Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Диаб, П. А. Кулешов, О. М. Пенкин, Оценка первого собственного значения лапласиана на графе, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 885–895

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:59:12

Оценка первого собственного значения лапласиана на графе

А. Т. Диаб, П. А. Кулешов, О. М. Пенкин

Рассматривается задача на собственные значения для лапласиана с краевыми условиями Дирихле на графе. Основной результат – оценка первого (минимального) собственного значения. В доказательстве используется симметризация Шварца функции на графе и ее свойства.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10268

Уравнения на так называемых геометрических графах (топологических сетях или одномерных симплицальных комплексах) – весьма быстро развивающееся направление в теории дифференциальных уравнений. В числе его особенно интенсивно развивающихся разделов можно указать задачу Штурма–Лиувилля на графах. К настоящему времени тщательно разработан вопрос об асимптотике ее спектра, обоснованы результаты о спектральной полноте, получены оценки кратностей собственных значений. В данной работе мы даем оценку снизу главного собственного значения упомянутой задачи. Такого типа оценки могут получаться, например, на базе теории операторов, действующих в пространствах с конусами (Красносельский, Стеценко и др., см., например, [1], [2]), поскольку оценка снизу главного собственного значения эквивалентна оценке спектрального радиуса интегрального оператора, порожденного функцией Грина задачи Штурма–Лиувилля. Данная теория оказывается применимой, поскольку ранее было показано (в ряде работ Покорного и его учеников; см. подробные комментарии и библиографию в [3]), что свойства функции Грина обеспечивают упомянутому оператору хорошие знакорегулярные свойства. Однако, насколько нам известно, вопрос о получении точных оценок главного собственного значения на графе к настоящему моменту не решен. Поскольку в явном виде функцию Грина задачи Штурма–Лиувилля на графе, вообще говоря невозможно найти, операторный подход, упомянутый выше, не может быть применен для наших целей. Здесь мы даем такую оценку, основываясь на принципе Рэля и методе перестановок (или симметризаций). Оказывается, только самая грубая симметризация, разрушающая топологию графа, превращая его в отрезок, оказывается эффективной. Другие симметризации могут не уменьшать интеграл Дирихле, а потому оказываются бесполезными.

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (госконтракт 14.A18.21.0357).

1. Постановка задачи. Терминологию, применяемую в теории дифференциальных уравнений на графах, можно найти в обзорах [4], [3]. Эти же работы дают достаточно полное представление о текущем состоянии этой теории. Однако, для удобства мы приводим определения всех необходимых нам понятий. Сразу отметим, что термин “граф” нами определяется не так, как это делается в теории графов. Нам бы следовало употребить, как компромисс, термин “геометрический граф”, но мы ради краткости позволим себе называть рассматриваемый нами объект термином “граф”.

Графом будем называть связное множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, имеющее вид

$$\Gamma = \left(\bigcup_{i=1}^m v_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n e_j \right),$$

где $\{v_i\}_{i=1}^m =: V(\Gamma)$ – семейство точек из пространства $\mathbb{R}^3$, называемых далее *вершинами*, а $\{e_j\}_{j=1}^n =: E(\Gamma)$ – семейство открытых интервалов с концами в некоторых вершинах из $V(\Gamma)$, далее называемых *ребрами*. Объявив одну из вершин v_i ребра e_k начальной, а другую – v_j – конечной, мы фиксируем ориентацию на нем; будем в этом случае писать $e_k = (v_i, v_j)$. Введя на этом ребре натуральную параметризацию, согласованную с его ориентацией, мы каждой точке x ставим в соответствие координату l , определяемую соотношением

$$x = v_i + l\vec{v}_{ij},$$

где $\vec{v}_{ij}$ – единичный вектор, направленный от v_i к v_j . Здесь x – точка рассматриваемого ребра, полученная из v_i сдвигом на вектор $l\vec{v}_{ij}$. Производная функции $u: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x \in e_k$ определяется как

$$u'(x) = \frac{d}{dl} u(v_i + l\vec{v}_{ij}).$$

Эта производная, точнее ее знак, зависит от ориентации ребра. Однако, в рассматриваемые нами уравнения входят только вторые производные в точках ребер, а такие производные от ориентации не зависят. В вершине же мы всегда будем рассматривать только производную по направлению единичного вектора, направленного внутрь ребра. Эту производную мы обозначим через $u'_k(v_i)$, если речь идет о вершине v_i , примыкающей к ребру. Например, для ребра $e_k = (v_i, v_j)$ имеем

$$u'_k(v_i) = \left. \frac{d}{dl} \right|_{l=0} u(v_j + l\vec{v}_{ij}), \quad u'_k(v_j) = - \left. \frac{d}{dl} \right|_{l=1} u(v_i + l\vec{v}_{ij}).$$

Всюду далее тот факт, что ребро e примыкает к вершине v , обозначается соотношением $e \succ v$.

