Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Гончаров, С. А. Тимошин, Об одном классе эволюционных уравнений: существование решений с функциональными краевыми условиями, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 48–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1027>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:04:06

УДК 517.927+517.94

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ: СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. В. Гончаров, С. А. Тимошин

Рассматривается эволюционное уравнение, правая часть которого представляет собой сумму линейного неограниченного оператора, порождающего компактную сильно непрерывную полугруппу, и некоторого непрерывного оператора, действующего в функциональных пространствах. Доказано существование решения, которое не выходит за пределы фиксированного замкнутого выпуклого множества и удовлетворяет дополнительно функциональному краевому условию, частными случаями которого являются начальное условие Коши, условие периодичности, смешанное условие, включающее в себя непрерывное преобразование пространственных переменных, и т.д. Основной результат проиллюстрирован на примере краевой задачи для дифференциально-операторного уравнения с частными производными.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Пусть $T = [0, 1]$ – отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$ с мерой Лебега $\mu(dt)$ и X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Как обычно, через $L_1(T, X)$ будем обозначать пространство классов эквивалентности интегрируемых по Бохнеру функций $u: T \rightarrow X$, снабженное нормой $\|\cdot\|_1$,

$$\|u\|_1 = \int_T \|u(t)\| dt.$$

В работе рассматривается эволюционное уравнение

$$\dot{u}(t) = Au(t) + g(u)(t), \quad (1)$$

где A – линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор на X , порождающий сильно непрерывную полугруппу, а оператор g переводит некоторое множество $\mathcal{U} \subset L_1(T, X)$ в $L_1(T, X)$. Это уравнение мы будем называть *дифференциально-операторным уравнением*, подчеркивая тем самым специфику входящих в него объектов. В частном случае, когда g представляет собой оператор Немыцкого, соответствующий функции $f: T \times X \rightarrow X$, соотношение вида (1) часто называют *полулинейным эволюционным*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00326.

уравнением. Применяя подход, основанный на непрерывных селекторах и теореме Шаудера о неподвижной точке (подобно тому, как это делалось в [1], [2]), мы докажем существование интегрального решения $u(\cdot)$ уравнения (1), удовлетворяющего фазовому ограничению

$$u(t) \in K \quad \text{для всех } t \in T, \quad (2)$$

где K – фиксированное замкнутое подмножество X , и краевому условию

$$u(0) = \varphi(u), \quad (3)$$

в котором отображение φ определено на подмножестве пространства $L_1(T, X)$ и принимает значения в X .

Если отображение φ постоянно, $\varphi(u) \equiv u_0 \in X$, то мы приходим к обычной начальной задаче, которая для полулинейных уравнений изучалась многими авторами. Ими рассматривались вопросы существования, единственности и регулярности решения (в том числе, выживающего на замкнутом множестве) при различных предположениях на функцию f и на порождаемую оператором A полугруппу. Отметим работы [3]–[5], содержащие принципиальные результаты в этом направлении, многочисленные приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений с частными производными, а также обширную библиографию.

Другой распространенный пример функциональных условий (3) дает условие периодичности $u(0) = u(\theta)$, $0 < \theta \leq 1$. Для полулинейных эволюционных уравнений в [6], [7] доказаны теоремы существования периодических решений, гарантирующие, кроме того, попадание решения в фиксированное замкнутое множество K . В автономном случае из этих теорем непосредственно следует существование точек равновесия.

Среди работ, посвященных вопросам разрешимости функциональных краевых задач общего вида, отметим серию статей [8]–[10] С. А. Брыкалова, в которых наряду с традиционными двухточечными краевыми условиями рассматриваются интегральные условия, условия типа функциональных норм и т.д. При этом, однако, правая часть дифференциально-операторного уравнения предполагается непрерывной.

Поскольку оператор g в (1) зависит, вообще говоря, не только от значения $u(\cdot)$ в момент времени t , а от всех значений функции, то полученные в настоящей статье результаты могут быть использованы как для исследования различных интегро-дифференциальных уравнений (в том числе, с частными производными), так и для доказательства существования решений широкого класса эволюционных включений с невыпуклозначной правой частью.

2. Некоторые свойства полугрупп линейных ограниченных операторов.

Напомним, что однопараметрическое семейство $S = \{S(t), t \geq 0\}$ линейных ограниченных операторов на X называется *сильно непрерывной полугруппой* (c_0 -полугруппой), если

- 1) $S(t + \tau) = S(t)S(\tau)$ для всех $t, \tau \geq 0$;
- 2) $S(0) = J$ – тождественный оператор на X ;
- 3) $\lim_{t \rightarrow 0+} S(t)x = x$ для каждого $x \in X$.

Основные сведения из теории полугрупп линейных операторов можно найти, например, в книге [3]. Известно, в частности, что для любой c_0 -полугруппы S существуют константы $M \geq 1$ и $\omega \geq 0$ такие, что

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad (4)$$

где $\|\cdot\|$ означает также норму оператора. Полугруппа называется *сжимающей*, если $M = 1, \omega = 0$. С каждой сильно непрерывной полугруппой S можно связать линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор $A: D(A) \rightarrow X$, определенный на множестве

$$D(A) := \left\{ x \in X : \text{существует предел } \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)x - x}{t} \right\},$$

плотном в X , по правилу

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A).$$

Принято говорить, что A — *инфинитезимальный генератор* полугруппы $S = \{S(t), t \geq 0\}$.

