j^s\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Оператор $L \in \mathcal{L}(\ell_\infty)$, $(L\xi)_j = \xi_{j+1} - A_j \xi_j$, обратим тогда и только тогда, когда для некоторого $j \in \mathbb{Z}$ выполняется $E_j^s \cap E_j^u = \{0\}$ и $\dim(E_j^u) = \dim(E^u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Представим $F = A + \tilde{F}$, где $A \in \mathcal{L}(\ell_\infty)$ и $D\tilde{F}(0) = 0$. Из лемм 1, 2, сформулированных ниже, следует, что набор $\{v_k = v, k = 1, 2, \dots\}$ является $(\tilde{F}, G)$ -локальным, а также существуют операторы $\mathcal{A}$ и B такие, что $A = \mathcal{A}^*$ и $D\tilde{F}(v) = B^*$, а набор $\{B_k = B, k = 1, \dots\}$ является $(\mathcal{A}, G)$ -локальным. Затем применим теорему 3.

Напомним, что $\ell_\infty = \ell_1^*$, где $\ell_1 = \{u_\alpha \in \mathbb{R}^p, \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} |u_\alpha| < \infty\}$.

ЛЕММА 1. Пусть $F \in C^2(\ell_\infty, \ell_\infty)$ – однородная решетка связанных отображений. Предположим, что $F(0) = 0$, $F(v) = 0$, $|v_\alpha| \rightarrow 0$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и $DF(0)$, $DF(v)$ имеют ограниченные обратные операторы. Тогда $v \in \ell_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. На самом деле, скорость убывания локализованного решения связана со скоростью убывания функции Грина $\hat{\Gamma}(\cdot)$ (см. следующий пункт) оператора $DF(0)$. Если $\hat{\Gamma}$ убывает экспоненциально, то в предположениях леммы 1 локализованные решения убывают экспоненциально.

ЛЕММА 2. Пусть $G = \mathbb{Z}^d$ – группа операторов сдвига на ℓ_∞ , $d(g_1, g_2) = |g_1 - g_2|$. Кроме того, пусть $A, \tilde{F} \in C^2(\ell_\infty)$ – однородные решетки связанных отображений, $A \in \mathcal{L}(\ell_\infty)$, $\tilde{F}(0) = 0$ и $D\tilde{F}(0) = 0$. Предположим, что $v \in \ell_1$. Тогда набор $\{v_k = v, k = 1, 2, \dots\}$ является $(\tilde{F}, G)$ -локальным и существуют операторы $\mathcal{A}, B \in \mathcal{L}(\ell_1)$ такие, что $A = \mathcal{A}^*$ и $D\tilde{F}(v) = B^*$, а набор операторов $\{B_k = B, k = 1, 2, \dots\}$ является $(\mathcal{A}, G)$ -локальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Укажем предварительные факты и обозначения.

Пусть $(DF(0))^{-1} = \Gamma$, где

$$(\Gamma u)_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \hat{\Gamma}(\alpha - \beta) u_\beta$$

с функцией Грина $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma}(\alpha) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$. Покажем, почему такое представление возможно. Для простоты рассмотрим случай $p = 1$. Так как $DF(0)$ – решетка связанных отображений, $DF(0) = \mathcal{A}^*$ для подходящего $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\ell_1)$. По теореме 4 нам достаточно найти представление для $X = \mathcal{A}^{-1}$. Пусть $e_i \in \ell_1$ – последовательность, где на i -м месте стоит 1 а на остальных 0; $\hat{e}_i \in \ell_\infty$ определяется так же, спаривание $(\cdot, \cdot)$ естественное: $(\hat{e}_i, e_j) = \delta_{i,j}$. Операторы из ℓ_1 в ℓ_1 однозначно определяются своими матричными коэффициентами $M_{\alpha, \beta} = (\hat{e}_\alpha, X e_\beta)$, а так как X коммутирует со сдвигами, $M_{\alpha, \beta} = f(\alpha - \beta)$. Переходя к сопряженному оператору, получим искомое представление, причем $K_\Gamma = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\Gamma}(\alpha)| < \infty$.

Пусть $\tilde{F}(u) = F(u) - DF(0)u$ и $\tilde{f}(x) = f(x) - Df(0)x$ (см. определение 4). Обозначим $r = |I|$.

А) Выберем $\varepsilon_1 > 0$ такое, что если для $\alpha \in I$ выполняется $|u_\alpha|, |v_\alpha| < \varepsilon_1$, то

$$|\tilde{f}(\{u\}_I) - \tilde{f}(\{v\}_I)| < (4K_\Gamma r)^{-1} \sum_{\alpha \in I} |u_\alpha - v_\alpha|.$$

Это возможно, так как $\tilde{f}(0) = 0$ и $D\tilde{f}(0) = 0$.

Б) Выберем $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ такое, что в (2ε) -окрестности v нет других корней уравнения (6).

Для $m \in \mathbb{N}$ пусть

$$v_\alpha^{(m)} = \begin{cases} v_\alpha, & \text{если } |\alpha| \leq m, \\ 0, & \text{если } |\alpha| > m. \end{cases}$$

В) Пусть $s = \max\{|i| : i \in I\}$.