Множество Γ мы представляем в виде объединения $\Gamma_0 \cup \partial\Gamma_0$. В качестве Γ_0 мы берем любое связное подмножество Γ , содержащее точки всех его ребер и некоторое подмножество V_0 множества V . Вершины из V_0 мы называем *внутренними*, остальная часть вершин обозначается через $\partial\Gamma_0$. Вершины из $\partial\Gamma_0$ называются *граничными*. Формально, это последнее множество может быть и пустым, но в этой работе предполагается, что граница $\partial\Gamma_0$ не пуста; легко видеть, что в любом связном графе можно выбрать вершину так, что ее выбрасывание из графа не нарушает его

связности. На Γ_0 мы будем рассматривать дифференциальное уравнение, а в точках из $\partial\Gamma_0$ задавать краевые условия.

Через $C(\Gamma)$ обозначим множество непрерывных на Γ функций, а его подмножество, составленное из функций, обращающихся в нуль на границе – через $C_0(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$. Обозначим также через $C^1(\Gamma)$ множество функций непрерывных на Γ , имеющих равномерно непрерывную производную на каждом ребре. Очевидно, что функция из $C^1(\Gamma)$ обязана иметь первые производные во внутренних вершинах, упомянутые выше. Положим также

$$C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0) = C^1(\Gamma) \cap C_0(\Gamma_0, \partial\Gamma_0).$$

Граф в нашем определении является одномерным стратифицированным множеством, а потому на нем можно определить меру как на стратифицированном множестве (подробности см. в [3]). Однако нам удобно сделать это немного иначе. А именно, назовем подмножество ω в Γ *измеримым*, если его пересечение с каждым ребром измеримо по Лебегу. При этом меру ω удобно определить как сумму мер Лебега пересечений $\omega \cap e_i$ по всем ребрам. Интеграл Лебега измеримой функции $f: \omega \rightarrow \mathbb{R}$ оказывается при этом суммой интегралов этой функции по пересечениям $\omega \cap e_i$. Особый интерес для нас представляет *интеграл Дирихле*

$$\int_{\Gamma} |u'|^2 dx = \sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} |u_i'|^2 dl, \quad (1.1)$$

который мы будем изучать на множестве $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ (здесь u_i – сужение функции u на ребро e_i). Имея ввиду узкую цель – оценку первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля на графе, мы воздержимся от напрашивающихся обобщений. При ссылках на известные результаты мы также формулируем их в той общности, которая требуется для достижения указанной цели.

2. Принцип Пойя–Сегё. Напомним (см. [5], [6]), что принцип Пойя–Сегё утверждает, что при симметризации Шварца (при симметричной перестановке) неотрицательной функции из $H^1(\mathbb{R}^n)$ норма ее градиента в $L^2(\mathbb{R}^n)$ не возрастает. Вместе с принципом Рэлея этот принцип дает способ получить точную оценку первого собственного значения лапласиана, подчиненного условиям Дирихле; напомним, что первому собственному значению соответствует неотрицательная собственная функция (для уравнений на графах это утверждение можно найти в [3]). Можно показать, что дифференциальное выражение Δ на графе, которое на ребрах графа задается соотношением $\Delta u(x) = u''(x)$, а в вершинах – соотношением

$$\Delta u(v_i) = \sum_{e_j \succ v_i} u_j'(v),$$

является точным аналогом лапласиана на графе (см. [3]), а задача

$$\Delta u + \lambda \rho u = 0, \quad (2.1)$$

$$u|_{\partial\Gamma_0} = 0 \quad (2.2)$$

аналогом задачи Штурма–Лиувилля на графе. Здесь ρ – неотрицательная функция; в большей части работы мы полагаем $\rho = 1$ на ребрах и $\rho = 0$ во внутренних вершинах. Соотношения (2.1), (2.2) моделируют задачу о нахождении форм колебаний и соответствующих им частот в системе струн, связанных в виде графа. Полагая

ρ равным нулю во внутренних вершинах графа, мы исключаем из рассмотрения точечные массы в узлах сетки.