Полугруппа S называется *дифференцируемой*, если $S(t)x \in D(A)$ для всех $x \in X, t > 0$; *аналитической*, если она дифференцируема и существует $N > 0$ такое, что $\|AS(t)\| \leq N/t$ для всех $t \in (0, 1]$; *компактной*, если оператор $S(t): X \rightarrow X$ является компактным при каждом $t > 0$.

Наряду с банаховым пространством $L_1(T, X)$ в дальнейшем мы будем использовать пространство $C(T, X)$ непрерывных функций $u: T \rightarrow X$ с топологией равномерной сходимости на компактах из полуинтервала $(0, 1]$. Последняя топология (обозначим ее через $\mathcal{T}_c$) может быть задана с помощью счетного семейства полунорм

$$\{p_m(\cdot), m = 1, 2, \dots\}, \quad p_m(u) := \sup_{t \in [1/m, 1]} \|u(t)\|,$$

а потому метризуема. Тот факт, что множество $\mathcal{U} \subset C(T, X)$ рассматривается как самостоятельное пространство относительно топологии, индуцированной $\mathcal{T}_c$ (нормой пространства $L_1(T, X)$), мы будем отражать в записи $(\mathcal{U}, \mathcal{T}_c)$ (соответственно $(\mathcal{U}, \|\cdot\|_1)$).

Множество $Q \subset L_1(T, X)$ назовем *равномерно интегрируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_E \|v(t)\| dt \leq \varepsilon,$$

как только $v(\cdot) \in Q$ и $E \subset T$ — измеримое множество с $\mu(E) \leq \delta$.

Для фиксированной полугруппы S определим оператор $\mathcal{P}_S: X \times L_1(T, X) \rightarrow L_1(T, X)$:

$$\mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t) := S(t)\xi + \int_0^t S(t-\tau)v(\tau) d\tau, \quad \xi \in X, \quad v(\cdot) \in L_1(T, X), \quad t \in T.$$

Установим теперь одно свойство компактности, которое будет играть важную роль в дальнейших построениях. Под *мерой некомпактности* ограниченного множества $C \subset X$ понимается число $\kappa(C)$, равное точной нижней грани всех $r > 0$ таких, что C может быть покрыто конечным числом шаров, радиус которых не превосходит r . Свойства меры некомпактности анонсированы, например, в [11].

ЛЕММА 1. Пусть S – компактная c_0 -полугруппа линейных ограниченных операторов на X . Тогда для любого ограниченного $K \subset X$ и любого равномерно интегрируемого $Q \subset L_1(T, X)$ оператор $\mathcal{P}_S$ переводит множество $K \times Q$ в относительно компактное подмножество пространства $(C(T, X), \mathcal{T}_c)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4) непосредственно следует

$$\|\mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t)\| \leq Me^{\omega t} \left(\|\xi\| + \int_T \|v(\tau)\| d\tau \right).$$

Так как равномерно интегрируемое множество, очевидно, ограничено в $L_1(T, X)$, то $\Sigma := \{\mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t) : \xi \in K, v(\cdot) \in Q, t \in T\}$ ограничено в X . Зафиксируем $t \in T$, $t > 0$, и покажем относительную компактность в X множества $\mathcal{P}_S(K \times Q)(t) \subset \Sigma$. Выбрав достаточно малое $h > 0$, $t - h > 0$, и воспользовавшись свойствами функции $\kappa(\cdot)$, получим

$$\kappa(\mathcal{P}_S(K \times Q)(t)) \leq \kappa(S(h)\mathcal{P}_S(K \times Q)(t-h)) + \kappa\left(\left\{\int_{t-h}^t S(t-\tau)v(\tau) d\tau : v(\cdot) \in Q\right\}\right). \quad (5)$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю в силу компактности оператора $S(h)$ и ограниченности множества $\mathcal{P}_S(K \times Q)(t-h) \subset \Sigma$. Оценим второе слагаемое [11, с. 19]:

$$\kappa\left(\left\{\int_{t-h}^t S(t-\tau)v(\tau) d\tau : v(\cdot) \in Q\right\}\right) \leq 2Me^{\omega} \sup_{v(\cdot) \in Q} \int_{t-h}^t \|v(\tau)\| d\tau.$$

Согласно равномерной интегрируемости Q для любого $\varepsilon > 0$ найдется $h_0 > 0$ такое, что

$$\kappa\left(\left\{\int_{t-h}^t S(t-\tau)v(\tau) d\tau : v(\cdot) \in Q\right\}\right) \leq \varepsilon$$

при всех $0 < h \leq h_0$. Поскольку левая часть неравенства (5) не зависит от h , то $\kappa(\mathcal{P}_S(K \times Q)(t)) = 0$ и множество относительно компактно.

Возьмем $t_0 \in (0, 1]$ и докажем равностепенную непрерывность семейства функций $\mathcal{P}_S(K \times Q)$ в этой точке справа. Зафиксировав $\varepsilon > 0$, по доказанному выше найдем конечное число точек $x_i, i = 1, \dots, n$, таких, что

$$\mathcal{P}_S(K \times Q)(t_0) \subset \bigcup_{i=1}^n \left(x_i + \frac{\varepsilon}{3(Me^{\omega} + 1)} \overline{B} \right).$$

Через $\overline{B}$ здесь и далее мы обозначаем замкнутый единичный шар с центром в 0 из X . В силу свойств полугруппы S и множества Q существует $\delta > 0$, для которого $\|S(t-t_0)x_i - x_i\| \leq \varepsilon/3, i = 1, \dots, n$, и

$$\int_{t_0}^t \|v(\tau)\| d\tau \leq \frac{\varepsilon}{3Me^{\omega}}$$

при всех $v(\cdot) \in Q$ и $t \in T, t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$. Тогда для $\xi \in K$ и $v(\cdot) \in Q$ выберем точку x_i ,

$$\|\mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t_0) - x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3(Me^{\omega} + 1)},$$

