Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Григорян, Об одном методе нахождения неподвижного вектора стохастического оператора, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 708–717

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:09:07

Об одном методе нахождения неподвижного вектора стохастического оператора

Г. А. Григорян

Предлагается новый метод нахождения неподвижного вектора стохастического оператора, который основан на представлении оператора линейной системы в виде произведения необратимого оператора простой конструкции и обратимого оператора. Получено одно дополнение к теореме Ентча.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10264

Введение. При численном решении линейных алгебраических систем больших размеров иногда возникают трудности, связанные с обеспечением требуемой точности вычисляемого решения. Эти трудности в основном возникают при решении таких систем, для которых незначительное изменение их коэффициентов и (или) свободных членов приводит к существенному изменению решений последних. Такие системы называются плохо обусловленными (см. [1], [2]). К ним могут относиться системы с вырожденными матрицами, в частности, с матрицами вида $I - P$, где I – единичная, P – стохастическая матрицы ($\det(I - P) = 0$). Существуют различные методы решения плохо обусловленных систем (см. [3]), и каждый из них приспособлен к определенному классу последних. Однако эти методы не могут быть применены к каждой плохо обусловленной системе, а если и применимы, то могут оказаться мало эффективными.

В этой работе предлагается новый метод нахождения неподвижного вектора стохастической матрицы (стохастического оператора). Он основан на представлении матрицы (оператора) линейной системы (линейного уравнения) в виде произведения необратимой матрицы (необратимого оператора) простой конструкции, зависящей от свободных параметров (зависящего от свободной параметр-функции) и матрицы (оператора), которая (который) становится обратимым при подходящем выборе параметров (параметра-функции). При этом нахождение неподвижного вектора стохастической матрицы (стохастического оператора) сводится к решению неоднородной системы (неоднородного уравнения)

$$x = f + Ax$$

с матрицей (оператором) сжатия A . Получено одно дополнение к теореме Ентча (см. [4; с. 326]).

1. Случай стохастической матрицы. Пусть $P_n = \|p_{ij}\|_1^n$ – стохастическая матрица, т.е. $p_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$, $j = 1, \dots, n$. Рассмотрим следующие квадратные матрицы:

$$S_n = \begin{pmatrix} s_1 & s_1 & \dots & s_1 \\ s_2 & s_2 & \dots & s_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_n & \dots & s_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_n = \begin{pmatrix} s_1 \lambda_1 & s_1 \lambda_2 & \dots & s_1 \lambda_n \\ s_2 \lambda_1 & s_2 \lambda_2 & \dots & s_2 \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n \lambda_1 & s_n \lambda_2 & \dots & s_n \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $s_1, s_2, \dots, s_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – произвольные действительные параметры, ограниченные лишь условием $s_1 + \dots + s_n = 1$. Нетрудно проверить, что

$$S_n P_n = S_n, \quad S_n \Lambda_n = \Lambda_n.$$

Тогда

$$I_n - P_n = (I_n - S_n)(I_n - P_n + \Lambda_n), \quad (1.1)$$

где I_n – единичная матрица размера $n \times n$. Если матрица B_n размера $n \times n$ такова, что

$$I_n - P_n = (I_n - S_n)(I_n - P_n + B_n), \quad (1.2)$$

то B_n совпадает с некоторой матрицей вида Λ_n . Действительно, поскольку $S_n P_n = S_n$, из (1.2) после раскрытия скобок и сокращений получим

$$B_n = -S_n B_n = \|s_i \tilde{\lambda}_j\|_{i,j=1}^n,$$

где

$$\tilde{\lambda}_j = -\sum_{k=1}^n b_{kj}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Следовательно, B_n совпадает с некоторой матрицей вида Λ_n . Таким образом, разложение (1.2) имеет место тогда и только тогда, когда B_n принадлежит классу матриц вида Λ_n . В силу (1.1) уравнение

$$x = P_n x \quad (1.3)$$

эквивалентно системе

$$\begin{cases} (I_n - S_n)y = 0, \\ (I_n - P_n + \Lambda_n)x = y. \end{cases} \quad (1.4)$$