В (2.1) значок Δ употребляется, поскольку набор дифференциальных соотношений на ребрах и в вершинах графа, как уже упоминалось, оказывается точным аналогом оператора Лапласа. Более того, он может быть записан в виде дивергенции от градиента (см. подробности в [3]). В пользу принятых нами обозначений говорит также и то, что “низкочастотная” часть спектра задачи (2.1), (2.2) в случае, когда граф имеет вид достаточно густой сетки, ведет себя как спектр некоторой мембраны, специальным образом связанной с сеткой (см. [7]).

Уже в первых работах (см. библиографию в [3]), посвященных этой задаче, было доказано, что ее спектр состоит из последовательности положительных собственных значений, стремящейся к бесконечности, и что первому (минимальному) собственному значению отвечает собственная функция, не имеющая нулей в Γ_0 , которая, следовательно, может быть взята положительной в Γ_0 . Оценку первого собственного значения этой задачи – основную цель данной работы – мы начнем с обобщения принципа Пойа–Сегё на случай функций, заданных на графе.

Существуют различные варианты симметризации Шварца на графе. Например, мы можем функцию на графе-звезде (одна вершина, к которой примыкает несколько ребер), составленном из ребер разной длины, заменить на равноизмеримую ей, заданную на графе-звезде с тем же числом ребер, которые, вдобавок, имеют одинаковые длины, и мера которого равна мере исходного графа. Однако, такая симметризация, вызванная нашим желанием сохранить топологию графа, не удовлетворяет принципу Пойа–Сегё, в чем нетрудно убедиться. Симметризация – процедура по своей сути метрическая. Заметим для дальнейшего, что упомянутая только что равноизмеримость означает равенство мер лебеговых множеств $L_u(t) = \{x : u(x) \geq t\}$ исходной функции и ее перестановки, см., например, [5]. Оказывается, только следующий “грубый” вариант симметризации обладает нужными свойствами.

Обозначим меру Лебега на графе через μ_Γ , а через μ – обычную меру Лебега на числовой прямой. Положим $L = \mu_\Gamma(\Gamma)$. Тогда требуемая симметризация функции (всюду далее вплоть до принципа Рэля функции предполагаются неотрицательными) $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ определяется как такая функция $u^* : [0; L] \rightarrow \mathbb{R}$, что каждое лебегово множество $L_{u^*}(t)$ является отрезком с центром в точке $L/2$ и, при этом, $\mu_\Gamma(L_u(t)) = \mu(L_{u^*}(t))$ при всех t .

Прежде всего начнем с обсуждения вопроса о гладкости u^* .

ЛЕММА 1. Если $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, то $u^* \in PC_0^1[0; L]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь через $PC_0^1[0; L]$ обозначен класс кусочно-непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка. Такие функции непрерывны на $[0; L]$ и для каждой из них существует разбиение отрезка $[0; L]$ на конечное число подотрезков, на каждом из которых функция непрерывно дифференцируема. В рассматриваемом нами случае можно показать, что разбиение на подотрезки можно взять единым для всех u^* , получающихся из функций $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, но это нам не потребуется.

В нашем доказательстве неожиданным образом оказывается “замешанной” теорема Эйлера об уникурсальных графах. Напомним, что связный граф называется *уникурсальным* или *эйлеровым*, если его можно обойти по некоторому маршруту, побывав на каждом ребре ровно один раз. Теорема Эйлера (см., например, [8])