и для любого $t \in T$, $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$, будем иметь

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t) - \mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t_0) \right\| \\
& \leq \left\| S(t_0)(S(t-t_0)\xi - \xi) + \int_0^{t_0} S(t_0 - \tau)(S(t-t_0)v(\tau) - v(\tau)) d\tau \right\| \\
& \quad + \int_{t_0}^t \|S(t-\tau)v(\tau)\| d\tau \\
& \leq \|S(t-t_0) - J\| \left\| \mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t_0) - x_i \right\| \\
& \quad + \|S(t-t_0)x_i - x_i\| + Me^\omega \int_{t_0}^t \|v(\tau)\| d\tau \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Для того чтобы доказать равностепенную непрерывность $\mathcal{P}_S(K \times Q)$ слева, возьмем $h > 0$, $t_0 - 2h \geq 0$, настолько малое, что

$$\int_{t-h}^t \|v(\tau)\| d\tau \leq \frac{\varepsilon}{8Me^\omega}$$

для всех $v(\cdot) \in Q$ и $t \in T$, $t-h > 0$. Аналогично предыдущему найдутся точки $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, и число $0 < \delta \leq h$ такие, что

$$\begin{aligned}
S(h)\Sigma \subset \bigcup_{i=1}^n \left(x_i + \frac{\varepsilon}{8(Me^\omega + 1)} \overline{B} \right), \quad \|S(t_0 - t)x_i - x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad i = 1, \dots, n, \\
\int_t^{t_0} \|v(\tau)\| d\tau \leq \frac{\varepsilon}{4Me^\omega}
\end{aligned}$$

для всех $v(\cdot) \in Q$ и $t \in T$, $t_0 - \delta \leq t \leq t_0$. Пусть теперь $\xi \in K$, $v(\cdot) \in Q$ и $t \in [t_0 - \delta, t_0]$. Выбирая x_i из условия

$$\left\| S(h)\mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t-h) - x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{8(Me^\omega + 1)},$$

последовательно получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t) - \mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t_0) \right\| \leq \left\| S(t-h)(S(h)\xi - S(t_0-t+h)\xi) \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{t-h} S(t-h-\tau)(S(h) - S(t_0-t+h))v(\tau) d\tau \right\| \\
& \quad + \int_{t-h}^t \|(S(t-\tau) - S(t_0-\tau))v(\tau)\| d\tau + Me^\omega \int_t^{t_0} \|v(\tau)\| d\tau \\
& \leq \|S(t_0-t) - J\| \left\| S(h)\mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t-h) - x_i \right\| + \|S(t_0-t)x_i - x_i\| \\
& \quad + 2Me^\omega \int_{t-h}^t \|v(\tau)\| d\tau + Me^\omega \int_t^{t_0} \|v(\tau)\| d\tau \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом, множество $\mathcal{P}_S(K \times Q)$ равностепенно непрерывно в каждой точке $t_0 \in (0, 1]$ и утверждение леммы следует из теоремы Асколи [12, с. 304].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В предположениях леммы 1 образ множества $K \times Q$ при отображении $\mathcal{P}_S$ будет также относительно компактным в $L_1(T, X)$. В самом деле, пусть число $R > 0$ таково, что

$$\|\mathcal{P}_S(\xi, v(\cdot))(t)\| \leq R \quad \text{для всех } \xi \in K, \quad v(\cdot) \in Q, \quad t \in T,$$

и последовательность $u_n(\cdot) \in \mathcal{P}_S(K \times Q)$ сходится к функции $u(\cdot)$ в пространстве $(C(T, X), \mathcal{T}_C)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, достаточно большого $m = 1, 2, \dots$ и всех n начиная с некоторого номера, будем иметь

$$\int_T \|u_n(t) - u(t)\| dt \leq \frac{1}{m} R + \int_0^{1/m} \|u(t)\| dt + p_m(u_n(\cdot) - u(\cdot)) \leq \varepsilon.$$

3. Существование решений уравнения (1) в случае ограниченного множества. Пусть $\mathcal{U} \subset L_1(T, X)$, $g: \mathcal{U} \rightarrow L_1(T, X)$, а $A: D(A) \rightarrow X$ – инфинитезимальный генератор c_0 -полугруппы $S = \{S(t), t \geq 0\}$ линейных ограниченных операторов. Непрерывная функция $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ называется *интегральным решением* дифференциально-операторного уравнения (1), если для всех $t \in T$ имеет место равенство

$$u(t) = S(t)u(0) + \int_0^t S(t-\tau)g(u)(\tau) d\tau. \quad (6)$$

В случае, когда функция $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $(0, 1]$, $u(t) \in D(A)$, и соотношение (1) выполняется для всех $0 < t \leq 1$, говорят, что $u(\cdot)$ является *классическим решением* (или просто *решением*) уравнения (1).

Для непустого замкнутого выпуклого множества $K \subset X$ определим *касательный конус* к K в точке $x \in K$ формулой

$$T_K(x) := \overline{\bigcup_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda}(K - x)},$$

где черта сверху означает замыкание в X (см., например, [13, с. 219]). Очевидно, v принадлежит $T_K(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} d_K(x + \lambda v) = 0;$$

здесь $d_K(\cdot)$ – расстояние от точки до множества K в пространстве X . Если $Q \subset L_1(T, X)$, то расстояние от точки до Q в пространстве $L_1(T, X)$ мы обозначим символом $\mathcal{D}_Q(\cdot)$.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, банахово пространство X будем считать сепарабельным.