Выберем $M \in \mathbb{N}$ такое, что $\|v - v^{(M+s)}\|_\infty < \varepsilon/2$, $\|v + \Gamma \tilde{F}(v^{(M+s)})\|_\infty < \varepsilon/2$. Напомним, что $\Gamma = (DF(0))^{-1}$. Определим множество

$$\mathfrak{R} = \{\delta \in \ell_1 : \delta_\alpha = v_\alpha \text{ для } |\alpha| \leq M + s \text{ и } |\delta_\alpha| \leq \varepsilon \text{ для } |\alpha| > M + s\}.$$

Рассмотрим отображение $\Phi: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, определенное соотношением

$$(\Phi(\delta))_\alpha = -(\Gamma \tilde{F}(\delta))_\alpha \quad \text{для } |\alpha| > M + r.$$

Проверим включение $\Phi(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}$:

$$\|\Phi(u)\|_1 \leq \left(r K_\Gamma \sup_{|x| < \|u\|_1} |D\tilde{f}(x)| \right) \|u\|_1$$

и

$$\begin{aligned} |(\Phi(\delta))_\alpha| &= \left| \sum_{|\beta| \leq M} \hat{\Gamma}(\alpha - \beta) \tilde{f}(\{S_\beta v\}_I) \right| + \left| \sum_{|\beta| > M} \hat{\Gamma}(\alpha - \beta) \tilde{f}(\{S_\beta \delta\}_I) \right| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + K_\Gamma \sup_{|\beta| > M} \tilde{f}(\{S_\beta \delta\}_I) < \varepsilon, \quad \delta \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

(последние неравенство верно в силу А) и определения $\mathfrak{R}$).

С другой стороны, $\mathfrak{R}$, снабженное метрикой $\|\delta_1 - \delta_2\|_1$, есть замкнутое метрическое пространство и Φ – сжатие на нем:

$$\|\Phi(\delta_1) - \Phi(\delta_2)\|_1 \leq \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d} |\hat{\Gamma}(\alpha - \beta)| \cdot |\tilde{f}(\{S_\beta \delta_1\}_I) - \tilde{f}(\{S_\beta \delta_2\}_I)| \leq \frac{1}{2} \|\delta_1 - \delta_2\|_1.$$

Таким образом, существует единственное $\delta_0 \in \mathfrak{R}$, $\delta_0 = \Phi(\delta_0)$. Мы имеем $v = \delta_0$ в силу Б). Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $M \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{|\alpha| > M-s} |v_\alpha| < \varepsilon.$$

Пусть $|\beta_j - \beta_k| > M$ для $j \neq k$. Тогда

$$\left\| \tilde{F}\left(\sum S_{\beta_j} v\right) - \sum \tilde{F}(S_{\beta_j} v) \right\|_\infty < 2\varepsilon K_1$$

и

$$\left\| D\tilde{F}\left(\sum S_{\beta_j} v\right) - \sum D\tilde{F}(S_{\beta_j} v) \right\|_\infty < 2\varepsilon K_2,$$

где

$$K_1 = \sup_{|x_j| \leq \|v\| + \varepsilon} |D\tilde{f}(x)|, \quad K_2 = \sup_{|x_j| \leq \|v\| + \varepsilon} |D^2\tilde{f}(x)|.$$

Мы доказали, что набор $\{v_k = v, k = 1, 2, \dots\}$ является $(\tilde{F}, G)$ -локальным.

Осталось доказать, что $D\tilde{F}(0) = B^*$, и $(\mathcal{A}, G)$ -локальность B . Имеем

$$(D\tilde{F}(v)\xi)_\alpha = \sum_{|\beta - \alpha| \leq s} \hat{B}(\alpha, \beta) \xi_\beta$$

и

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \sum_{|\beta - \alpha| \leq s} |\hat{B}(\alpha, \beta)| = K < \infty.$$

Таким образом, искомое $B \in \mathcal{L}(\ell_1)$ определяется равенством

$$(B\xi)_\beta = \sum_{|\alpha - \beta| \leq s} \hat{B}^*(\alpha, \beta) \xi_\alpha.$$

Пусть $\Gamma = A^{-1}$, $T = B\Gamma^*$ и $(Tu)_\alpha = \sum_\beta \hat{T}(\alpha, \beta) u_\beta$. Имеем

$$\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d} |\hat{T}(\alpha, \beta)| \leq \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{|\gamma - \alpha| \leq s} |\hat{B}^*(\gamma, \alpha)| \cdot |\hat{\Gamma}^*(\beta - \gamma)| = K_T < \infty.$$

Осталось убедиться, что T удовлетворяет условиям теоремы 2. Действительно,

$$\sum_j \|(S_{\beta_j} T S_{\beta_j}^{-1})u\|_1 \leq K_T \|u\|_1,$$

если $|\beta_j - \beta_k| \geq 1$ при $j \neq k$. Мы можем определить T_l и C_l из теоремы 2 следующим образом:

$$(T_l u)_\alpha = \begin{cases} \sum_{|\beta| \leq l} \hat{T}(\alpha, \beta) u_\beta, & \text{если } |\alpha| \leq l, \\ 0, & \text{если } |\alpha| > l, \end{cases}$$

и $C_l = l + 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [2] Kaneko K. (ed.) Theory and applications of coupled map lattices. New York: Wiley, 1993.
- [3] Afraimovich V. S., Chow Shu-Nee, Shen Wenxian. Hyperbolic homoclinic points of $\mathbb{Z}^d$ -actions in lattice dynamical systems // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 1996. V. 6. № 6. P. 1059–1075.
- [4] Лерман Л. М., Шильников Л. П. Гомоклинические структуры в бесконечномерных системах // Сиб. матем. ж. 1988. Т. 29. № 3. С. 92–103.
- [5] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород
E-mail: glebsky@hale.appl.sci-nnov.ru

Поступило
25.03.97
Исправленный вариант
05.05.98