утверждает, что для уникальности связного графа необходимо и достаточно, чтобы число его нечетных вершин равнялось 0 или 2. Из данной теоремы следует, что в любом связном графе существует маршрут, обозначим его R , начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине и проходящий через каждое ребро графа дважды. Для этого достаточно заметить, что если удвоить каждое ребро графа, то в силу приведенной теоремы граф станет эйлеровым. “Развернув” изометричным образом маршрут R в отрезок $[0; 2L]$ числовой оси и определив на нем функцию u по принципу соответствия: $\tilde{u}(x) = u(y)$, где y – точка графа, соответствующая x при упомянутой развертке, мы для определенной выше симметризации функции u и обычной одномерной симметризации функции $\tilde{u}$ получим при всех $x \in [0; L]$ равенство $\tilde{u}^*(2x) = u^*(x)$ (оно следует из того, что $2\mu_\Gamma(L_u(t)) = \mu(L_{\tilde{u}}(t))$ при всех t). Кроме того, будем иметь $\tilde{u}(x) \in PC^1[0; 2L]$. А поскольку хорошо известно, что симметризация Шварца переводит кусочно-гладкие функции в кусочно-гладкие, то $\tilde{u}^*(x) \in PC_0^1[0; 2L]$; нуль на концах отрезка связан с тем, что u обращается в нуль на границе. Отсюда следует утверждение леммы.

Определенная выше симметризация Шварца функции на графе нами будет осуществляться в два этапа (см. рис. 1). На первом шаге ребра графа Γ в произвольном порядке и без учета ориентации выкладываем (в стык) одно за другим на отрезок $[0; L]$; можно было бы ребра выкладывать и иначе (лишь бы они попарно не пересекались), поскольку для симметризации это не важно. Всюду на $[0; L]$, кроме точек стыка, определяем функцию $\hat{u}(x)$ по принципу соответствия, как и выше при определении функции $\tilde{u}$. Значения в точках стыка не играют никакой роли, но для определенности, мы в качестве значений возьмем любой из односторонних пределов. Обычная симметризация Шварца функции $\hat{u}$, построенная на том же отрезке, очевидным образом совпадает с симметризацией Шварца функции u на графе, определенной нами выше, т.е. с u^* . Хотя функция $\hat{u}$, вообще говоря, разрывна, мы в силу леммы 1 можем утверждать, что ее симметризация Шварца принадлежит $PC_0^1[0; L]$ при $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$.

Рис. 1. Симметризация функции на графе

Из этого построения, а также из свойств обычной симметризации Шварца на отрезке, очевидным образом вытекает следующее равенство:

$$\int_{\Gamma} u^2 dx = \int_0^L u^{*2} dx. \quad (2.3)$$

Теперь у нас все готово для формулировки и доказательства основного результата данного пункта.

ТЕОРЕМА 1. Пусть дан граф $\Gamma = \Gamma_0 \cup \partial\Gamma_0$ такой, что для любого ребра графа существует простой путь, содержащий данное ребро, концами которого служат вершины из $\partial\Gamma_0$ (необязательно разные), пусть $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ неотрицательна, тогда

$$\int_{\Gamma} u'^2 dx \geq \int_0^L (u^*)'^2 dx. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удобно разбить доказательство на три шага.

Шаг 1. Пусть на множестве $\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]$, $n \geq 2$, попарно непересекающихся отрезков определена функция v , сужение которой на каждый отрезок является аффинной функцией с областью значений $[c, d]$. Пусть v^* – симметризация Шварца данной функции. Докажем следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} v'^2 dx \geq \int_0^l (v^*)'^2 dx, \quad (2.5)$$

где $l = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Левую часть перепишем в виде

$$\sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} v'^2 dx = (d - c)^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i - a_i}, \quad (2.6)$$

а правую – в виде

$$\int_0^l (u^*)'^2 dx = \frac{4(d - c)^2}{l}. \quad (2.7)$$

В силу неравенства о среднем арифметическом и среднем гармоническом имеем

$$(d - c)^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i - a_i} \geq \frac{n^2(d - c)^2}{l}, \quad (2.8)$$

откуда и следует неравенство (2.5), поскольку $n \geq 2$.

Шаг 2. Пусть $v: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ – кусочно-аффинная функция класса $C_0(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$. Тогда v удовлетворяет неравенству (2.4). *Кусочно-аффинной* мы называем такую функцию, график которой состоит из конечного числа отрезков. Иными словами, граф Γ допускает разбиение на такие отрезки, что сужение v на каждый из них является аффинной функцией.