Зафиксировав множество $K \subset X$ и суммируемую функцию $l(t) \geq 0$, положим

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &:= \{u(\cdot) \in L_1(T, X) : u(t) \in K \text{ для почти всех } t \in T\}, \\ Q &:= \{v(\cdot) \in L_1(T, X) : \|v(t)\| \leq 2(l(t) + 1) \text{ для почти всех } t \in T\}, \\ \mathcal{K}^* &:= \overline{\mathcal{P}_S(K \times Q) \cap \mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Здесь черта означает замыкание в $(C(T, X), \mathcal{T}_C)$. В случае ограниченного K согласно лемме 1 и замечанию 1 оба пространства $(\mathcal{K}^*, \mathcal{T}_C)$ и $(\mathcal{K}^*, \|\cdot\|_1)$ компактны.

Скажем, что K *инвариантно* относительно полугруппы S , если $S(t)x \in K$ для всех $x \in K$ и $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть непустое замкнутое выпуклое ограниченное множество K инвариантно относительно компактной s_0 -полугруппы S с инфинитезимальным генератором $A: D(A) \rightarrow X$. Предположим, что непрерывное отображение $g: (\mathcal{K}^*, \|\cdot\|_1) \rightarrow L_1(T, X)$ для каждого $u(\cdot) \in \mathcal{K}^*$ удовлетворяет условиям

$$\|g(u)(t)\| \leq l(t), \quad g(u)(t) \in T_K(u(t)) \quad (7)$$

почти всюду на T . Тогда для любой непрерывной функции $\varphi: (\mathcal{K}^*, \mathcal{T}_c) \rightarrow K$ существует интегральное решение $u(\cdot) \in \mathcal{K}^*$ дифференциально-операторного уравнения (1) такое, что $u(0) = \varphi(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой функции $u(\cdot) \in \mathcal{K}^*$ и $\lambda > 0$ по теореме 2.2 из [14]

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}}(u + \lambda g(u)) = \int_T d_K(u(t) + \lambda g(u)(t)) dt.$$

Отсюда и из (7) по теореме Лебега об ограниченной сходимости следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1}{\lambda} \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(u + \lambda g(u)) = 0 \quad \text{для всех } u(\cdot) \in \mathcal{K}^*.$$

Воспользовавшись теперь свойствами касательных конусов и компактностью множества $\mathcal{K}^*$ в $L_1(T, X)$, найдем [4, с. 211–212] последовательность $\lambda_n \rightarrow 0+$, для которой

$$\frac{1}{\lambda_n} \mathcal{D}_{\mathcal{K}}(u + \lambda_n g(u)) \leq \frac{1}{n} \quad \text{для всех } u(\cdot) \in \mathcal{K}^*, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Как это делалось в леммах 5 и 6 из [1], определим непрерывные функции $q_n: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|u(t) + \lambda_n g(u)(t) - q_n(u)(t)\| \leq d_K(u(t) + \lambda_n g(u)(t)) + \frac{1}{n} \lambda_n \quad (9)$$

для всех $u(\cdot) \in \mathcal{K}^*$ и почти всех $t \in T$,

$$\|u(t) - q_n(u)(t)\| \leq 2\lambda_n(l(t) + 1) \quad (10)$$

для всех $u(\cdot) \in \mathcal{K}$ и почти всех $t \in T$. При этом мы пользуемся результатами о непрерывных селекторах, полученными в [15].

Положим

$$f(\xi, u)(t) := S(t)\xi + \int_0^t S(t-\tau)g(u)(\tau) d\tau \quad (11)$$

для всех $\xi \in K$, $u(\cdot) \in \mathcal{K}^*$, $t \in T$ и

$$f_n(\xi, u)(t) := S(t)\xi + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t S(t-\tau)(q_n(u)(\tau) - u(\tau)) d\tau, \quad (12)$$

$$\sigma_n(\xi, u)(t) := e^{-t/\lambda_n} S(t)\xi + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t e^{-(t-\tau)/\lambda_n} S(t-\tau)q_n(u)(\tau) d\tau \quad (13)$$

для всех $\xi \in K$, $u(\cdot) \in \mathcal{K}$, $t \in T$, $n = 1, 2, \dots$.

Легко видеть, что отображения $f: K \times (\mathcal{X}^*, \|\cdot\|_1) \rightarrow (C(T, X), \mathcal{T}_c)$, $f_n: K \times \mathcal{X} \rightarrow (C(T, X), \mathcal{T}_c)$ и $\sigma_n: K \times \mathcal{X} \rightarrow (C(T, X), \mathcal{T}_c)$ непрерывны. Согласно (9), (8) и теореме 2.2 из [14]

$$\|f(\xi, u)(t) - f_n(\xi, u)(t)\| \leq \frac{Me^\omega}{\lambda_n} \int_0^t d_K(u(\tau) + \lambda_n g(u)(\tau)) d\tau + \frac{1}{n} Me^\omega \leq \frac{2}{n} Me^\omega, \quad (14)$$

$\xi \in K$, $u(\cdot) \in \mathcal{X}^*$, $t \in T$, $n = 1, 2, \dots$. Непосредственными вычислениями проверяется справедливость равенства

$$f_n(\xi, u)(t) - \sigma_n(\xi, u)(t) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t S(t - \tau) (\sigma_n(\xi, u)(\tau) - u(\tau)) d\tau, \quad (15)$$

$\xi \in K$, $u(\cdot) \in \mathcal{X}$, $t \in T$, $n = 1, 2, \dots$.