Первое уравнение этой системы имеет с точностью до постоянного множителя единственное решение

$$e_n = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, любое решение уравнения

$$(I_n - P_n + \Lambda_n)x = e_n \quad (1.5)$$

является нетривиальным решением уравнения (1.3), и, наоборот, любое нетривиальное решение уравнения (1.3) с точностью до постоянного множителя совпадает

с некоторым решением уравнения (1.5). В дальнейшем будем рассматривать $\mathbb{R}^n$ как пространство с нормой $\|x\| = \sum_{k=1}^n |x_k|$ его элементов $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ (T – знак транспонирования). Тогда норма $\|P_n - \Lambda_n\|$ оператора $P_n - \Lambda_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ будет удовлетворять оценке

$$\|P_n - \Lambda_n\| \leq \mathcal{F}(s_1, \dots, s_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad (1.6)$$

где

$$\mathcal{F}(s_1, \dots, s_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \equiv \max_{1 \leq j \leq n} \{f_j(s_1, \dots, s_n, \lambda_j)\}, \quad (1.7)$$

$$f_j(s_1, \dots, s_n, \lambda_j) \equiv \sum_{i=1}^n |p_{ij} - s_i \lambda_j|, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.8)$$

Если при некоторых значениях параметров $s_1, \dots, s_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ выполняется неравенство $\mathcal{F}(s_1, \dots, s_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) < 1$, то в силу (1.6) оператор $P_n - \Lambda_n$ – сжатие, и тогда единственное решение уравнения (1.5) можно эффективно вычислить с наперед заданной точностью как предел последовательности

$$x_{(1)} = e_n, \quad x_{(m+1)} = e_n + (P_n - \Lambda_n)x_{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

при $m \rightarrow +\infty$. Пусть $s_i \geq 0, i = 1, \dots, n, s_1 + \dots + s_n = 1$ и фиксированы. Найдем точку $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ глобального минимума функции $\mathcal{F}$ (при фиксированных $s_1, \dots, s_n$). Для этого достаточно для каждого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ найти точку глобального минимума функции $f_j(s_1, \dots, s_n, \lambda_j)$ (при фиксированных $s_1, \dots, s_n$). Не ограничивая общности, будем считать, что $s_i > 0$ при $i = 1, \dots, N$ и $s_i = 0$ при $i > N, 1 \leq N \leq n$ (при $N = n$ условие $s_i = 0$ отсутствует). Тогда

$$f_j(s_1, \dots, s_n, \lambda_j) = \sum_{i=1}^n s_i \left| \frac{p_{ij}}{s_j} - \lambda_j \right| + r_{N,j}. \quad (1.10)$$

где

$$r_{N,j} \equiv \begin{cases} \sum_{i=N+1}^n p_{ij}, & \text{если } N < n, \\ 0, & \text{если } N = n, \end{cases}$$

$j = 1, \dots, n$. Пусть $N > 1$, и пусть при некотором $j = 1, \dots, n$ перестановка

$$(1 \ 2 \ \dots \ n) \rightarrow (\sigma_j(1) \ \sigma_j(2) \ \dots \ \sigma_j(n))$$

такая, что последовательность $\{p_{\sigma_j(1)j}/s_{\sigma_j(1)}, \dots, p_{\sigma_j(N)j}/s_{\sigma_j(N)}\}$ – монотонно неубывающая. Обозначим

$$s_m^{(j)} \equiv s_{\sigma_j(m)}, \quad p_m^{(j)} \equiv p_{\sigma_j(m)j}, \quad m = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, n.$$

Из (1.10) следует

$$f_j(s_1, \dots, s_n, \lambda_j) = \sum_{m=1}^N s_m^{(j)} \left| \frac{p_m^{(j)}}{s_m^{(j)}} - \lambda_j \right| + r_{N,j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.11)$$