Для доказательства достаточно заметить, что область значений такой функции можно разбить на конечное число таких отрезков $[c_i; d_i]$, что функция v является аффинной на составляющих отрезках прообраза $v^{-1}\{[c_i; d_i]\}$. Причем, число последних будет не меньше двух для всех i в силу наложенного нами на граф требования. Применяя доказанное на первом шаге неравенство к каждому $[c_i; d_i]$ и суммируя эти неравенства по всем i , приходим к (2.4) для функции v .

Шаг 3. Поскольку произвольную функцию u из $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ можно приблизить по норме

$$\|u\|^2 = \int_{\Gamma} u'^2 dx. \quad (2.9)$$

кусочно-аффинной функцией, то отсюда следует, что неравенство (2.4), будучи справедливым для кусочно-аффинных функций выполняется и для функций из $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Требования, предъявленные к графу, больше касаются устройства его границы (любой граф будет удовлетворять этим требованиям, при определенном выборе границы). Они оказываются и необходимыми условиями справедливости принципа Пойя–Сегё. Не приводя общего рассуждения, которое идейно просто, но описывается достаточно громоздко, проиллюстрируем на простом примере вариант нарушения принципа Пойя–Сегё. Если в графе, изображенном на рис. 2, объявить граничными только вершины v_1, v_2 , то условия теоремы нарушаются. Функция u , график которой изображен на рис. 2 слева, очевидно принадлежит классу $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$. Результат ее симметризации – функция u^* – изображен справа. Интеграл Дирихле функции u равен $2\delta^2 + (1 - \delta)^2$, а функции u^* равен $2\delta^2 + 4(1 - \delta)^2$ (на рисунке обозначены длины ребер и значения функций в некоторых точках, необходимые для вычислений). Получаем, что при всех $\delta \in [0; 1)$ неравенство (2.4) нарушается.

Интересно заметить, что если к границе графа добавить вершину v_3 , то принцип Пойя–Сегё будет выполняться. Приведенная выше функция u теперь не может быть использована как контрпример, поскольку она не принадлежит $C_0^1(\tilde{\Gamma}_0, \partial\tilde{\Gamma}_0)$, где $\partial\tilde{\Gamma}_0 = \{v_1, v_2, v_3\}$, а $\tilde{\Gamma}_0 = \Gamma \setminus \partial\tilde{\Gamma}_0$.

Рис. 2. Пример невыполнения принципа Пойя–Сегё

3. Принцип Рэлея для лапласиана на графе. Ключевую роль при оценке первого собственного значения в задаче Штурма–Лиувилля играет принцип Рэлея, сводящий его вычисление к нахождению минимума интеграла Дирихле. Для рассматриваемой нами задачи (2.1), (2.2) следующее утверждение является точным аналогом принципа Рэлея. Здесь по-прежнему предполагается, что ρ обращается в нуль во внутренних вершинах графа. В ситуации ($\rho \neq 0$) интегралы в принципе Рэлея рассматриваются по более общей мере, но существенных изменений доказательства не требуется.

ТЕОРЕМА 2. Собственная функция u_0 , соответствующая первому собственному значению λ_0 задачи (2.1), (2.2), минимизирует функционал

$$\Phi(u) = \frac{\int_{\Gamma} u'^2 dx}{\int_{\Gamma} u^2 dx}$$

на множестве $PC_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, причем минимум в точности равен λ_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксировав функцию $w \in C^1(\Gamma)$, рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{e_i} [(u_0 w)'^2(x) - \lambda_0 (u_0 w)^2(x)] dl = \int_{e_i} (u_0^2 w'^2 + u_0'^2 w^2 + 2u_0' w' u_0 w - \lambda_0 u_0^2 w^2) dl.$$

Используя (2.1) (в выкладке нам удобно использовать u'' вместо Δu) правую часть, преобразуем к виду

$$\int_{e_i} (u_0^2 w'^2 + u_0'^2 w^2 + 2u_0' w' u_0 w + u_0'' u_0 w^2) dl = \int_{e_i} \left(u_0^2 w'^2 + \frac{d}{dl} (u_0 u_0' w^2) \right) dl.$$

Обозначив через $V(e)$ множество вершин из V_0 , примыкающих к ребру e , последний интеграл преобразуем к виду

$$\int_{e_i} (u_0^2 w'^2) dl - \sum_{v_j \in V(e_i)} \lim_{x \rightarrow v_j, x \in e_i} (u_0(x) w^2(x) u_0'(x)). \quad (3.1)$$