Поскольку K инвариантно относительно полугруппы S , то [1, лемма 1] $\sigma_n(\xi, u)(t) \in K$ для всех $\xi \in K$, $u(\cdot) \in \mathcal{X}$, $t \in T$. Пусть $R > 0$ выбрано так, что $K \subset R\overline{B}$, и $Q_n := \{v(\cdot) \in L_1(T, X) : \|v(t)\| \leq R/\lambda_n + 2(l(t) + 1)\}$ для почти всех $t \in T$. Ясно, что Q_n равномерно интегрируемо и оператор σ_n переводит множество $K \times \mathcal{X}$ в $\mathcal{P}_{S_n}(K \times Q_n)$, где $S_n = \{S_n(t), t \geq 0\}$, $S_n(t) := e^{-t/\lambda_n} S(t)$, представляет собой компактную c_0 -полугруппу линейных ограниченных операторов на X . Отсюда по лемме 1 следует, что множество $\sigma_n(K \times \mathcal{X})$ относительно компактно в пространствах $(C(T, X), \mathcal{T}_c)$ и $L_1(T, X)$.

Пусть $\varphi^*: (C(T, X), \mathcal{T}_c) \rightarrow K$ – непрерывная функция такая, что $\varphi^*(u) = \varphi(u)$ для всех $u(\cdot) \in \mathcal{X}^*$. Тогда для каждого $n = 1, 2, \dots$ оператор $(\xi, u(\cdot)) \mapsto (\varphi^*(\sigma_n(\xi, u)), \sigma_n(\xi, u))$ переводит множество $K \times \mathcal{X}$ в его относительно компактное подмножество и является непрерывным. Применяя теорему Шаудера о неподвижной точке [4, с. 126], найдем пару $(\xi_n, u_n(\cdot)) \in K \times \mathcal{X}$, для которой $\xi_n = \varphi^*(\sigma_n(\xi_n, u_n))$ и $u_n = \sigma_n(\xi_n, u_n)$. В частности, $u_n(0) = \xi_n$.

Из равенства (15) следует $f_n(\xi_n, u_n) = u_n$, $n \geq 1$. Так как согласно (12), (10) $u_n(\cdot) \in \mathcal{X}^*$, $n \geq 1$, то $\xi_n = \varphi(u_n)$ и из последовательности $\{u_n(\cdot)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся как в $(C(T, X), \mathcal{T}_c)$, так и в $L_1(T, X)$. Не нарушая общности, считаем, что $u_n(\cdot) \rightarrow u(\cdot)$ при $n \rightarrow \infty$. Положим $\xi = \varphi(u)$. Тогда $\xi_n \rightarrow \xi$ и с учетом неравенства (14) в силу непрерывности отображения $f: K \times (\mathcal{X}^*, \|\cdot\|_1) \rightarrow (C(T, X), \mathcal{T}_c)$ получим для каждого $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} p_m(u - f(\xi, u)) &\leq p_m(u - u_n) + p_m(f_n(\xi_n, u_n) - f(\xi_n, u_n)) \\ &\quad + p_m(f(\xi_n, u_n) - f(\xi, u)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u(t) = f(\xi, u)(t)$ для любого $t \in (0, 1]$. Понятно, что равенство также справедливо при $t = 0$. Таким образом, $u(0) = \xi = \varphi(u)$ и функция $u(\cdot) \in \mathcal{X}^*$ удовлетворяет соотношению (6). Теорема доказана.

При некоторых дополнительных предположениях поставленная задача имеет также классическое решение. Именно, используя доказанную теорему и предложение 4.3 из [4, с. 298], приходим к следующим следствиям.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1, полугруппа $S = \{S(t), t \geq 0\}$ является аналитической, а оператор g таков, что при каждом $u(\cdot) \in \mathcal{X}^*$ функция $g(u)(\cdot)$ гёльдерова на T . Тогда уравнение (1) имеет классическое решение $u(\cdot) \in \mathcal{X}^*$, для которого $u(0) = \varphi(u)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть множество K , c_0 -полугруппа S линейных ограниченных операторов и отображение $g: \mathcal{K}^* \rightarrow L_1(T, X)$ такие же, как в теореме 1. Тогда для любого из приведенных ниже краевых условий:

- 1) $u(0) = u(1)$;
- 2) $u(0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\theta_i)$ при фиксированных $\theta_i \in (0, 1]$ и $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$;
- 3) $u(0) = \int_0^1 u(t) dt$

найдется интегральное решение уравнения (1), удовлетворяющее этому условию. Кроме того, если выполнены предположения следствия 1, то каждое интегральное решение является классическим.

Для доказательства достаточно положить $\varphi(u) = u(1)$, $\varphi(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\theta_i)$ или $\varphi(u) = \int_0^1 u(t) dt$ соответственно.

Функциональные краевые условия другого рода возникают в различных приложениях, в частности, к дифференциальным уравнениям с частными производными, что мы ниже проиллюстрируем на примере.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если условие компактности наложить не на полугруппу S , а на множество K , то утверждения теоремы 1 и ее следствий останутся справедливыми, поскольку в этом случае, как видно из доказательства леммы 1, множество $\mathcal{K}^*$ компактно в пространстве $C(T, X)$ непрерывных функций с обычной нормой $\|\cdot\|_C$, $\|x\|_C = \sup_{t \in T} \|x(t)\|$. Более того, в качестве $\varphi: \mathcal{K}^* \rightarrow K$ можно брать любое отображение, непрерывное относительно введенной нормы на $\mathcal{K}^*$. При этом сепарабельность пространства X можно не предполагать. В частности, когда $K \subset X$ компактно и $A \equiv 0$, мы получаем существование решения $u(\cdot)$ уравнения $\dot{u}(t) = g(u)(t)$, удовлетворяющее условиям (2), (3).