Пусть $\lambda_j \in [p_l^{(j)}/s_l^{(j)}; p_{l+1}^{(j)}/s_{l+1}^{(j)}]$, $j = 1, \dots, n$, при некотором $l \in \{1, \dots, N-1\}$. Тогда из (1.11) следует

$$\begin{aligned} f_j(s_1, \dots, s_n, \lambda_j) &= - \sum_{m=1}^l (p_m^{(j)} - s_m^{(j)} \lambda_j) + \sum_{m=l+1}^N (p_m^{(j)} - s_m^{(j)} \lambda_j) + r_{N,j} \\ &= 1 - 2(p_1^{(j)} + \dots + p_l^{(j)}) + \left(\sum_{m=1}^l s_m^{(j)} - \sum_{m=l+1}^N s_m^{(j)} \right) \lambda_j \\ &= 1 - \left[2(p_1^{(j)} + \dots + p_l^{(j)}) + \left(1 - 2 \sum_{m=1}^l s_m^{(j)} \right) \lambda_j \right], \end{aligned} \quad (1.12)$$

$j = 1, \dots, n$. Если $\lambda_j < p_1^{(j)}/s_1^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, то

$$f_j(s_1, \dots, s_n, \lambda_j) = \sum_{m=1}^N (p_m^{(j)} - s_m^{(j)} \lambda_j) + r_{N,j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.13)$$

Если $\lambda_j > p_1^{(j)}/s_1^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, то

$$f_j(s_1, \dots, s_n, \lambda_j) = - \sum_{m=1}^N (p_m^{(j)} - s_m^{(j)} \lambda_j) + r_{N,j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.14)$$

Пусть существуют $k_j \in \{1, \dots, N-1\}$, $j = 1, \dots, n$, такие, что

$$\sum_{m=1}^{k_j} s_m^{(j)} \leq \frac{1}{2}, \quad \sum_{m=1}^{k_j+1} s_m^{(j)} > \frac{1}{2}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.15)$$

(для существования таких k_j необходимо и достаточно, чтобы $s_1^{(j)} \leq 1/2$, $j = 1, \dots, n$). Тогда из (1.12)–(1.14) видно, что $f_j(s_1, \dots, s_n, \lambda_j)$ монотонно невозрастающая на $(-\infty; p_{k_j+1}^{(j)}/s_{k_j+1}^{(j)})$ и монотонно неубывающая на $[p_{k_j+1}^{(j)}/s_{k_j+1}^{(j)}; +\infty)$ по λ_j функция. Следовательно,

$$\min_{\lambda_j \in R} f_j(s_1, \dots, s_n, \lambda_j) = f_j\left(s_1, \dots, s_n, \frac{p_{k_j+1}^{(j)}}{s_{k_j+1}^{(j)}}\right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Отсюда, из (1.6) и (1.7) следует

$$\|P_n - \Lambda_n\| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ f_j\left(s_1, \dots, s_n, \frac{p_{k_j+1}^{(j)}}{s_{k_j+1}^{(j)}}\right) \right\}, \quad (1.16)$$

в частности, при $s_1 = \dots = s_n = 1/2$ будем иметь

$$\|P_n - \Lambda_n\| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ 1 - 2 \left[p_1^{(j)} + \dots + p_{[n/2]}^{(j)} + \left\{ \frac{n}{2} \right\} p_{[n/2]+1}^{(j)} \right] \right\}.$$

Из (1.3)–(1.5) и (1.16) непосредственно получим следующее.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$2 \sum_{m=1}^{k_j} p_m^{(j)} + \left[1 - 2 \sum_{m=1}^{k_j} s_m^{(j)} \right] \frac{p_{k_j+1}^{(j)}}{s_{k_j+1}^{(j)}} > 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где $k_j, j = 1, \dots, n$, определяются из условий (1.15). Тогда уравнение (1.3) имеет с точностью до постоянного множителя единственное решение, являющееся пределом последовательности (1.9) с $\lambda_j = p_{k_j+1}^{(j)} / s_{k_j+1}^{(j)}$. При этом (1.9) сходится не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем

$$q = \mathcal{F} \left(s_1, \dots, s_n, \frac{p_{k_1+1}^{(1)}}{s_{k_1+1}^{(1)}}, \dots, \frac{p_{k_n+1}^{(n)}}{s_{k_n+1}^{(n)}} \right) < 1.$$