Учитывая непрерывность функций u_0 и w , мы будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow v_j, x \in e_i} (u_0(x) w^2(x) u_0'(x)) = u_0(v_j) w^2(v_j) (u_0)_{\nu_{ij}}',$$

где ν_{ij} — единичный вектор в вершине v_j , направленный внутрь ребра e_i , а потому суммирование равенств (3.1) по всем ребрам графа с учетом того, что u_0 удовлетворяет условиям (2.1), (2.2), приводит к

$$\sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} [(u_0 w)'^2(x) - \lambda_0 (u_0 w)^2(x)] dl = \sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} u_0^2 w'^2 dl.$$

Правая часть последнего равенства, очевидно, неотрицательна, а значит, неотрицательна и левая часть. Кроме того, видно, что правая часть может обращаться в нуль лишь при условии, что $w' \equiv 0$ на каждом ребре графа (напомним, что u_0 положительна в Γ_0). Отсюда и из непрерывности w следует, что эта функция постоянна. Тем самым доказано, что на функциях u вида $u = u_0 w$ (множество таких функций обозначим U) выполняется неравенство

$$\sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} [u'^2(x) - \lambda_0 u^2(x)] dl \geq 0. \quad (3.2)$$

Причем равенство достигается только на скалярных функциях, кратных функции u_0 .

Далее, рассмотрим класс $\tilde{U}$, состоящий из тех функций из $C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, которые обращаются в нуль в некоторой окрестности $\partial\Gamma_0$. Чтобы показать, что $\tilde{U} \subset U$, достаточно положить $w = u/u_0$ и формально доопределить w нулем на границе. Теперь остается заметить, что произвольную функцию из $PC_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ можно приблизить функциями из $\tilde{U}$ в норме, определяемой соотношением

$$\|u\|^2 = \int_{\Gamma} (u'^2 + u^2) dx.$$

Отсюда следует, что (3.2) верно для любой функции из $PC_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$, что и завершает доказательство теоремы.

4. Оценка первого собственного значения. В этом пункте доказывается основной результат – оценка первого собственного значения задачи (2.1), (2.2). В комментариях мы приводим более общий результат, допуская отличие от нуля функции ρ во внутренних вершинах.

ТЕОРЕМА 3. *При сделанных выше предположениях относительно функции ρ имеет место следующая оценка первого собственного значения задачи (2.1), (2.2):*

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{(\mu(\Gamma))^2}. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть по-прежнему u_0 – собственная функция, отвечающая значению λ_0 , а u_0^* – ее симметризация; напомним, что последняя функция в силу леммы 1 принадлежит классу PC_0^1 . Из теоремы 2 получаем

$$\lambda_0 = \frac{\sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} u_0'^2(x) dl}{\sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} u_0^2(x) dl}. \quad (4.2)$$

Из свойств симметризации имеем

$$\sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} u_0^2 dl = \int_0^L u_0^{*2} dx, \quad \sum_{e_i \in E(\Gamma)} \int_{e_i} u_0'^2 dl \geq \int_0^L (u_0^*)'^2 dx,$$

(см. соотношения (2.3), (2.4)) и получаем

$$\lambda_0 \geq \frac{\int_0^L (u_0^*)'^2(x) dx}{\int_0^L u_0^{*2}(x) dx}.$$

Но правая часть последнего неравенства в силу классического принципа Рэля не меньше первого собственного значения простейшей задачи Штурма–Лиувилля на отрезке

$$u'' + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(L) = 0,$$

которое равно

$$\frac{\pi^2}{L^2} = \frac{\pi^2}{(\mu(\Gamma))^2},$$

что и требовалось.

5. Комментарии. Интересно заметить, в качестве первого комментария, что наша оценка первого собственного значения согласуется (при $n = 0$) с асимптотической формулой

$$\lambda_n = \frac{\pi^2(n+1)^2}{(\mu(\Gamma))^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

полученной Завгородним (см. [3]).