4. Существование решений: случай неограниченного множества. Если полугруппа S является сжимающей, то полученный в предыдущем разделе результат иногда удается обобщить на случай неограниченного множества K .

ТЕОРЕМА 2. Пусть S – компактная сжимающая c_0 -полугруппа линейных ограниченных операторов с инфинитезимальным генератором $A: D(A) \rightarrow X$, а K – непустое замкнутое выпуклое, не обязательно ограниченное, подмножество X , инвариантное относительно данной полугруппы. Предположим, что непрерывный оператор $g: (\mathcal{K}^*, \|\cdot\|_1) \rightarrow L_1(T, X)$ удовлетворяет условиям (7) теоремы 1, а непрерывное отображение $\varphi: (\mathcal{K}^*, \mathcal{I}_c) \rightarrow K$ таково, что при некотором $0 < \beta < 1$

$$\|\varphi(u) - \varphi(u')\| \leq \beta \|u - u'\|_C \quad \text{для всех } u(\cdot), u'(\cdot) \in \mathcal{K}^*. \quad (16)$$

Тогда уравнение (1) имеет интегральное решение $u(\cdot) \in \mathcal{K}^*$ такое, что $u(0) = \varphi(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (16) оператор $\gamma: K \rightarrow K$, $\gamma(\xi) = \varphi(S(\cdot)\xi)$, $\xi \in K$, является сжимающим и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку. Обозначим ее через ξ_0 .

Для фиксированного $L > 0$ положим

$$K_L := \{\xi \in K : \|\xi - \xi_0\| \leq L\}, \quad \mathcal{K}_0^* := \overline{\mathcal{P}_S(K_L \times Q) \cap \mathcal{K}},$$

где $\mathcal{K}$ и Q имеют тот же смысл, что и в п. 3, а черта означает замыкание в $(C(T, X), \mathcal{T}_c)$. В силу леммы 1 множество $\mathcal{K}_0^*$ компактно в пространствах $(C(T, X), \mathcal{T}_c)$ и $L_1(T, X)$. Поэтому, повторяя доказательство теоремы 1, мы можем, если необходимо, заменять $\mathcal{K}^*$ на $\mathcal{K}_0^*$. В частности, выберем последовательность $\lambda_n \rightarrow 0+$, для которой при всех $u(\cdot) \in \mathcal{K}_0^*$ справедливо неравенство (8), а также найдем непрерывные функции $q_n: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие (9) для $u(\cdot) \in \mathcal{K}_0^*$ и (10) для всех $u(\cdot) \in \mathcal{K}$.

Пусть непрерывные отображения $f: K \times (\mathcal{K}^*, \|\cdot\|_1) \rightarrow (C(T, X), \mathcal{T}_c)$, $f_n: K \times \mathcal{K} \rightarrow (C(T, X), \mathcal{T}_c)$ и $\sigma_n: K \times \mathcal{K} \rightarrow (C(T, X), \mathcal{T}_c)$, $n \geq 1$, определены равенствами (11)–(13) соответственно. Положим

$$L := \frac{2\beta}{1-\beta} \int_T (l(\tau) + 1) d\tau, \quad r(t) := L + 2 \int_0^t (l(\tau) + 1) d\tau,$$

$$\mathcal{K}_r := \{x(\cdot) \in \mathcal{K} : \|x(t) - S(t)\xi_0\| \leq r(t) \text{ для почти всех } t \in T\}.$$

Тогда для $\xi \in K_L$, $u(\cdot) \in \mathcal{K}_r$ имеем

$$\begin{aligned} & \|\sigma_n(\xi, u)(t) - S(t)\xi_0\| \\ & \leq e^{-t/\lambda_n} \|S(t)\xi - S(t)\xi_0\| + \lambda_n^{-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)/\lambda_n} \|S(t-\tau)q_n(u)(\tau) - S(t)\xi_0\| d\tau \\ & \leq L e^{-t/\lambda_n} + \lambda_n^{-1} \int_0^t e^{-(t-\tau)/\lambda_n} (2\lambda_n(l(\tau) + 1) + r(\tau)) d\tau = r(t), \end{aligned}$$

т.е. $\sigma_n(\xi, u) \in \mathcal{K}_r$. С другой стороны, для каждого $u(\cdot) \in \mathcal{K}_r \cap \mathcal{K}^*$ в силу (16)

$$\|\varphi(u) - \xi_0\| = \|\varphi(u) - \varphi(S(\cdot)\xi_0)\| \leq \beta \left(L + 2 \int_T (l(\tau) + 1) d\tau \right) = L.$$

Ясно, что φ может быть продолжено до непрерывного отображения $\varphi^*: \mathcal{K}_r \rightarrow K_L$. Следовательно, оператор

$$\Phi_n: (\xi, u(\cdot)) \mapsto (\varphi^*(\sigma_n(\xi, u)), \sigma_n(\xi, u)) \quad (17)$$