2. Случай стохастического оператора, действующего в l_1 . Пусть $P_\infty = \|p_{ij}\|_1^\infty$ – бесконечная стохастическая матрица, т.е. матрица, элементы p_{ij} которой удовлетворяют условиям

$$p_{ij} \geq 0, \quad j = 1, \dots, \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, \infty.$$

Очевидно, P_∞ – линейный ограниченный в l_1 оператор. Пусть $\{s_j\}_{j=1}^\infty, \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ – бесконечные последовательности с действительными элементами, и пусть $\sum_{i=1}^\infty s_i = 1, \sum_{i=1}^\infty |\lambda_i| < +\infty, \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ ограничена. Рассмотрим бесконечные матрицы

$$S_\infty \equiv \begin{pmatrix} s_1 & s_1 & \dots & s_1 & \dots \\ s_2 & s_2 & \dots & s_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_n & \dots & s_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \Lambda_\infty = \|s_i \lambda_j\|_1^\infty.$$

Очевидно S_∞ и Λ_∞ – линейные ограниченные в l_1 операторы, причем

$$\|S_\infty\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |s_i|, \quad \|\Lambda_\infty\| \leq \sup_{j \geq 1} \{|\lambda_j|\} \sum_{i=1}^{\infty} |s_i|.$$

Нетрудно проверить, что

$$S_\infty P_\infty = S_\infty, \quad S_\infty \Lambda_\infty = \Lambda_\infty.$$

Тогда

$$I_\infty - P_\infty = (I_\infty - S_\infty)(I_\infty - P_\infty + \Lambda_\infty),$$

где I_∞ – бесконечная единичная матрица. Отсюда следует, что уравнение

$$x = P_\infty x, \quad x \in l_1, \quad (2.1)$$

равносильно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (I_\infty - S_\infty)y = 0, \\ (I_\infty - P_\infty + \Lambda_\infty)x = y, \end{cases} \quad x, y \in l_1. \quad (2.2)$$

Первое уравнение этой системы, как нетрудно убедиться, имеет с точностью до постоянного множителя единственное решение

$$e_\infty \equiv (s_1, s_2, \dots, s_m, \dots)^T.$$

Следовательно, каждое решение из l_1 (если оно существует) уравнения

$$(I_\infty - P_\infty + \Lambda_\infty)x = e_\infty \quad (2.3)$$

является решением уравнения (2.1). В дальнейшем будем считать, что $s_i > 0$ при $i = 1, \dots, N$, $s_i = 0$ при $i > N$, $N > 2$. Обозначим $\bar{s} \equiv (s_1, s_2, \dots)$, $\bar{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Рассмотрим функционал

$$F(\bar{s}; \bar{\lambda}) \equiv \sup_{j \geq 1} \{ \tilde{f}_j(\bar{s}; \lambda_j) \}, \quad \text{где} \quad \{ \tilde{f}_j(\bar{s}; \lambda_j) \} = \sum_{i=1}^{\infty} |p_{ij} - s_i \lambda_j|, \quad j = 1, \dots, \infty.$$

Очевидно, что

$$\|P_\infty - \Lambda_\infty\| \leq F(\bar{s}, \bar{\lambda}). \quad (2.4)$$

Фиксируем $\bar{s}$ и для каждого $j = 1, 2, \dots$, определим перестановку

$$(1 \dots N) \rightarrow (\sigma_j(1) \dots \sigma_j(N))$$

так, чтобы последовательность

$$\left\{ \frac{p_{\sigma_j(1),j}}{s_{\sigma_j(1)}}, \dots, \frac{p_{\sigma_j(N),j}}{s_{\sigma_j(N)}} \right\}$$

стала монотонно неубывающей. Обозначим

$$p_m^{(j)} \equiv p_{\sigma_j(m),j}, \quad s_m^{(j)} \equiv s_{\sigma_j(m)}, \quad m = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, \infty.$$

По аналогии с предыдущей секцией получим

$$\tilde{f}_j(\bar{s}; \lambda_j) = 1 - \left[2(p_1^{(j)} + \dots + p_l^{(j)}) + \left(1 - 2 \sum_{m=1}^l s_m^{(j)} \right) \lambda_j \right] \quad (2.5)$$