В качестве второго комментария отметим, что в общем случае, если геометрические условия на граф, сформулированные в теореме 1, нарушаются, но граница остается непустой, то получается только более грубая оценка:

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{4(\mu(\Gamma))^2}.$$

Для получения этой оценки достаточно заметить, что удвоение каждого ребра исходного графа приводит к такому графу, который удовлетворяет требованиям теоремы 1. В случае графа-отрезка, у которого только один конец объявляется граничной вершиной, в данной оценке возникает равенство.

В качестве третьего комментария заметим, что наличие сосредоточенных масс не препятствует получению точной оценки первого собственного значения задачи (2.1), (2.2). Мы покажем, как этот случай свести к рассмотренному выше, и приведем соответствующую оценку. Описание конструкции мы позволим себе провести на примере, изображенном на рис. 3 (перенос этого построения на общий случай тривиален).

Рис. 3. Преобразование графа с массой в вершине

Во-первых, заметим, что рассуждения, проведенные в ходе доказательства теоремы 2, в данном случае приводят к формуле

$$\lambda_0 = \min_{u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)} \frac{\int_{\Gamma} u'^2 dx}{\int_{\Gamma} u^2 dx + \sum_{v_i \in V_0} m_i u^2(v_i)}, \quad (5.1)$$

где m_i – масса вершины v_i (фактически m_i есть $\rho(v_i)$). Графу Γ , в вершине v которого сосредоточена масса величины m , ставим в соответствие граф $\tilde{\Gamma}$, не имеющий массы в вершине v и получающийся из исходного добавлением петли длины m , которая начинается и заканчивается в вершине v . Функцию u , заданную на Γ , доопределяем на $\tilde{\Gamma}$ до функции $\tilde{u}$, которая всюду на e_v равна $u(v)$. Легко видеть, что $\tilde{u} \in$

$C_0^1(\tilde{\Gamma}_0, \partial\tilde{\Gamma}_0)$ и выполнено

$$\sum_{v_i \in V_0} m_i u^2(v_i) + \int_{\Gamma} u^2 dx = \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{u}^2 dx, \quad \int_{\Gamma} u'^2 dx = \int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{u}'^2 dx. \quad (5.2)$$

Тогда согласно теореме 2, соотношениям (5.2) и оценке (4.1) получим

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{\int_{\Gamma} u_0'^2 dx}{\int_{\Gamma} u_0^2 dx + \sum_{v_i \in V_0} m_i u_0^2(v_i)} = \frac{\int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{u}_0'^2 dx}{\int_{\tilde{\Gamma}} \tilde{u}_0^2 dx} \\ &\geq \min_{u \in C_0^1(\tilde{\Gamma}_0, \partial\tilde{\Gamma}_0)} \frac{\int_{\tilde{\Gamma}} u'^2 dx}{\int_{\tilde{\Gamma}} u^2 dx} \geq \frac{\pi^2}{(\mu(\tilde{\Gamma}))^2} = \frac{\pi^2}{(\mu(\Gamma) + \sum_{v_i \in V_0} m_i)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, если мерой исходного графа считать сумму длин ребер и сумму масс вершин, т.е. положить ее равной $\mu(\Gamma) + \sum_{v_i \in V_0} m_i$, то оценка собственного значения сохранит прежний вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа*, Современные проблемы математики, Физматгиз, М., 1962.
- [2] М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, В. И. Соболев, *Линейные позитивные системы. Метод положительных операторов*, Физматгиз, М., 1985.
- [3] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, М., 2005.
- [4] P. Kuchment, “Quantum graphs. I. Some basic structures”, *Waves Random Media*, **14** (2004), 107–128.
- [5] Э. Либ, М. Лосс, *Анализ*, Университетская серия, **1**, Научная книга, Новосибирск, 1998.
- [6] Г. Полиа, Г. Сегё, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматлит, М., 1962.
- [7] А. В. Комаров, О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный, “О частотном спектре многомерного аналога тканой мембраны”, *Докл. РАН*, **390**:2 (2003), 151–154.
- [8] К. Берж, *Теория графов и ее применения*, ИЛ, М., 1962.

А. Т. Диаб

Ain Shams University, Египт

E-mail: adeildiab80@hotmail.com

Поступило

26.02.2013

Исправленный вариант

18.05.2013

П. А. Кулешов

Воронежский государственный университет

E-mail: pavkuleshov@yandex.ru

О. М. Пенкин

Воронежский государственный университет

E-mail: o.m.penkin@gmail.com