переводит множество $K_L \times \mathcal{K}_r$ в себя и является непрерывным. Более того, множество $\Phi_n(K_L \times \mathcal{K}_r)$ относительно компактно в $X \times (C(T, X), \mathcal{T}_c)$. Находя по теореме Шаудера неподвижную точку $(\xi_n, u_n(\cdot)) \in K_L \times \mathcal{K}_r$ оператора (17), так же, как в теореме 1, убеждаемся в том, что $u_n(\cdot) \in \mathcal{K}_0^*$ для всех $n \geq 1$, и предельная точка $u(\cdot) \in \mathcal{K}^*$ этой последовательности есть искомое интегральное решение уравнения (1), удовлетворяющее функциональному краевому условию $u(0) = \varphi(u)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть s_0 -полугруппа S , множество $K \subset X$ и отображение $g: \mathcal{K}^* \rightarrow L_1(T, X)$ такие же, как в теореме 2. Тогда для любых $\theta \in (0, 1]$, $\lambda \in [0, 1)$ и $u_0 \in K$ существует интегральное решение $u(\cdot) \in \mathcal{K}^*$ уравнения (1) такое, что $u(0) = \lambda u(\theta) + (1 - \lambda)u_0$.

5. Пример. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + F(t, x, u, \mathcal{R}u), \\ u(t, x) &= 0 \quad \text{для всех } x \in \partial\Omega, \quad t \in T, \quad u(0, x) = u(1, \psi(x)) \quad \text{для всех } x \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (18)$$

где Ω – произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$;

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

– оператор Лапласа; $F: T \times \overline{\Omega} \times [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a \leq 0 \leq b < +\infty$, $a < b$, $-\infty < c < d < +\infty$; $\psi: \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$ и для каждой непрерывной функции u , $a \leq u(t, x) \leq b$, функция $\mathcal{R}u$ переменных t, x непрерывна и принимает свои значения на отрезке $[c, d]$.

Пусть $X = C(\overline{\Omega})$ – пространство непрерывных числовых функций на $\overline{\Omega}$ с $\sup$ -нормой. Определим

$$\begin{aligned} D(\mathbf{A}_C) &:= \{u \in X : \Delta u \in X, u = 0 \text{ и } \Delta u = 0 \text{ на } \partial\Omega\}; \\ (\mathbf{A}_C u)(x) &:= \Delta u(x) \quad \text{для всех } u \in D(\mathbf{A}_C), \quad x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Согласно теореме 3.7 из [3, с. 217] $\mathbf{A}_C$ является инфинитезимальным генератором аналитической c_0 -полугруппы $S_C = \{S_C(t), t \geq 0\}$.

Пусть $K := \{u \in X : a \leq u(x) \leq b \text{ для всех } x \in \overline{\Omega}\}$, $\mathcal{W} := \{w(\cdot) \in C(T, X) : c \leq w(t)(x) \leq d \text{ для всех } t \in T, x \in \overline{\Omega}\}$, а множества $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^*$ – такие же, как в п. 3.

В дальнейшем предполагается, что

- а) $t \mapsto F(t, x, u, w)$ измерима для всех $x \in \overline{\Omega}$, $(u, w) \in [a, b] \times [c, d]$;
- б) $(x, u, w) \mapsto F(t, x, u, w)$ непрерывна для почти всех $t \in T$;
- в) для некоторой суммируемой функции $l(t) \geq 0$

$$|F(t, x, u, w)| \leq l(t) \quad \text{для всех } x \in \overline{\Omega}, \quad (u, w) \in [a, b] \times [c, d]$$

почти всюду на T ;

г) оператор $\mathcal{R}: (\mathcal{K}^*, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathcal{W}, \|\cdot\|_1)$ непрерывен.

Если для каждого $u(\cdot) \in \mathcal{K}^*$, $t \in T$ через $g(u)(t)$ мы обозначим отображение $x \mapsto F(t, x, u(t)(x), \mathcal{R}u(t)(x))$, то оператор g переводит множество $\mathcal{K}^*$ в $L_1(T, X)$. Легко также проверить, что он непрерывен относительно нормы $\|\cdot\|_1$ на $\mathcal{K}^*$.

Как это принято, непрерывную функцию u переменных t, x назовем X -решением (интегральным X -решением) задачи (18), если $t \mapsto u(t, \cdot)$ является классическим (соответственно интегральным) решением эволюционного уравнения $\dot{u}(t) = \mathbf{A}_C u(t) + g(u)(t)$ с функциональным краевым условием $u(0) = \varphi(u)$, где $\varphi: \mathcal{K}^* \rightarrow K$,

$$\varphi(u)(x) := u(1)(\psi(x)) \quad \text{для всех } u(\cdot) \in \mathcal{K}^*, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (19)$$

При этом мы естественным образом отождествляем элементы пространств $C(T \times \overline{\Omega}, \mathbb{R})$ и $C(T, X)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть наряду с условиями а)–г) справедливы неравенства

$$F(t, x, a, w) \geq 0, \quad F(t, x, b, w) \leq 0 \quad (20)$$

для почти всех $t \in T$ и всех $x \in \bar{\Omega}$, $w \in [c, d]$. Тогда для любого непрерывного отображения $\psi: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ задача (18) имеет интегральное X -решение u , $a \leq u(t, x) \leq b$ для всех $t \in T$, $x \in \bar{\Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, во-первых, что в силу теорем 1.2 и 3.1 из [3, с. 208, с. 212] оператор $(A_C - \lambda J)^{-1}$ является компактным, как только он ограничен. Отсюда и из следствия 5.1 из [4, с. 303] вытекает компактность полугруппы S_C . Для любого $z \in K$ согласно дифференцируемости полугруппы функция $u(t, x) = (S_C(t)z)(x)$ непрерывна на множестве $\{(t, x) : t \geq 0, x \in \bar{\Omega}\}$ и дважды непрерывно дифференцируема на его внутренности. Следовательно, по принципу максимума (см., например, [16, с. 511]) для всех $t \in T$, $x \in \bar{\Omega}$ имеем

$$a \leq \min \left\{ 0, \min_{x \in \bar{\Omega}} z(x) \right\} \leq u(t, x) \leq \max \left\{ 0, \max_{x \in \bar{\Omega}} z(x) \right\} \leq b.$$

Тем самым, множество K инвариантно относительно данной полугруппы.