при $\lambda_j \in [p_l^{(j)}/s_l^{(j)}; p_{l+1}^{(j)}/s_{l+1}^{(j)}]$, $j = 1, \dots, \infty$, $l \in \{1, \dots, N-1\}$;

$$\tilde{f}_j(\bar{s}; \lambda_j) = \sum_{m=1}^N (p_m^{(j)} - s_m^{(j)} \lambda_j) + R_{N,j} \quad (2.6)$$

при $\lambda_j < p_1^{(j)}/s_1^{(j)}$, $j = 1, \dots, \infty$;

$$\tilde{f}_j(\bar{s}; \lambda_j) = - \sum_{m=1}^N (p_m^{(j)} - s_m^{(j)} \lambda_j) + R_{N,j} \quad (2.7)$$

при $\lambda_j > p_N^{(j)}/s_N^{(j)}$, $j = 1, \dots, \infty$, где $R_{N,j} \equiv \sum_{i=N+1}^{\infty} p_{ij}$, $j = 1, \dots, \infty$. Пусть для каждого $j = 1, 2, \dots$ существует $k_j \in \{1, \dots, N-1\}$ такое, что

$$\sum_{m=1}^{k_j} s_m^{(j)} \leq \frac{1}{2}, \quad \sum_{m=1}^{k_j+1} s_m^{(j)} > \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Тогда из (2.5)–(2.7) следует

$$\min_{\lambda_j \in R} \tilde{f}_j(\bar{s}; \lambda_j) = \tilde{f}_j\left(\bar{s}; \frac{p_{k_j+1}^{(j)}}{s_{k_j+1}^{(j)}}\right), \quad j = 1, 2, \dots$$

Отсюда и из (2.1)–(2.4) получим следующее.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k_j, j = 1, \dots, \infty$, определяются из условий (2.8), и пусть для некоторого $\varepsilon \in (0; 1)$ выполняются неравенства

$$2 \sum_{m=1}^{k_l} p_m^{(j)} + \left[1 - 2 \sum_{m=1}^{k_l} s_m^{(j)}\right] \frac{p_{k_j+1}^{(j)}}{s_{k_j+1}^{(j)}} \geq \varepsilon, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тогда $\nu = 1$ является простым собственным числом оператора P_∞ . Соответствующий собственный вектор является пределом последовательности

$$\bar{x}_1 = e_\infty, \quad \bar{x}_{m+1} = e_\infty + (P_\infty - \Lambda_\infty)\bar{x}_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

с $\lambda_j = p_{k_j+1}^{(j)}/s_{k_j+1}^{(j)}$ при $m \rightarrow \infty$, которая сходится не медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1 - \varepsilon$.

3. Случай интегрального стохастического оператора, действующего в L_1 . Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^n$ – измеримое множество, и пусть $K: L_1(G) \rightarrow L_1(G)$ – стохастический интегральный оператор:

$$(Kf)(x) \equiv \int_G \mathcal{K}(x; t) f(t) dt, \quad f \in L_1(G), \quad \mathcal{K}(x; t) \geq 0, \quad x, t \in G,$$

$$\int_G \mathcal{K}(x; t) dx \equiv 1.$$

Очевидно, K – линейный ограниченный оператор в $L_1(G)$. Пусть $s(x) \in L_1(G)$, $\int_G s(x) dx = 1$, $\lambda(x) \in L_\infty(G)$. Рассмотрим следующие интегральные операторы:

$$(Sf)(x) \equiv s(x) \int_G f(t) dt, \quad (\Lambda f)(x) \equiv s(x) \int_G \lambda(t) f(t) dt, \quad f \in L_1(G).$$

Очевидно, S и Λ – линейные ограниченные операторы в $L_1(G)$. Нетрудно проверить, что

$$SK = S, \quad S\Lambda = \Lambda.$$

Тогда

$$I - K = (I - S)(I - K + \Lambda),$$

где I – единичный в $L_1(G)$ оператор. Отсюда следует, что уравнение

$$f = Kf, \quad f \in L_1(G), \tag{3.1}$$

эквивалентно следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} (I - S)g = 0, \\ (I - K + \Lambda)f = g, \end{cases} \quad f, g \in L_1(G). \tag{3.2}$$

Нетрудно убедиться, что первое уравнение последней системы имеет с точностью до постоянного множителя единственное решение $g(x) = s(x)$. Следовательно, каждое решение из $L_1(G)$ интегрального уравнения

$$f(x) = s(x) + \int_G [\mathcal{K}(x; t) - s(x)\lambda(t)]f(t) dt, \quad x \in G. \quad (3.3)$$

является решением (3.1). Если функции $\mathcal{K}(x; t)$, $s(x)$ и $\lambda(t)$ таковы, что $\|K - \Lambda\| < 1$, то единственное в $L_1(G)$ решение уравнения (3.3) является пределом последовательности

$$f_1(x) = s(x), \quad f_{m+1}(x) = s(x) + \int_G [\mathcal{K}(x; t) - s(x)\lambda(t)]f_m(t) dt, \quad m = 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $s(x) > 0$, $x \in G$, $G = \bigcup_{i=1}^m G_i$, где G_i , $i = 1, \dots, m$, — измеримые попарно непересекающиеся множества, и пусть $k_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, — заданные на G измеримые неотрицательные функции такие, что

- 1) $\int_{\text{supp}(k_i(x))} s(x) dx > 1/2$, $i = 1, \dots, m$;
- 2) $\mathcal{K}(x; t) \geq k_i(x)$, $(x; t) \in G \times G_i$, $i = 1, \dots, m$.

Тогда уравнение (3.1) имеет нетривиальное неотрицательное с точностью до постоянного множителя единственное в $L_1(G)$ решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A_{t,\lambda} \equiv \{x \in G : \mathcal{K}(x; t) \leq \lambda s(x)\}, \quad B_{t,\lambda} \equiv \{x \in G : \mathcal{K}(x; t) > \lambda s(x)\}, \quad \lambda \geq 0, \\ \tilde{\mathcal{F}}(t; \lambda) \equiv \int_G |\mathcal{K}(x; t) - \lambda s(x)| dx.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(t; \lambda) &= \lambda \left[\int_{A_{t,\lambda}} s(x) dx - \int_{B_{t,\lambda}} s(x) dx \right] + \int_{B_{t,\lambda}} \mathcal{K}(x; t) dx - \int_{A_{t,\lambda}} \mathcal{K}(x; t) dx \\ &= 1 - \left[2 \int_{A_{t,\lambda}} \mathcal{K}(x; t) dx + \lambda \left(\int_{B_{t,\lambda}} s(x) dx - \int_{A_{t,\lambda}} s(x) dx \right) \right], \quad \lambda \geq 0, \quad t \in G. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Пусть

$$A_\lambda^i \equiv \{x \in G : k_i(x) \leq \lambda s(x)\}, \quad B_\lambda^i \equiv \{x \in G : k_i(x) \geq \lambda s(x)\}, \quad \lambda > 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

В силу условия 1) имеем

$$\int_{B_0^i} s(x) dx - \int_{A_0^i} s(x) dx = 2 \int_{\text{supp}(k_i(x))} s(x) dx - 1 > 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.5)$$

Покажем, что $\int_{A_\lambda^i} s(x) dx$, $i = 1, \dots, m$, являются непрерывными функциями от λ .

Пусть $\lambda_1 < \lambda_2$. Тогда $A_{\lambda_1}^i \subseteq A_{\lambda_2}^i$ и

$$A_{\lambda_2}^i \setminus A_{\lambda_1}^i = \left\{ x \in G : \lambda_1 < \frac{k_i(x)}{s(x)} \leq \lambda_2 \right\}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.6)$$