Зафиксируем $u(\cdot) \in \mathcal{K}^*$. Для того чтобы доказать включение $g(u)(t) \in T_K(u(t))$, возьмем $t \in T$, при котором имеют место б) и (20). Воспользовавшись этими условиями, а также непрерывностью функций $u(t)$, $\mathcal{R}u(t)$ и компактностью множества $\bar{\Omega}$, для любого $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ такое, что

$$P_\lambda(x) := [a, b] \cap (u(t)(x) + \lambda F(t, x, u(t)(x), \mathcal{R}u(t)(x)) + (-\varepsilon\lambda, \varepsilon\lambda)) \neq \emptyset$$

для всех $x \in \bar{\Omega}$ и $0 < \lambda \leq \delta$. По теореме Майкла [13, с. 82] многозначное отображение $P_\lambda: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $P_\lambda(x) = \overline{P_\lambda(x)}$, имеет непрерывный селектор z_λ , $a \leq z_\lambda(x) \leq b$, с помощью которого получаем

$$\frac{1}{\lambda} d_K(u(t) + \lambda g(u)(t)) \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(t)(x) + \lambda F(t, x, u(t)(x), \mathcal{R}u(t)(x)) - z_\lambda(x)| \leq \varepsilon.$$

Очевидно, $\|g(u)(t)\| \leq l(t)$ для почти всех $t \in T$ и функция $\varphi: \mathcal{K}^* \rightarrow K$, определенная равенством (19), непрерывна относительно топологии $\mathcal{T}_c$ на $\mathcal{K}^*$. Для завершения доказательства теперь достаточно воспользоваться теоремой 1.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если дополнительно к условиям теоремы 3 функция F удовлетворяет условию Гёльдера по t, u, w , т.е. существуют числа $N > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$ такие, что

$$|F(t, x, u, w) - F(t', x, u', w')| \leq N(|t - t'|^\alpha + |u - u'|^\alpha + |w - w'|^\alpha)$$

для всех $x \in \bar{\Omega}$, $t, t' \in T$, $(u, w), (u', w') \in [a, b] \times [c, d]$, а функция $\mathcal{R}u(\cdot)$ гёльдерова на T для любой $u(\cdot) \in \mathcal{K}^*$, то краевая задача (18) имеет X -решение u , принимающее значения в отрезке $[a, b]$.

Данное утверждение непосредственно вытекает из предыдущей теоремы и предложений 4.3, 4.4 из [4, с. 298–300].

В качестве примера оператора $\mathcal{R}$ со свойствами, указанными в теореме 3 и следствии 4, отметим линейный интегральный оператор

$$\mathcal{R}u(t)(x) = \int_T G(t, \tau, x) u(\tau)(x) d\tau,$$

ядро которого ограничено и является гёльдеровым по t равномерно по $\tau \in T$ и $x \in \bar{\Omega}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гончаров В.В. О существовании решений одного класса дифференциальных включений на компактном множестве // Сиб. матем. ж. 1990. Т. 31. № 5. С. 24–30.
- [2] Гончаров В.В. Теоремы существования решений дифференциальных включений с полунепрерывной снизу правой частью на локально компактном множестве // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2058–2065.
- [3] Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. New York: Springer, 1983.
- [4] Martin R. H. Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces. New York: Wiley, 1976.
- [5] Toshiyuki I. Global existence of mild solutions to semilinear differential equations in Banach spaces // Hiroshima Math. J. 1986. V. 16. P. 499–530.
- [6] Deimling K. Periodic solutions of differential equations in Banach spaces // Manuscripta Math. 1978. V. 24. P. 31–44.
- [7] Prüss J. Periodic solutions of semilinear evolution equations // Nonlinear Anal. 1979. V. 3. № 5. P. 601–612.
- [8] Брыкалов С.А. Существование и неединственность решений некоторых нелинейных краевых задач // Докл. РАН. 1991. Т. 316. № 1. С. 18–21.
- [9] Брыкалов С.А. Разрешимость нелинейной краевой задачи в фиксированном множестве функций // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 12. С. 2027–2033.
- [10] Brykalov S. A. A second-order nonlinear problem with two-point and integral boundary conditions // Proc. Georgian Acad. Sci. Math. 1993. V. 1. № 3. P. 273–279.
- [11] Deimling K. Ordinary Differential Equations in Banach Spaces. Berlin: Springer, 1977.
- [12] Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981.
- [13] Aubin J.-P., Cellina A. Differential Inclusions. Berlin: Springer, 1984.
- [14] Hiai F., Umegaki H. Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1977. V. 7. P. 149–182.
- [15] Bressan A., Colombo G. Extensions and selections of maps with decomposable values // Studia Math. 1988. V. 90. № 1. P. 69–86.
- [16] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

Иркутский ВЦ Сибирского отделения РАН
E-mail: goncha@icc.ru

Поступило
02.04.97