Поскольку $k_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, $s(x)$ – измеримые функции и $s(x) > 0$, $x \in G$, то $k_i(x)/s(x)$, $i = 1, \dots, m$, – измеримые функции. Поэтому, в силу (3.6)

$$\mu(A_{\lambda_2}^i \setminus A_{\lambda_1}^i) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda_2 - \lambda_1 \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\mu(X)$ – обозначение меры множества X . Отсюда следует

$$\int_{A_{\lambda_2}^i} s(x) dx - \int_{A_{\lambda_1}^i} s(x) dx = \int_{A_{\lambda_2}^i \setminus A_{\lambda_1}^i} s(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \lambda_2 - \lambda_1 \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Значит, $\int_{A_{\lambda}^i} s(x) dx$, $i = 1, \dots, m$, – непрерывные функции от λ . Аналогичным образом показывается, что интегралы $\int_{B_{\lambda}^i} s(x) dx$, $i = 1, \dots, m$, являются непрерывными функциями от λ . Воспользовавшись непрерывностью $\int_{A_{\lambda}^i} s(x) dx$ и $\int_{B_{\lambda}^i} s(x) dx$, выберем λ_0 близким к нулю так, чтобы

$$\int_{B_{\lambda_0}^i} s(x) dx - \int_{A_{\lambda_0}^i} s(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon > 0, \quad \lambda_0 < 1, \quad \lambda_0 \varepsilon < 1. \quad (3.7)$$

В силу условия 2) выполняются соотношения

$$A_{t, \lambda_0} \subseteq A_{\lambda_0}^i, \quad B_{t, \lambda_0} \supseteq B_{\lambda_0}^i, \quad t \in G_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Отсюда из (3.4) и (3.7) следует, что

$$\tilde{\mathcal{F}}(t; \lambda_0) \leq 1 - \lambda_0 \varepsilon < 1, \quad t \in G. \quad (3.8)$$

Положим $\lambda(t) \equiv \lambda_0$. Тогда из (3.8) следует

$$\|K - \Lambda\| \leq \text{ess sup}_{t \in G} \int_G |\mathcal{K}(x; t) - s(x)\lambda(t)| dt \leq 1 - \lambda_0 \varepsilon < 1.$$

Значит, оператор $K - \Lambda$ является сжатием. Следовательно, уравнение (3.3) имеет в $L_1(G)$ единственное решение $\tilde{f}(x)$, которое является пределом последовательности

$$f_1(x) = s(x), \quad f_{m+1}(x) = s(x) + \int_G [\mathcal{K}(x; t) - \lambda_0 s(x)] f_m(t) dt, \quad x \in G, \quad m = 1, 2, \dots$$

при $m \rightarrow \infty$. Индукцией по m легко показать, что

$$\begin{aligned} f_m(x) &= (1 - \lambda_0)^{m-1} s(x) + (1 - \lambda_0)^{m-2} (Ks)(x) + \dots \\ &\quad + (1 - \lambda_0)^{m-2} (K^{m-1} s)(x) > 0, \quad x \in G, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

(так как $0 < \lambda_0 < 1$). Следовательно, $\tilde{f}(x)$ неотрицательна. В силу эквивалентности (3.1) и (3.2) $\tilde{f}(x)$ является единственным с точностью до постоянного множителя решением уравнения (1.1). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3 является дополнением к теореме Ентча (см. [4; с. 329]).

Пусть $\mu(G) < +\infty$. Положим $s(x) \equiv 1/\mu(G)$. Тогда из теоремы 3 непосредственно получим

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $G = \bigcup_{i=1}^m G_i$, где G_i , $i = 1, \dots, m$, – непересекающиеся измеримые множества, и пусть $k_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, – заданные на G неотрицательные измеримые функции такие, что

$$\mu(\text{supp}(k_i(x))) > \frac{1}{2}\mu(G), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\mathcal{K}(x; t) \geq k_i(x), \quad (x; t) \in G \times G_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда уравнение (3.1) имеет нетривиальное неотрицательное с точностью до постоянного множителя единственное в $L_1(G)$ решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Г. Хачиян, “Сложность задачи линейного программирования”, Новое в жизни, науке, технике. Сер. Матем., кибернет., **10**, Знание, М., 1987.
- [2] В. В. Воеводин, *Ошибки округления и устойчивость в прямых методах линейной алгебры*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1969.
- [3] В. В. Воеводин, *Вычислительные основы линейной алгебры*, Наука, М., 1977.
- [4] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1978.

Г. А. Григорян

Институт математики НАН Армении

E-mail: mathphys2@instmath.sci.am

Поступило

14.02.2013

Исправленный вариант

03.07.2013